

Werk

Titel: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts

Autor: Cantor, Georg; Dedekind, Richard

Verlag: Springer

Ort: Berlin

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN237853094

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN237853094>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=237853094>

LOG Id: LOG_0060

LOG Titel: 4. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

4. Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten.

[Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik Bd. 91, S. 81—125 (1887); Bd. 92, S. 240—265 (1888);
Gesammelte Abhandlungen zur Lehre vom Transfiniten 2. Teil.]

[Anmerkungen hierzu vgl. S. 439.]

In dem vorhergehenden Aufsätze habe ich, veranlaßt durch gewisse, gegen die Möglichkeit der unendlichen Zahlen geschriebene ältere und neuere Arbeiten, den Versuch gemacht, die sich an das aktuelle Unendliche knüpfenden Fragen nach ihren obersten Scheidungen, von dem allgemeinsten Gesichtspunkte aus abzugrenzen, um auf diese Weise eine Übersicht der hauptsächlichsten Positionen zu gewinnen, welche in bezug auf diesen Gegenstand eingenommen werden können. Es wurde das A.-U. nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, *in Deo* realisiert ist, wo ich es *Absolut-unendliches* oder kurzweg *Absolutes* nenne; *zweitens* sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; *drittens* sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken *in abstracto* aufgefaßt werden kann. In den *beiden* letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und *insofern dem Endlichen verwandtes* A.-U. sich darstellt, nenne ich es *Transfinitum* und setze es dem *Absoluten* strengstens entgegen.

In jeder von den drei Beziehungen kann die Möglichkeit des aktualen Unendlichen bejaht oder verneint werden; daraus folgen im ganzen *acht* verschiedene Standpunkte, die sämtlich in der Philosophie vertreten sind und von welchen ich denjenigen einnehme, der *unbedingt affirmativ* ist, *in bezug auf alle drei Rücksichten*.

Liegt es besonders der *spekulativen Theologie* ob, dem *Absolutunendlichen* nachzuforschen und dasjenige zu bestimmen, was menschlicherseits von ihm gesagt werden kann, so fallen andererseits die auf das *Transfinitum* hingerichteten Fragen hauptsächlich in die Gebiete der *Metaphysik* und der *Mathematik*; sie sind es vorzugsweise, mit denen ich mich seit Jahren beschäftige.

Da ich das Glück hatte, darüber mit mehreren Gelehrten, welche meinen Arbeiten ein freundliches Interesse gewidmet, zu korrespondieren und mir hierbei Gelegenheit geworden ist, das bisher Veröffentlichte in gemeinverständlicher Weise zu erläutern und aufzuklären, so meine ich in diesem, aus lebendigem Gedankenaustausch hervorgegangenen Material geeignete Anknüpfungspunkte für weitere, ein größeres Publikum interessierende Ausführungen zu besitzen. Ich möchte daher zunächst im folgenden mehrere dieser

von mir geschriebenen Briefe veröffentlichen, ohne wesentliche Änderungen an ihnen vorzunehmen. Wo es jedoch mir nötig erscheinen wird, will ich in Noten unter dem Text Erklärungen dazu geben.

Zu den Briefen I, III, IV und VIII möchte ich folgendes als Einleitung vorausschicken.

Ad I und VIII. Hier findet sich die von mir seit etwa vier Jahren vertretene und in meinen Vorlesungen vielfach ausgebildete Auffassungsweise der *ganzen Zahlen* und *Ordnungstypen* als *Universalien*, die sich auf *Mengen* beziehen und aus ihnen sich ergeben, wenn von der *Beschaffenheit der Elemente abstrahiert* wird. Jede Menge wohlunterschiedener Dinge kann *als ein einheitliches Ding für sich* angesehen werden, in welchem jene Dinge Bestandteile oder konstitutive Elemente sind. Abstrahiert man *sowohl* von der Beschaffenheit der Elemente, *wie auch* von der Ordnung ihres Gegebenseins, so erhält man die *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* der Menge, einen Allgemeinbegriff, in welchem die Elemente, als sogenannte Einsen, gewissermaßen organisch ineinander derartig zu einem einheitlichen Ganzen verwachsen sind, daß keine vor den anderen ein bevorzugtes Rangverhältnis hat. Daraus ergibt sich bei eingehender Erwägung, daß zweien verschiedenen Mengen dann und nur dann eine und dieselbe Kardinalzahl zukommt, wenn sie das zueinander sind, was ich *äquivalent* nenne, und *es liegt kein Widerspruch* vor, wenn, wie dies bei *unendlichen* Mengen häufig eintritt, zwei Mengen, von denen die eine ein *Teil* oder *Bestandteil* der andern ist, *völlig gleiche* Kardinalzahl haben. In dem *Verkennen dieser Tatsache* sehe ich das Haupt Hindernis, welches der Einführung unendlicher Zahlen von alters her entgegengebracht worden ist.

