# ÜBER DEN ERSTEN UND VIERTEN GAUSSSCHEN BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES DER ALGEBRA

VON

ALEXANDER OSTROWSKI

Neubearbeitung des 1920 als Anhang zum Heft VIII der *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss* (S. 50—58) erschienenen Aufsatzes.
Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse. 1920 Beiheft.

## Einleitung.

Während die im ersten Teil der Gaussschen *Dissertation* (1799, Werke III, S. 1) enthaltene Besprechung der früheren Beweisversuche des Fundamentalsatzes der Algebra sich durch ganz ausserordentliche Sorgfalt auszeichnet, fällt daneben der im zweiten Teil entwickelte Beweis dieses Satzes etwas ab. Nicht etwa, weil dieser Beweis in geometrischer Einkleidung vorgetragen wird, sondern, weil bei ihm Eigenschaften der algebraischen Kurven verwendet werden, die weder in der *Dissertation* selbst, noch in der vorgaussschen Literatur bewiesen sind.

In den folgenden Ausführungen soll nun versucht werden, für den ersten und vierten Gaussschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra eine vollständig strenge Darstellung zu geben.

Selbstverständlich darf ein Beweis eines analytischen Satzes, der geometrische Begriffe benutzt, deshalb allein noch nicht als unstreng bezeichnet werden. Solange die geometrische Anschauung nur dazu dient, den Überblick über die benutzten Voraussetzungen und den Gedankengang des Beweises zu erleichtern — oder auch dazu, direkte Anwendung und Formulierung der Grundeigenschaften der Zahlenreihe und der stetigen Funktionen aus darstellungstechnischen Gründen zu umgehen — werden wir heute einen solchen Beweis als korrekt bezeichnen, da man sich eben auf den Standpunkt stellen kann, dass die inzwischen erfolgte sorgfältige Grundlegung der Analysis das an sich etwas schwankende Fundament aller solchen Beweise mit einem Schlage gesichert hat.

Man könnte sich natürlich auch auf den intransigenten Standpunkt stellen, dass, solange keine Klarheit über den Begriff der Irrationalzahl bestand, ein strenger Beweis eines derartigen Existenzsatzes überhaupt unmöglich war. Doch dürfte es wohl richtiger sein, einen Beweis der »vorkritischen« Periode unserer

Wissenschaft als streng anzusehen, wenn er sich an Hand der inzwischen aufgestellten Definitionen und einfachsten Elementarsätze ohne weiteres ergänzen lässt. In diesem Sinne darf der zweite Gausssche Beweis (Werke III, S. 31) als absolut streng bezeichnet werden.

Anders ist es, wenn die geometrische Einkleidung dazu dient, die wirklichen Schwierigkeiten zu verhüllen und in die Daten des Problems neue, nicht ausdrücklich formulierte Voraussetzungen hineinzutragen. In diesem Falle darf man durchaus von einer wesentlichen Lücke sprechen. —

In dem Gaussschen Beweise handelt es sich im wesentlichen um folgendes: Es wird ein Polynom

$$f(z) = z^n + Az^{n-1} + \cdots + C$$

mit reellen Koeffizienten betrachtet, und es werden die beiden Kurven

$$\text{(I)}\quad \Re f(z) = 0, \qquad \text{(II)}\quad \Im f(z) = 0$$

untersucht. Es gibt dann ein $R$ derart, dass auf jedem der Kreise $|z| = r$, $r \geqq R$ genau $2n$ Punkte der Kurve (I) und ebensoviele Punkte der Kurve (II) liegen, wobei die beiden Punktsysteme einander trennen. Benutzt man Polarkoordinaten $r$, $\varphi$, so lassen sich die Punkte von (I) und (II) für $r \geqq R$ zu je $2n$ Kurvenzügen

$$\varphi = A_\mu(r), \quad \varphi = B_\mu(r), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n)$$

zusammenfügen, wobei, wie Gauss im Art. 20 bemerkt, sich leicht beweisen lässt, dass die Funktionen $A_\mu$, $B_\mu$ in $r$ stetig sind. Die zugehörigen Kurvenzüge erstrecken sich von der Kreislinie $|z| = R$ ausgehend ins Unendliche, und zwar so, dass zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Zweigen der Kurve (I) je ein Zweig der Kurve (II) liegt und umgekehrt. Überdies ergibt sich aus dem Beweise der obigen Tatsachen, dass $\Re f(z)$ beim Überschreiten der Kurve (I) jedesmal sein Vorzeichen wechselt, während in den zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Zweigen der Kurve (I) gelegenen Bereichen und auf den entsprechenden Bogen von $|z| = R$ das Vorzeichen von $\Re f(z)$ jedesmal unverändert bleibt. Das Analoge gilt für die Kurve (II) und $\Im f(z)$. — Für die Beweise dieser Tatsachen vergl. die Nummern 1 und 2 der folgenden Darstellung. — Es handelt sich nunmehr um den Verlauf der Kurven (I), (II) im Innern von $|z| = R$, und die Gausssche Betrachtung beruht in erster Linie auf der Tatsache, dass sich die ausserhalb von $|z| = R$ verlaufenden Zweige von (I) (und ebenso auch diejenigen von (II)) so zu Paaren zusammenfassen lassen, dass, wenn man längs des einen Zweiges $\varphi = A_\mu(r)$ eines solchen Paares ins Innere von $|z| = R$ hineingeht, man die ganze Kreisfläche durchquert und schliesslich längs des anderen Zweiges $\varphi = A_\nu(r)$ dieses Paares aus dem Kreise heraustritt. Im Nachweis dieser Tatsache liegt die Hauptschwierigkeit; die weiteren Schlüsse der GAUSSschen *Dissertation* folgen dann in durchaus einwandfreier Weise.