Wird jener Abstraktionsakt an einer gegebenen, nach einer oder mehreren Beziehungen (Dimensionen) geordneten Menge nur in bezug auf die *Beschaffenheit* der Elemente vorgenommen, so daß die *Rangordnung*, in welcher sie zueinander stehen, auch im Allgemeinbegriff beibehalten bleibt, der auf solche Weise gewissermaßen eine, aus verschiedenen Einsen, welche eine bestimmte Rangordnung, nach einer oder nach mehreren Richtungen, untereinander bewahren, hervorgehende einheitliche organische Bildung wird, so hat man damit ein solches *universale*, welches von mir im allgemeinen *Ordnungstypus* oder *Idealzahl*, in dem besonderen Falle wohlgeordneter Mengen aber *Ordnungszahl* genannt wird¹; letztere stimmt überein mit dem, was ich früher (Grundl. e. allg. Mannigfaltigkeitslehre) [III 4, S. 168] „Anzahl einer wohlgeordneten Menge“ genannt habe. Zwei geordneten Mengen kommt dann und nur dann *ein und derselbe Ordnungstypus* zu, wenn sie zueinander im Verhältnis der *Ähnlichkeit* oder *Konformität* stehen, welches Verhältnis genau definiert werden wird.

¹ Vgl. Gutberlet: Das Problem des Unendlichen. Z. Philos. u. philos. Krit. 88, 183.

Hier sind die *Wurzeln* aufgedeckt, aus welchen sich der *Organismus* der transfiniten *Typentheorie* oder Theorie der *Idealzahlen* und im besondern der transfiniten *Ordnungszahlen* mit logischer Notwendigkeit herausentwickelt und den ich, in systematischer Gestalt, bald hoffe publizieren zu können.

In einer Rezension, die ich für die „Deutsche Literaturzeitung“ [hier IV 5, S. 440] zu liefern hatte, habe ich die Bestimmungen über *Kardinal- und Ordnungszahl* wie folgt formuliert: „Ich nenne Mächtigkeit eines Inbegriffs oder einer Menge von Elementen (wobei letztere gleich- oder ungleichartig, einfach oder zusammengesetzt sein können) denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle Mengen, welche der gegebenen Menge äquivalent sind, und nur diese fallen. Zwei Mengen werden hierbei äquivalent genannt, wenn sie sich gegenseitig eindeutig, Element für Element, einander zuordnen lassen. Ein anderes ist, was ich ‚Anzahl oder Ordnungszahl‘ nenne; ich schreibe sie nur ‚wohlgeordneten Mengen‘ zu, und zwar verstehe ich unter der ‚Anzahl oder Ordnungszahl einer gegebenen wohlgeordneten Menge‘ denjenigen Allgemeinbegriff, unter welchen alle wohlgeordneten Mengen, welche der gegebenen ähnlich sind, und nur diese fallen. ‚Ähnlich‘ nenne ich zwei wohlgeordnete Mengen, wenn sie sich gegenseitig eindeutig und vollständig, unter Wahrung der gegebenen Elementenfolge auf beiden Seiten, aufeinander abbilden lassen. Bei *endlichen* Mengen fallen die beiden Momente ‚Mächtigkeit‘ und ‚Anzahl‘ gewissermaßen zusammen, weil eine endliche Menge in jeder Anordnung ihrer Elemente als ‚wohlgeordnete‘ Menge eine und dieselbe Ordnungszahl hat; dagegen tritt bei unendlichen Mengen der Unterschied von ‚Mächtigkeit‘ und ‚Ordnungszahl‘ aufs stärkste zutage, wie dies in meinem Schriftchen ‚Grundl. e. allgem. Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883‘ gezeigt worden ist.“

Die Kardinalzahlen sowohl, wie die Ordnungstypen sind *einfache* Begriffsbildungen; jede von ihnen ist eine *wahre Einheit* ($\mu\omega\acute{\alpha}\varsigma$), weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von *Einsen einheitlich* verbunden ist.

Die Elemente der uns gegenüberstehenden Menge M sind getrennt vorzustellen; in dem intellektualen Abbilde \bar{M} derselben (siehe Abschn. VIII, Nr. 9 dieses Aufsatzes [S. 420]), welches ich ihren Ordnungstypus nenne, sind dagegen die Einsen zu einem Organismus vereinigt. In gewissem Sinne läßt sich jeder Ordnungstypus als ein Kompositum aus *Materie* und *Form* ansehen; die darin enthaltenen, begrifflich unterschiedenen Einsen liefern die *Materie*, während die unter diesen bestehende Ordnung das der *Form* entsprechende ist.

Sehen wir uns die Definition bei Euklides für die endliche Kardinalzahl an, so muß zunächst *anerkannt* werden, daß er die Zahl, ebenso wie wir es tun, *ihrem wahren Ursprung gemäß*, auf die *Menge* bezieht und aus der Zahl nicht etwa ein bloßes „Zeichen“ macht, das *Einzeldingen* beim subjektiven Zählprozeß beigelegt wird. Es heißt in seinen Elementen, lib. VII:

Μονάς ἐστίν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἐν λέγεται und: Ἄριθμός δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Dann scheint es mir aber, daß er die *Einsen* in der Zahl ebenso getrennt wähnt, wie die Elemente in der diskreten Menge, auf welche sie sich bezieht. Wenigstens fehlt in der Euklidischen Definition der ausdrückliche Hinweis auf den *einheitlichen Charakter* der Zahl, welcher ihr *durchaus wesentlich* ist¹.

Es ist nicht überflüssig, wenn ich hervorhebe, daß der Begriff der Ordnungszahl, wie er vorhin bestimmt worden ist, in dem Falle *endlicher* Ordnungszahlen durchaus nicht zusammenfällt mit dem, was man gewöhnlich „Ordinalzahlwörter“ (erstes, zweites etc.) nennt; diese sind nichts als *Bezeichnungen* für den Ordnungsrang der Elemente einer wohlgeordneten Menge und ergeben sich *ohne weiteres* durch Anknüpfung an *unsere Ordnungszahlen*, indem das *letzte* Element einer endlichen wohlgeordneten Menge als das *n* te in der vorliegenden Reihenfolge bezeichnet wird, wenn *n* die derselben wohlgeordneten Menge zukommende Ordnungszahl vorstellt.

¹ Dem hier hervorgehobenen Bedürfnis, den organischen innerlich-einheitlichen Charakter der Zahl betont zu sehen, scheint Nikomachus mehr entgegenzukommen, wenn es bei ihm (Arith. intr. I, 7, 1) heißt: Ἄριθμός ἐστὶ πλῆθος ὠρισμένον ἢ μονάδων σύστημα ἢ ποσότητος χάμα (von *χέω*, gießen) ἐκ μονάδων συγκείμενον. Und Boetius, inst. arithm. I, 3 sagt: „numerus est unitatum collectio, vel quantitatis acervus ex unitatibus profusus.“ Leibniz drückt sich im Jahre 1666 in der Schrift: *Dissertatio de arte combinatoria*, im Prooemium, als er in seinem Entwicklungsgange der Philosophie der Vorzeit noch näher stand, über den Zahlbegriff wie folgt aus: „Omnis *relatio* aut est *unio* aut *convenientia*. In unione autem res, inter quas haec relatio est, dicuntur *partes*, sumtae cum unione, *totum*. Hoc contingit quoties plura simul tanquam *unum* supponimus. *Unum* autem esse intelligitur quicquid *uno actu intellectus*, s. simul, cogitamus, v. g. quemadmodum numerum aliquem quantumlibet magnum, saepe caeca quadam cogitatione simul aprehendimus, cyphras nempe in charta legendo, cui explicata intuendo ne Methusalae quidem aetas suffectura sit. Abstractum autem ab uno est unitas, *ipsumque totum abstractum ex unitatibus, seu totalitas dicitur numerus*.“ Schon nach drei Jahren findet sich von demselben Autor in einem Brief an Thomasius (Edit. Erdmann p. 53) die *bedenkliche* Erklärung: „numerus definitio unum, et unum, et unum etc., seu unitates.“ Die Addition von Einsen kann aber niemals zur Definition einer Zahl dienen, weil hier die Angabe der Hauptsache, nämlich *wie oft* die Einsen addiert werden sollen, nicht ohne die zu definierende Zahl selbst erfolgen kann. Dies beweist, daß die Zahl, durch einen einzigen Abstraktionsakt gewonnen, nur als organische Einheit von Einsen zu erklären ist. Daraus folgt ferner, wie grundfalsch es ist, den Zahlbegriff vom Zeitbegriff oder der sog. *Zeitanschauung* abhängig machen zu wollen. Es ist dies in der neueren Philosophie seit ihrer Fortbildung durch Kant vielfach geschehen; Sir William Rowan Hamilton hat beispielsweise die Arithmetik als „The science of pure time“ erklärt, und viele andere tun dasselbe. Sie könnten *mit genau demselben Rechte jede andere Wissenschaft*, z. B. die Geometrie, als „the sc. of pure time“ ausgeben, weil wir bei der Bildung geometrischer oder sonstiger Begriffe *subjektiv* nicht weniger auf die „Zeit“ als die Existenzform des diesseitigen Lebens angewiesen sind wie bei der Aneignung der arithmetischen Begriffe.