Zur Begründung der genannten Tatsache sagt nun GAUSS, es sei aus der höheren Geometrie bekannt, dass, wenn ein Zweig einer algebraischen Kurve in einen begrenzten Raum eintritt, er notwendig wieder aus demselben heraustreten müsse, und er bemerkt zur Erläuterung in einer Fussnote (Werke III, S. 27), dass eine algebraische Kurve »weder plötzlich abbricht, noch sich nach unendlich vielen Umläufen gewissermassen in einem Punkt verlieren kann«. Er fügt dann hinzu: ». . . und soviel ich weiss, hat noch Niemand hiergegen einen Zweifel vorgebracht. Doch werde ich, wenn es jemand fordert, bei anderer Gelegenheit unternehmen, einen keinem Zweifel unterworfenen Beweis zu liefern.« Weiter sagt GAUSS, dass im vorliegenden Falle das Nichtabbrechen der hier vorkommenden Kurven auch schon daraus hervorgeht, dass sie Gebiete verschiedenen Vorzeichens von $\Re f(z)$ bezw. $\Im f(z)$ voneinander trennen.

Hierzu ist nun zu bemerken, dass die genaue Durchführung der zuletzt angegebenen Überlegung einer sorgfältigen topologischen Ausführung bedarf. Vor allem wäre aber auch der Beweis, dass ein solches Verhalten unmöglich ist, insofern nicht genügend, als daraus die Möglichkeit des »Fortschreitens« längs der im Innern von $|z| = R$ liegenden Zweige unserer Kurven, d. h. die Existenz einer Parameterdarstellung, noch nicht folgt, wie denn überhaupt der Beweis für die Existenz einer Parameterdarstellung *durch die Fortsetzung im Kleinen* unter Umständen auf grosse Schwierigkeiten stossen kann, falls man als einen solchen Parameter nicht eine der Koordinaten oder die Bogenlänge der Kurve benutzen kann. Und die Tatsache, dass es sich bei den Zweigen einer algebraischen Kurve um einfache Linien handelt, die sich also etwa aus endlich vielen regulären Bogen zusammensetzen, darf selbstverständlich nicht den Erfahrungen entnommen werden, die man bei der Untersuchung von Kurven etwa der ersten sechs Ordnungen gesammelt hat.

Demnach hat man zur Ergänzung des ersten GAUSSschen Beweises zu zeigen, dass man jede algebraische Kurve — oder auch nur die im GAUSSschen Beweis vorkommenden Kurven — in endlich viele reguläre Bogen zerlegen kann, die sich durch eine Gleichung von einer der beiden Formen

$$y = g(x), \quad x = g(y)$$

darstellen lassen, wobei die Funktion $g$ im Innern des betrachteten Intervalls stetig und beschränkt differenzierbar ist.

Wir führen nun in der weiter unten folgenden Darstellung den Beweis für die GAUSSschen Kurven (I), (II), obgleich er, wie wir bemerken möchten, auch für beliebige algebraische und sogar für nur analytische Kurven ausreicht. Die Überlegungen, die dabei zu benutzen sind, sind zunächst algebraischer Natur. Es ist nämlich für die Durchführung unseres Beweises sehr wertvoll, dass man von vornherein die endlich vielen Punkte angeben kann, in denen ein regulärer Teilbogen der betrachteten Kurve enden könnte. Hierzu braucht man offenbar in erster Linie nur die singulären Punkte und die Berührungspunkte der zur $x$- und $y$-Achse parallelen Tangenten der betrachteten Kurve aufzusuchen. Es ist daher wichtig, die Gleichung der Kurve so einzurichten, dass solche Punkte nur in endlicher Anzahl vorkommen. Trifft dies aber in einem Falle nicht zu, so folgt daraus, geometrisch gesprochen, dass unsere Kurve ein mehrfaches Stück enthält, und es ist wesentlich, derartige, mehrfach auftretende Stücke durch algebraische Operationen entfernen zu können. Dies wird möglich, wenn man die folgende algebraische Tatsache benutzt:

Hat ein Polynom in zwei Veränderlichen unendlich viele gemeinsame Nullstellen mit seiner Ableitung nach einer von diesen Veränderlichen, so besitzt es einen mehrfachen Faktor.

Diese Tatsache ist leicht zu beweisen, z. B. mit Hilfe des EUKLIDischen Algorithmus, wobei dann allerdings die folgende für alle Sätze über die Teilbarkeit von Polynomen fundamentale Erweiterung des GAUSSschen Satzes über die Teiler ganzzahliger Polynome (*Disqu. arithm.* Art. 42, Werke I, S. 34) heranzuziehen ist:

Multipliziert man zwei Polynome

$$F(x, y) = A_0(x)y^m + A_1(x)y^{m-1} + \cdots + A_m(x),$$
$$G(x, y) = B_0(x)y^n + B_1(x)y^{n-1} + \cdots + B_n(x),$$

wo $A_0, \ldots, A_m$; $B_0, \ldots, B_n$ Polynome in $x$ sind und sowohl der grösste gemeinsame Teiler von $A_0, \ldots, A_m$ als auch der grösste gemeinsame Teiler von $B_0, \ldots, B_n$ gleich 1 ist, so ist im Produkt

$$FG = C_0(x)y^{m+n} + C_1(x)y^{m+n-1} + \cdots + C_{m+n}(x)$$

der grösste gemeinsame Teiler der Polynome $C_0, \ldots, C_{m+n}$ auch gleich 1.

Es ist von Interesse zu bemerken, dass Gauss den erwähnten arithmetisch-algebraischen Satz am 22. Juli 1797 gefunden hat, also einige Monate vor der Entdeckung der Prinzipien des ersten Beweises des Fundamentalsatzes. Daher ist es durchaus gerechtfertigt, anzunehmen, dass die zur Durchführung einer Diskussion des Verlaufes einer algebraischen Kurve im Grossen erforderlichen Hilfsmittel Gauss bei der Abfassung seiner *Dissertation* zur Verfügung standen.

Was den Verlauf eines einzelnen Teilbogens der Kurve zwischen den auf der Kurve markierten Punkten anbetrifft, so kann man hier die Fortsetzbarkeit eines solchen Bogens ohne weiteres durch eine Überlegung beweisen, wie sie offenbar Gauss im Art. 20 der *Dissertation* zum Beweise der Stetigkeit der dort betrachteten Kurvenzweige vorgeschwebt hat. Um allerdings solche »infinitesimale« Schritte zu einem vollständigen Teilbogen zusammenzufügen, muss man wohl von der gleichmässigen Stetigkeit eines Polynoms in zwei Variabeln Gebrauch machen. Die gleichmässige Stetigkeit lässt sich aber im Falle von Polynomen sehr einfach beweisen, da man die Differenz zweier Polynomwerte ohne weiteres abschätzen kann.

Insofern sind die Hilfsmittel, die wir im Folgenden benutzen, alle der Art, dass sie auch Gauss im Prinzip bekannt gewesen sein mögen. Gerade in der Algebra und in der Analysis situs lässt sich aber sehr oft ein an sich einfacher Gedanke nur mit grosser Umständlichkeit durchführen, und wenn man bedenkt, dass Gauss sich bei einer solchen Durchführung nirgends an irgendwelche Vorbilder hätte halten können, so wird man verstehen, warum er sich für eine, für unsere Begriffe reichlich summarische Darstellung entschlossen hat. Denn schliesslich muss man auch bei einer solchen Untersuchung irgendwo anfangen, und eine vollständige Neubegründung der Elemente aus einer derartigen Veranlassung zu geben, dürfte wohl GAUSS fern gelegen haben. Andererseits ist er auf die oben gekennzeichnete Lücke auch später nie zurückgekommen.

In der fünfzig Jahre später entstandenen Neufassung des Beweises von 1799 (in der sogenannten *Jubiläumsschrift* von 1849, Werke III, S. 71) hat er vielmehr den Ansatz etwas zu modifizieren versucht, anscheinend, um jener Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen. Er betrachtet jetzt nicht mehr die einzelnen Zweige der Kurven $\Re f(z) = 0$, $\Im f(z) = 0$, sondern die zwischen diesen Zweigen liegenden zusammenhängenden Gebiete, in denen die Funktionen $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ konstante Vorzeichen haben. Allerdings gelingt es ihm auch so nicht, die Betrachtung der im Innern von $|z| = R$ liegenden Zweige der Kurven (I), (II) zu vermeiden, er betrachtet vielmehr auch in der Neufassung seines Beweises Umläufe längs dieser Linien, wozu wiederum eine vorherige Diskussion des geometrischen Charakters dieser Linien erforderlich wäre. Der einzige Gewinn scheint darin zu bestehen, dass man sich nunmehr auf die Betrachtung nur einer der beiden Kurven (I), (II) beschränken kann und einen besseren Überblick über die Gesamtheit der Nullstellen von $f(z)$ hat.

Andererseits erweist sich der Gedanke, anstatt der Linien $\Re f(z) = 0$, $\Im f(z) = 0$ die Gebiete $\Re f(z) \gtrless 0$, $\Im f(z) \gtrless 0$ zu betrachten, von wesentlich grösserer Tragweite, als man danach hätte annehmen können. Wir erinnern daran, dass in der Theorie der konformen Abbildung und in den neueren Untersuchungen der mengentheoretischen Topologie der Gedanke, anstatt einer Jordankurve die von ihr begrenzten Gebiete zu betrachten, sich als sehr fruchtbar erwiesen und z. B. zu einer wesentlichen Vereinfachung des Beweises des JORDANschen Kurvensatzes geführt hat. Es ist daher sicher von Interesse, dass man, von der Betrachtung der GAUSSschen Flächenstücke ausgehend, den Beweis des Fundamentalsatzes so zu Ende führen kann, dass dabei ein weiteres Eingehen auf die Gestalt der im Innern von $|z| \leqq R$ liegenden Teile der Kurven (I), (II) vollständig überflüssig wird. Man hat dabei nur mit dem Begriff eines Kontinuums zu arbeiten und die verschiedenen Randkontinua der GAUSSschen Flächenstücke zu untersuchen. Dies erscheint umso bemerkenswerter, als dabei von den speziellen Eigenschaften der stetigen Funktionen $\Re f(z)$, $\Im f(z)$ im Innern des Kreises $|z| = R$ kein Gebrauch gemacht und so der folgende äusserst allgemeine Satz gewonnen wird:

Haben zwei im Innern und auf dem Rande von $|z| = R$ stetige reelle Funktionen $F$, $G$ auf der Kreislinie $|z| = R$ die gleiche Anzahl von einander trennenden Vorzeichenwechseln, und verschwinden sie sonst auf der Kreislinie nicht, so haben sie im Innern des Kreises wenigstens eine gemeinsame Nullstelle. — Hierin liegt eine wohl unerwartet direkte Bestätigung der Bemerkungen am Schlusse des Art. 5 der *Jubiläumsschrift*: »Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höheren von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Grössenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössenkombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann, ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache.«

Wir werden nun im Folgenden in den Nummern 1 und 2 zunächst die Tatsachen beweisen, die sich auf den Verlauf der Kurven $\Re f(z) = 0$, $\Im f(z) = 0$ ausserhalb des Kreises $|z| = R$ beziehen. Es werden dabei im Wesentlichen nur die Überlegungen der betreffenden Teile der beiden Gaussschen Abhandlungen in modernerer Weise ausgeführt. In den Nummern 3 bis 6 beweisen wir sodann die hier in Betracht kommenden Tatsachen über den Gesamtverlauf der Kurven $\Re f(z) = 0$, $\Im f(z) = 0$ auch im Innern des Kreises $|z| = R$ und schliessen daran den Beweis der Wurzelexistenz im Sinne der Gaussschen Methode an. Dabei werden zugleich einige von Gauss ohne Beweis angegebene Tatsachen über die Kurven $\Re f(z) = 0$, $\Im f(z) = 0$ hergeleitet. Der Beweis des oben zuletzt angegebenen Satzes wird an anderer Stelle[1]) veröffentlicht werden.