Während so von meinem Standpunkte aus die „Ordinalzahlwörter“ als das *Letzte* und *Unwesentlichste* in der wissenschaftlichen Theorie der Zahlen sich ergeben, werden sie in zwei kürzlich publizierten Arbeiten zum Ausgangspunkt für die Entwicklung des Zahlbegriffs genommen. Es geschieht dies in den zwei Abhandlungen, welche Herr H. v. Helmholtz und Herr L. Kronecker in der Sammlung „Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktor-Jubiläum gewidmet. Leipzig, bei Fues, 1887“ haben drucken lassen¹. Sie vertreten den extremen empiristisch-psychologischen Standpunkt mit einer Härte, die man nicht für möglich halten würde, wenn sie nicht, in Fleisch und Blut zweimal verkörpert, hier entgegen träte. Es wäre irrtümlich, wollte man glauben, der Gegensatz dieser Auffassungen und der meinigen wäre etwa der von *Nominalismus* oder *Konzeptualismus* einerseits, zum maßvollen *aristotelischen Realismus* andererseits, den ich vertrete; vielmehr ist es *höchst instruktiv*, sich zu überzeugen, daß bei diesen beiden Forschern die Zahlen in erster Linie *Zeichen*, aber nicht etwa Zeichen für Begriffe, die sich auf Mengen beziehen, sondern *Zeichen für die beim subjektiven Zählprozeß gezählten Einzeldinge* sein sollen. Es versteht sich daher von selbst, daß, meinem Standpunkte gegenüber, der Gedankengang dieser Arbeiten als ein vollendetes *Hysteron-Proteron* sich darstellt.

In eben solchem Gegensatz stehen sie aber auch zu den die Zahlen betreffenden Auffassungen, welche wir im griechischen Altertum, nicht nur bei Philosophen, sondern auch bei Mathematikern finden. Die oben angeführte Definition des Euklides ist ein Beleg hierfür, und in bezug auf Platon und Aristoteles bedarf es kaum einer Hervorhebung.

Welche Stellung man nun aber auch zu den Alten einnehmen mag, so dürfte es jedermann von vornherein höchst unwahrscheinlich vorkommen, daß die besten unter ihnen sich bei den einfachsten, bestimmtesten und allgemein bekanntesten Dingen von der Wahrheit sehr weit entfernt haben sollten und daß erst im 19. Jahrhundert nach Chr. die richtige Erkenntnis über diesen Gegenstand eingetreten wäre. Und allerdings hat ja auch in der grauen Vorzeit eine *Sekte* bestanden, an welche man durch die Arbeiten der Herren v. Helmholtz und Kronecker lebhaft erinnert wird; es ist die *antike Skepsis*, und ich verweise dazu, was im besonderen die Zahlen angeht, auf des Sextus Empiricus Pyrrhioniarum Hypotyposeon, Lib. 3, cap. 18. Doch auch aus dem „Jahrhundert der Aufklärung“, welches auf den Geist der vornehmen und gelehrten Akademien einen so nachhaltigen, immer noch

¹ Beide Autoren nennen „Ordnungszahl“ das, was ich „Ordinalzahlwort“ nenne, während bei mir das Wort „Ordnungszahl“ eine andere Bedeutung hat. Ich würde meine „Ordnungszahl“ mit „*numerus ordinarius*“, dagegen das „Ordinalzahlwort“ mit „*nota ordinalis*“ übersetzen. Diese *notae ordinales* sind es, welche nach den beiden genannten Autoren das Wesen der Zahlen bestimmen sollen.

fortbestehenden Einfluß geübt hat, ist ein vorzüglich gearbeitetes Werk zu verzeichnen, welches sogar von einem Mitgliede der *Berliner Akademie der Wissenschaften* geschrieben worden ist:

Louis Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques (Génève aux dépens de l'Auteur 1778).