1. Nullstellen von $U$ und $T$ ausserhalb $(R)$. Es sei

$$f(z) \equiv z^n + Az^{n-1} + \cdots + C = T(r, \varphi) + iU(r, \varphi) = 0, \ z = x + iy,$$

die vorgegebene algebraische Gleichung, wo $r$, $\varphi$ Polarkoordinaten, $x$, $y$ kartesische Koordinaten sind. Um zu beweisen, dass die Kurven $T = 0$, $U = 0$ sich schneiden, ist es nötig, den Verlauf dieser Kurven zu untersuchen. Wir benutzen dabei zuerst Polarkoordinaten.

1) Im Crelleschen Journal f. d. r. u. a. M. Bd. 170.

Es sei $\omega = \frac{\pi}{4n}$. Teilen wir durch $4n$ Halbstrahlen $\varphi = -\omega$, $\varphi = \omega$, $\varphi = 3\omega$ usw. die ganze Ebene in $4n$ Winkelräume und bezeichnen sie in der entsprechenden Reihenfolge durch (1), (2), ..., ($4n$), so gibt es, wie wir jetzt beweisen werden, eine Zahl $R$ mit den folgenden Eigenschaften:

1) $f(z)$ hat keine Wurzel vom absoluten Betrage $\geqq R$.

2) Man beschreibe um den Nullpunkt eine Kreislinie ($\overline{R}$) mit dem Halbmesser $\overline{R} \geqq R$ und betrachte $T$ und $U$ auf dieser Kreislinie. Dann sind in den $\varphi$-Intervallen $(4n+1)$ $T$ und $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ positiv, $U$ ist hingegen zuerst $< 0$, dann $> 0$, hat also eine Wurzel innerhalb jedes $\varphi$-Intervalls $(4n+1)$ auf jedem Kreise ($\overline{R}$) und zwar nur eine, wegen $\frac{\partial U}{\partial \varphi} > 0$. In den $\varphi$-Intervallen $(4n+2)$ ist $U > 0$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi} < 0$, $T$ zuerst $> 0$, dann $< 0$, also innerhalb jedes solchen Intervalls $(4n+2)$ einmal und nur einmal $= 0$. In den $\varphi$-Intervallen $(4n+3)$ ist $T < 0$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi} < 0$, $U$ wechselt je einmal das Vorzeichen. In den $\varphi$-Intervallen ($4n$) endlich ist $U < 0$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi} > 0$, $T$ wechselt je einmal das Vorzeichen.

Um ein solches $R$ zu finden, bezeichnen wir die absoluten Beträge der Koeffizienten $A, \ldots, C$ von $f(z)$ mit $a, \ldots, c$ und die Summe dieser absoluten Beträge mit $S$. Dann besitzt $R = \sqrt{2}\,S + 1$ die geforderte Eigenschaft. In der Tat gilt mit diesem Wert von $R$ für $\overline{R} \geqq R$:

$$|T - \overline{R}^n \cos n\varphi| \leqq a\overline{R}^{n-1} + \cdots + c \leqq \overline{R}^{n-1} S < \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\overline{R})^n,$$
$$\left|\frac{\partial U}{\partial \varphi} - n\overline{R}^n \cos n\varphi\right| \leqq (n-1)a\overline{R}^{n-1} + \cdots < n\overline{R}^{n-1}S < n\sqrt{\tfrac{1}{2}}(\overline{R})^n.$$

Daher haben dann für jedes $\varphi$, für das $|\cos n\varphi| \geqq \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, $T$ und $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ das Vorzeichen von $\cos n\varphi$. Dies findet also für alle $\varphi$ statt, die für ganze $k$ zwischen $(8k-1)\omega$ und $(8k+1)\omega$, oder zwischen $(8k+3)\omega$ und $(8k+5)\omega$ liegen, d. h. in den Intervallen (1), (3), (5).... Und zwar sind in (1), (5), ... $T$ und $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ positiv, in (3), (7), ... negativ. Ganz analog sehen wir, dass, sobald $|\sin n\varphi| \geqq \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, $U$ für $\overline{R} \geqq R$ das Vorzeichen von $\sin n\varphi$ und $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ das Vorzeichen von $-\sin n\varphi$ hat. Dies findet also für alle $\varphi$ statt, die für ganze $k$ zwischen $(8k+1)\omega$ und $(8k+3)\omega$ oder zwischen $(8k+5)\omega$ und $(8k+7)\omega$ liegen, d. h. in (2), (4), (6), .... Und zwar ist in (2), (6), ... $U$ positiv, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ negativ, in (4), (8), ... aber $U$ negativ, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ positiv. — Daraus ergiebt sich 1) und 2) sofort.

2. Verlauf von $U = 0$ und $T = 0$ ausserhalb $(R)$. Danach ist es leicht, den Verlauf etwa der Kurve $U = 0$ für $r \geqq R$ zu beschreiben. Sie zerfällt ausserhalb der Kreislinie $(R)$ mit dem Halbmesser $R$ in $2n$ Zweige, die in den Intervallen (1), (3), ... getrennt verlaufen. Fassen wir etwa die Nullstellen von $U$ ausserhalb $(R)$ in (1) ins Auge, so liegt auf jedem Kreise $r = \bar{R}(\bar{R} \geqq R)$ genau eine. Alle diese Nullstellen bilden aber eine stetige Kurve. Um dies zu beweisen, brauchen wir nur Folgendes zu zeigen:

Ist $w \geqq R$ und $(w, \vartheta)$ die Nullstelle von $U$, die in (1) auf dem Kreise $r = w$ liegt, so kann man jedem $\varepsilon$ ein solches $\delta$ zuordnen, dass, wenn $w' \geqq R$, $w - \delta < w' < w + \delta$ ist und die auf dem Kreise $r = w'$ in (1) liegende Wurzel mit $(w', \vartheta(w'))$ bezeichnet wird, $|\vartheta - \vartheta(w')| < \varepsilon$ bleibt.

Da aber $U$ in $(w, \vartheta)$ auf dem Kreise $r = w$ von negativen zu positiven Werten übergeht, so ist für ein hinreichend kleines $\varepsilon' < \varepsilon$

$$U(w, \vartheta - \varepsilon') < 0, \quad U(w, \vartheta + \varepsilon') > 0,$$

und sowohl $(w, \vartheta - \varepsilon')$ als auch $(w, \vartheta + \varepsilon')$ bleiben innerhalb (1). Da $U$ stetig in den Variabeln $r, \varphi$ ist, so hat man für ein hinreichend kleines $\delta$

$$U(w', \vartheta - \varepsilon') < 0, \quad U(w', \vartheta + \varepsilon') > 0,$$

solange $w - \delta < w' < w + \delta$ bleibt. Daher befindet sich auf dem Kreise $r = w'$ in (1) eine Nullstelle von $U$, deren Argument zwischen $\vartheta - \varepsilon'$ und $\vartheta + \varepsilon'$ liegt, für die also $|\vartheta(w') - \vartheta| < \varepsilon$ ist.

Und genau analog schliesst man für die übrigen Intervalle (3), (5), ..., sowie für die Kurve $T = 0$.

3. Wurzeln von $U = 0$ für feste $x$. Um den Verlauf von $U = 0$ innerhalb des Kreises $(R)$ zu studieren, benutzen wir kartesische Koordinaten $x, y$, behalten aber die Funktionalbezeichnung $U$ bei. Enthält $U$ mehrfache Faktoren, so dividiere man sie sukzessive aus $U$ heraus, bis man zu einem Polynom $U^{(1)}$ ohne mehrfache Faktoren gelangt, für das die Kurve $U^{(1)} = 0$ aus den gleichen Punkten besteht wie $U = 0$. Sonst sei $U^{(1)} = U$. Enthält sodann $U^{(1)}$ Faktoren von der Form $x - x'$, so dividieren wir sie aus $U^{(1)}$ heraus und erhalten dadurch $U^{(0)}$. Andernfalls sei $U^{(0)} = U^{(1)}$. Die Gleichung $U^{(0)} = 0$ hat für kein $x$ mehr als $n$ Wurzeln in $y$. Wir notieren nun alle Werte von $x$, falls es solche gibt, für die zugleich $U^{(0)}$ und

$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial y}$, oder $U^{(0)}$ und $\frac{\partial U^{(0)}}{\partial x}$ verschwinden kann. Gäbe es deren unendlich viele, so müsste $U^{(0)}$ mehrfache Faktoren besitzen[2]). Ferner notieren wir die Werte von $x$, für die $U^{(0)} = 0$ den Kreis $(R)$ schneidet, sowie die Werte $x'$, für die $U^{(1)}$ durch $x - x'$ teilbar ist.

Sind die so notierten Werte $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, so legen wir die Schar der Parallelen $x = x_1$, $x = x_2$, ..., durch die das Innere des Kreises in endlich viele Streifen eingeteilt wird. Wir betrachten das Innere eines solchen Streifens, etwa zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Es habe nun $U^{(0)}(x, y)$ für irgend ein $\bar{x}$ mit $x_1 < \bar{x} < x_2$ genau $m$ Nullstellen $\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_m$. Dann hat $U$, behaupten wir, für *jedes* solche $x$ mit $x_1 < x < x_2$ genau $m$ Nullstellen. Zum Beweise bemerken wir vor allem, dass $U^{(0)}$ auf der Geraden $x = \bar{x}$ beim Durchgang durch eine Nullstelle $\eta$ das Vorzeichen ändert, da auf dieser Geraden $\frac{\partial U^{(0)}}{\partial y} \neq 0$ ist.

Zuerst zeigen wir nun, dass jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta$ entspricht, dass es für jedes $x$ zwischen $\bar{x} - \delta$ und $\bar{x} + \delta$ $m$ Nullstellen von $U$ gibt, die bezw. innerhalb der mit dem Halbmesser $2\varepsilon$ um $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ beschriebenen Kreise liegen. Es sei für ein hinreichend kleines $\bar{\delta} < \varepsilon$ etwa

$$U^{(0)}(\bar{x}, \eta_1 - \bar{\delta}) < 0, \quad U^{(0)}(\bar{x}, \eta_1 + \bar{\delta}) > 0,$$
$$U^{(0)}(\bar{x}, \eta_2 - \bar{\delta}) > 0, \quad U^{(0)}(\bar{x}, \eta_2 + \bar{\delta}) < 0$$

usw. Da $U^{(0)}$ stetig in $x$ ist, gibt es ein solches $\delta < \varepsilon$ (für das überdies $x_1 < \bar{x} - \delta < \bar{x} + \delta < x_2$ bleibt), dass

$$U^{(0)}(x, \eta_1 - \bar{\delta}) < 0, \quad U^{(0)}(x, \eta_1 + \bar{\delta}) > 0,$$
$$U^{(0)}(x, \eta_2 - \bar{\delta}) > 0, \quad U^{(0)}(x, \eta_2 + \bar{\delta}) < 0$$

usw. für $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$ ist. Dann liegt für jedes solche $x$ wenigstens eine Nullstelle von $U^{(0)}$ zwischen $\eta_1 - \bar{\delta}$ und $\eta_1 + \bar{\delta}$, ihre Entfernung von $(\bar{x}, \eta_1)$ ist also $< \delta + \bar{\delta} < 2\varepsilon$, und das Analoge gilt auch für $\eta_2, \eta_3, \ldots \eta_m$.

Es seien $t'$ und $t''$ $(t' < t'')$ die Ordinaten der Punkte, in denen die Gerade $x = \bar{x}$ den Kreis $(R)$ schneidet. Da $\frac{\partial U^{(0)}}{\partial y}$ in $\eta_1, \ldots, \eta_m$ von 0 verschieden ist, so kann man $\varepsilon$ wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial U^{(0)}}{\partial y}$ so klein gewählt denken,

2) Es ist übrigens leicht zu zeigen, dass $U$ keine mehrfachen Faktoren haben kann. Denn entfernt man einen solchen Faktor, so wird der Grad von $U$ verkleinert, und $U$ kann dann nicht auf jedem Kreise von hinreichend grossem Halbmesser $2n$ verschiedene Nullpunkte haben.

dass $\frac{\partial U^{(0)}}{\partial y}$ in jedem der obigen um $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ beschriebenen Kreise $\neq 0$ bleibt. Dann kann nach dem ROLLEschen Satze in jedem dieser Kreise für jedes $x$ zwischen $\bar{x}-\delta$ und $\bar{x}+\delta$ nur eine Nullstelle von $U^{(0)}$ liegen. Es sei $2M$ die untere Grenze von $U^{(0)}$ in den auf der Geraden $x = \bar{x}$ gelegenen Intervallen

$$t' \leqq y \leqq \eta_1 - \varepsilon, \quad \eta_1 + \varepsilon \leqq y \leqq \eta_2 - \varepsilon, \quad \ldots, \quad \eta_m + \varepsilon \leqq y \leqq t''.$$

Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von $U^{(0)}$ als Funktion der Variabeln $x$ und des Parameters $y$ kann man $\delta$ so klein wählen, dass die Änderung von $U^{(0)}$, wenn $x$ sich zwischen $\bar{x}-\delta$ und $\bar{x}+\delta$ bewegt, $y$ aber in den obigen Intervallen bleibt, nicht grösser als $M$ ist, und $U^{(0)}$ selbst daher von 0 verschieden bleibt.

Es sei ferner $\varepsilon$ so klein, dass in den Kreisen um $(\bar{x}, t')$, $(\bar{x}, t'')$ mit dem Halbmesser $\varepsilon$ keine Nullstellen von $U^{(0)}$ liegen. Wählen wir dann $\delta$ so klein, dass die Schnittpunkte der Geraden $x = \bar{x}+\delta$ und $x = \bar{x}-\delta$ mit dem Kreise $(R)$ von den entsprechenden Punkten $(\bar{x}, t')$, $(\bar{x}, t'')$ um weniger als $\varepsilon$ entfernt sind, so sind wir sicher, dass für kein $x$ zwischen $\bar{x}-\delta$ und $\bar{x}+\delta$ die Funktion $U^{(0)}$ Nullstellen ausserhalb der um $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ mit dem Halbmesser $\varepsilon$ beschriebenen Kreise besitzt, d. h., dass $U^{(0)}$ für diese $x$ genau $m$ Wurzeln hat, die in beliebige Nähe bezw. von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ gebracht werden können, wenn man $\delta$ hinreichend klein wählt. Gibt es nun zwischen $x_1$ und $x_2$ solche $x$, für die die Anzahl der Wurzeln der Funktion $U^{(0)}$ von $m$ verschieden ist, und gibt es solche $x$ insbesondere auch zwischen $x_1$ und $\bar{x}$, so sei $\bar{\bar{x}}$ die obere Grenze aller der letzten Bedingung genügenden $x$. Ist die Anzahl der Wurzeln von $U^{(0)}$ für $\bar{\bar{x}}$ gleich $m_1$, so gilt nach dem oben Bewiesenen dasselbe auch in einer gewissen Umgebung von $\bar{\bar{x}}$ nach rechts. Da aber $\bar{\bar{x}}$ die obere Grenze aller $x$ zwischen $x_1$ und $\bar{x}$ ist, für die die Anzahl der Wurzeln von $m$ verschieden ist, so muss $m_1 = m$ sein. Dann ist aber nach dem oben Bewiesenen auch in einer gewissen Umgebung von $\bar{\bar{x}}$ nach links die Anzahl der Wurzeln von $U^{(0)}$ gleich $m$, und dies widerspricht der Annahme, dass $\bar{\bar{x}}$ die obere Grenze der $x$ ist, denen eine von $m$ verschiedene Anzahl der Wurzeln von $U^{(0)}$ entspricht. Folglich gibt es keine solchen $x$ zwischen $x_1$ und $\bar{x}$. Und ebenso beweist man, dass es keine solchen $x$ zwischen $\bar{x}$ und $x_2$ gibt. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

4. **Zusammenfassung der Punkte von $U = 0$ innerhalb $(R)$ zu Elementarbogen.** Für ein $x$ mit $x_1 < x < x_2$ bezeichnen wir die innerhalb $(R)$ liegende Wurzel von $U^{(0)}$ mit der kleinsten Ordinate durch $W_1(x)$, diejenige mit der zweitkleinsten Ordinate durch $W_2(x)$ usw. So erhalten wir $m$ eindeutige Funktionen $W_1(x)$, $W_2(x)$, ..., $W_m(x)$, von denen nun aber sofort folgt, dass sie für $x_1 < x < x_2$ stetig sind. Um dies etwa für $W_i(x)$ zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, dass für jedes $\bar{x}$ zwischen $x_1$ und $x_2$ sich jedem hinreichend klein vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta$ zuordnen lässt, dass die der Grösse nach $i$-te Wurzel von $U^{(0)}$ innerhalb $(R)$, die $x$ entspricht, sich von $W_i(\bar{x})$ um weniger als $\varepsilon$ unterscheidet, solange $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$ bleibt. Dies haben wir aber in Nr. 3 nachgewiesen. Jetzt folgt weiter aus dem bekannten Satz der Differentialrechnung, dass $W_i(x)$ differenzierbar und dass

$$\frac{\partial W_i(x)}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial U^{(0)}}{\partial x}}{\frac{\partial U^{(0)}}{\partial y}}$$

ist, also zwischen $x_1$ und $x_2$ dasselbe Vorzeichen behält. Folglich sind die $W_i$ monoton. Nähert sich $x$ etwa dem Werte $x_1$, so strebt $W_i(x)$ einem ganz bestimmten Grenzwerte zu, da ja $|W_i(x)| \leqq R$ gilt. —

Genau die gleichen Überlegungen gelten auch für jedes der Intervalle $(x_2, x_3), \ldots (x_{k-1}, x_k)$ und ebenso auch für die beiden Kreissegmente, die ev. nach links von $x_1$, bezw. nach rechts von $x_k$ liegen. Damit ist die ganze Kurve $U^{(0)} = 0$ innerhalb von $(R)$ in eine endliche Anzahl regulärer Kurvenbogen zerlegt (wir werden sie gelegentlich als Elementarbogen bezeichnen), zu denen noch isolierte Punkte auf den Geraden $x = x_1$, $x = x_2$, ... in endlicher Anzahl (höchstens $n$ auf jeder) hinzukommen können. (Man kann zwar zeigen, dass solche isolierte Punkte nicht vorkommen, doch dies ist für uns unwesentlich.) — Unser Resultat gilt in dieser Formulierung auch für $U = 0$ (sowie für $U^{(1)} = 0$), da die eventuell hinzukommenden Geraden $x = x'$ durch ihre Schnittpunkte mit den $W_i$-Kurven in je endlich viele Elementarbogen zerlegt werden. —

Innerhalb des von den Parallelen $x = x_1$, $x = x_2$ und den Elementarbogen $y = W_i(x)$, $y = W_{i+1}(x)$ begrenzten Bereiches (in einigen Fällen muss einer oder beide Bogen durch die Bogen des Kreises $(R)$ ersetzt werden) hat $U^{(0)}$

stets dasselbe Vorzeichen, und dieses Vorzeichen wechselt längs eines Bogens $y = W_i(x)$, da auf ihm $\frac{\partial U^{(0)}}{\partial x} \neq 0$ ist.

Daraus folgt ferner, dass auch $U^{(1)}$ sein Vorzeichen längs der Elementarbogen wechselt, in die die Kurve $U = 0$ innerhalb $(R)$ zerfällt.

Es sei nun $(x_1, w)$ ein Punkt auf der Geraden $x = x_1$, der nicht auf dem Kreise $(R)$ liegt und in dem von links und von rechts mehrere Elementarbogen zusammenkommen, etwa

$$y = W_i(x), \ldots, y = W_{i+k}(x)$$

von rechts und

$$y = \overline{W}_{i'}(x),\; y = \overline{W}_{i'+1}(x),\; \ldots,\; y = \overline{W}_{i'+k'}(x)$$

von links. Wir grenzen auf $x = x_1$ um $(x_1, w)$ zwei Intervalle $J_+(w + \varepsilon > y > w)$ und $J_-(w - \varepsilon < y < w)$ ab, in denen keine weitere Wurzel von $U$ liegt. Dann grenzt längst $J_+$ das Gebiet zwischen $y = W_{i+k}(x)$ und $y = W_{i+k+1}(x)$ an das Gebiet zwischen $y = \overline{W}_{i'+k'}(x)$ und $y = \overline{W}_{i'+k'+1}(x)$, und das Vorzeichen von $U^{(0)}$ ist in den beiden Gebieten dasselbe, wie in $J_+$. Diese beiden Gebiete bilden daher ein Gebiet konstanten Vorzeichens von $U^{(0)}$. Dasselbe gilt auch für die Gebiete, die längst $J_-$ aneinander grenzen. Da daher $U^{(0)}$ in den an den Punkt $(x_1, w)$ anstossenden Gebieten abwechselndes Vorzeichen hat, so ist die Anzahl dieser Gebiete gerade. Daher ist auch die Anzahl der in diesem Punkt zusammenkommenden Bogen gerade. Und diese Anzahl bleibt auch dann gerade, wenn man nachträglich die durch $(x_1, w)$ gehende Gerade $x = x_1$ hinzufügen muss, d. h. für $U = 0$. Was aber die auf dem Kreise $(R)$ liegenden Punkte von $U^{(1)} = 0$ betrifft, so können wir annehmen, dass sich in ihnen an jeden ausserhalb des Kreises verlaufenden Zweig von $U = 0$ genau ein Elementarbogen anschliesst. Denn dies ist nach dem eingangs über diese Zweige Bewiesenen stets zu erreichen, indem man $R$ etwas grösser annimmt.

5. Existenzbeweis für Schnittpunkte von $U = 0$ und $T = 0$. Um nun die Existenz von Schnittpunkten von $U = 0$ und $T = 0$ zu beweisen, definieren wir auf jedem Elementarbogen von $U = 0$ eine Fortschreitungsrichtung durch die Festsetzung, dass beim Fortschreiten längs eines solchen Bogens das Gebiet mit $U^{(1)} > 0$ zur rechten Hand bleiben soll. — Dies ist möglich, da ja jeder Elementarbogen von $U = 0$ ein Gebiet mit $U^{(1)} > 0$

von einem Gebiet mit $U^{(1)} < 0$ trennt. Gelangen wir aber so zu einem Punkte, in dem mehrere Elementarbogen zusammentreffen, so sei festgesetzt, dass wir von jedem Elementarbogen auf den nächsten von rechts hinübergehen. Dabei hat man stets ein Gebiet mit $U^{(1)} > 0$ zur rechten Hand. Treten wir nun in irgend einem Intervall $(4k+1)$ längs der Kurve $U=0$ in den Kreis $(R)$ ein, so werden wir nach unserer Festsetzung des Fortschreitungssinnes keinen Elementarbogen zweimal durchlaufen können und werden daher in irgend einem Intervall $(4k+3)$ aus dem Kreise austreten. Wir erhalten daher im ganzen $n$ sich ins Unendliche erstreckende Zweige der Kurve $U=0$, die in den Intervallen $(4k+1)$ in den Kreis eintreten und in den Intervallen $(4k+3)$ aus ihm austreten. Wir wollen einen Zweig, der im Intervalle $(4k+1)$ in den Kreis eintritt, durch $[k]$ bezeichnen. Nach unseren Festsetzungen über den Fortschreitungssinn können zwei von diesen Zweigen nie einen Elementarbogen gemeinsam haben, sondern höchstens einzelne Punkte. (Aber auch in solchen Punkten durchsetzen sich, wie aus unseren Festsetzungen folgt, solche Zweige nie, sondern stossen nur aneinander an.)

Durch das Vorhergehende ist es noch nicht ausgeschlossen, dass es Elementarbogen gibt, die keinem der sich ins Unendliche erstreckenden Zweige angehören, Wir werden bald zeigen, dass es solche Bogen nicht geben kann. Für unseren Zweck ist dies aber sogar unnötig. Denn in dem Punkte im Intervall $(4k+1)$, in dem ein Zweig $[k]$ in den Kreis eintritt, ist das Vorzeichen von $T$ positiv, im Austrittspunkte in einem Intervalle $(4k'+3)$ aber negativ. Daher verschwindet $T$ auf dem Zweige $[k]$ von $U=0$ in wenigstens einem Punkte, und damit ist gezeigt, dass auf jedem der $n$ Zweige $[k]$ wenigstens eine Wurzel von $f(z)=0$ liegt. Es ist sogar die Existenz von $n$ Wurzeln von $f(z)$ nachgewiesen, allerdings unter der Annahme, dass die $n$ Zweige $[k]$ keinen Punkt gemeinsam haben. Um auch für den Fall, dass gewisse Zweige $[k]$ aneinander stossen, die Existenz von genau $n$ Wurzeln von $f(z)$ nachzuweisen, hat man nur zu zeigen, dass, wenn in einem Punkte, in dem $l$ Zweige von $U=0$ aneinander stossen, wenigstens eine Wurzel von $f(z)$ liegt, in ihm genau $l$ Wurzeln von $f(z)$ liegen. Doch wollen wir darauf nicht näher eingehen[3].

3) Vergl. Werke III, S. 83—84.

6. Weitere Eigenschaften der Kurve $U = 0$. Wir wollen noch der Vollständigkeit wegen zeigen, dass jeder Elementarbogen von $U = 0$ zu einem der Zweige $[k]$ gehört. Denn gehörte ein Elementarbogen $E$ keinem der $n$ Zweige $[k]$ an, so könnten wir eine solche reelle Konstante $j$ finden, dass $f(z) + j$ auf $E$ eine Nullstelle hätte, dagegen in keinem der Punkte, in denen die Zweige $[k]$ von $U = 0$ eventuell aneinander stossen, verschwände. Da die $U$-Kurve von $f(z) + j$ mit der von $f(z)$ übereinstimmt, so hätte $f(z) + j$ auf jedem der $n$ Zweige $[k]$ eine Wurzel, also im ganzen $n$ Wurzeln, ausserdem aber noch eine Wurzel auf $E$, also im ganzen wenigstens $n + 1$ Wurzeln, $f(z)$ ist aber vom Grade $n$.

Aus der damit bewiesenen Tatsache können wir in einfacher Weise eine weitere Tatsache folgern, die den Verlauf der Kurve $U = 0$ im Sinne der Analysis Situs charakterisiert. Es ist nämlich unmöglich, aus den Elementarbogen von $U = 0$ einen geschlossenen Zug zu bilden. Die Kurve $U = 0$ zerfällt also, topologisch gesprochen, in eine Anzahl von Bäumen, die miteinander keinen Punkt gemeinsam haben. Dies lässt sich sofort aus der Potentialeigenschaft von $U$ erschliessen, da eine reguläre Potentialfunktion, die auf der ganzen Berandung eines ganz im Endlichen liegenden abgeschlossenen Bereiches gleich 0 ist, in der ganzen Ebene verschwinden muss. Es lässt sich dies aber auch elementar wie folgt zeigen:

Wäre es möglich, aus den Elementarbogen von $U = 0$ einen geschlossenen Zug zu bilden, so könnte man, wie man leicht einsieht, auch einen solchen doppelpunktlosen geschlossenen Zug $E_1 E_2 \ldots E_s$ bilden, in dessen Innerem kein Elementarbogen von $U = 0$ verläuft. Wir wollen annehmen, dass beim Durchlaufen von $E_1 E_2 \ldots E_s$ dessen Inneres zur rechten Hand bleibt, was durch Umnumerieren der Bogen $E_1 \ldots E_s$ jedenfalls zu erreichen ist. Ist nun im Inneren von $E_1 \ldots E_s$ $U^{(1)} \geqq 0$, und schreiten wir längs eines Bogens $E_1$ gemäss dem früher festgesetzten Fortschreitungssinne fort, so werden wir nach diesen Festsetzungen stets auf dem Zuge $E_1 \ldots E_s$ bleiben, so dass $E_1$ keinem der $n$ Züge $[k]$ angehört. Dies widerspricht aber der oben bewiesenen Tatsache. — Ist aber im Innern von $E_1 \ldots E_s$ $U^{(1)} \leqq 0$, so ändern wir unsere Festsetzung des Fortschreitungssinnes in 5. dahin ab, dass beim Fortschreiten $U^{(1)}$ zur rechten Hand negativ sein soll. Dann bleibt unsere Überlegung mutatis mutandis in Kraft. —

Wir haben oben anstatt $U^{(1)} > 0$, $U^{(1)} < 0$ geschrieben $U^{(1)} \geqq 0$, $U^{(1)} \leqq 0$, um dem Vorkommen von isolierten Nullstellen von $U^{(1)}$ Rechnung zu tragen. Es ist aber leicht nach derselben Methode zu zeigen, dass es isolierte Nullstellen von $U$ nicht gibt. Denn wäre $(x_0, y_0)$ eine solche, so gäbe es eine reelle Konstante $j$ der Art, dass $f(z)+j$ in $(x_0, y_0)$ eine Wurzel hätte. Ändern wir die reelle Konstante $j$ beliebig wenig ab, so folgte aus der Stetigkeit der Wurzeln als Funktionen der Koeffizienten, dass die Nullstelle $(x_0, y_0)$ in eine andere übergeht, die von $(x_0, y_0)$ beliebig wenig entfernt bliebe. Daher müsste $U$ in beliebiger Nähe von $(x_0, y_0)$ Nullstellen haben, so dass $(x_0, y_0)$ nicht isoliert sein kann.

---

## Berichtigungen zu der Abh. 3 (Gauss' Werke Bd. X, 2).

Seite 6, Zeile 8 v. u. ist nach Veränderlichen einzufügen: »keinen von nur einer Veränderlichen abhängigen Faktor und«

» 11, Zeile 4 v. u. ist nach $x - x'$ einzufügen: »oder $y - y'$«

» 14, Zeile 6 v. u. ist nach $x = x'$ einzufügen: »und $y = y'$«

» 15, Zeile 12 v. u. ist nach $x = x_1$ einzufügen: »oder $y = w$«

Göttingen, Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).