Das Titelblatt dieser zweibändigen Schrift zeigt einen Kupferstich; im Vordergrund ein Schäfer, der seine heimkehrende Herde mustert, im Hintergrund ein Jäger, dessen Pfeil den ausgedehnten Raum durchfliegt; dazu das Motto: Tu Pastor numeros, extensi tu rationes Pandito Venator.

Gleich das erste Kapitel fängt so an: „Dans les commencemens, les hommes furent chasseurs ou bergers. *Ces derniers eurent d'abord occasion de compter*: il leur importait de ne pas perdre leurs bestiaux; et pour cela il fallait s'assurer le soir si tous étaient revenus du pâturage: celui qui n'en aurait que quatre ou cinq, aurait pu voir d'un coup d'œil si tous étaient rentrés; *mais un coup d'œil n'aurait pas suffi à celui qui en aurait eu vingt*. Considérant donc ces bestiaux revenant *les uns après les autres*, il aurait imaginé *une suite de mots* en pareil nombre, *et gardant ces mots dans sa mémoire* il les aurait répétées le lendemain à mesure que ses bestiaux seraient rentrés; afin d'être sûr, s'ils eussent cessé d'entrer avant qu'il eût achevé ses mots, *qu'autant qu'il lui restait de mots à prononcer, autant il lui manquait des bestiaux* etc.“

Man sieht, es ist, mutatis mutandis, dasselbe Zahlenprinzip wie bei den Herren v. Helmholtz und Kronecker; es handelt sich also hier nicht um etwas Neues, sondern nur, wie so oft, wieder um „alte, verkannte Wahrheit“ (Ben Akiba).

Übrigens tritt auch bei beiden Gelehrten das *gegnerische Motiv* wider das aktuelle Unendliche offen zutage, und da anerkanntermaßen selbst die „*endlichen*“ Irrationalzahlen ohne *entschiedene* Heranziehung aktual-unendlicher Mengen wissenschaftlich-streng *nicht* zu begründen sind¹, so sind die Bestrebungen bei beiden, namentlich bei Herrn Kronecker mit unerbittlicher Folgerichtigkeit und Strenge darauf gerichtet, die seit Pythagoras und Platon allgemein anerkannten Irrationalzahlen mit Hilfe ihnen geeignet scheinender, künstlich ausgedachter Subsidiärtheorien durchaus „unnötig“ und überflüssig zu machen² — anstatt sie naturgemäß zu erforschen und zu erklären. So sehen wir die in Deutschland als Reaktion gegen den überspannten Kant-Fichte-Hegel-Schellingschen Idealismus eingetretene, jetzt herrschende und mächtige *akademisch-positivistische Skepsis* endlich auch bei der *Arithmetik* angelangt, wo sie, mit der äußersten, für sie

¹ Man vgl. meine „Grundlagen“ S. 21 [hier III 4, S. 183ff.] und den letzten Abschnitt meiner Abhandlung in Bih. till K. Sv. Vet.-Akad. Hdl. 11, Nr. 19.

² Man vgl. Kronecker: Crelles J. 99, 336, und Molks Abhandlung in Acta math. 6.

selbst vielleicht verhängnisvollsten Konsequenz, die letzten, ihr noch möglichen Folgerungen zu ziehen scheint. Denn was sollte ihr, nach Aufgebot *solchen* Scharfsinns und *solcher* Kräfte, zu ihrer Vollendung noch fehlen?

Eine eingehende Würdigung der beiden Arbeiten liegt nicht in meiner Absicht; es läßt sich annehmen, daß, entsprechend der Dignität ihrer Verfasser, auch *andere* sie berücksichtigen und prüfen werden. Nur wenige Bemerkungen mögen mir noch erlaubt sein.

Die Arbeit des Herrn Kronecker (Philos. Aufsätze, S. 263) beschränkt sich auf die Elemente der Zahlentheorie, steht aber in engem Zusammenhang mit seinen früheren algebraischen und zahlentheoretischen Untersuchungen und kann daher wohl auch nur in diesem Zusammenhang vollständig gewürdigt werden. Einige Andeutungen des Aufsatzes geben der Erwartung Raum, daß die Theorie später in extenso weitergeführt werden soll. Man wird erst dann ein abschließendes Urteil über sein System fällen können, wenn die Beziehung seiner Zahlen zu der Geometrie und Mechanik hergestellt erscheinen wird. Solange dies nicht der Fall ist, wird ein Zweifel an der Brauchbarkeit seiner Theorie jedermann erlaubt sein. Ich glaube sogar ohne jeden Zweifel vorhersagen zu können, daß es ihm nicht möglich sein wird, mit dem „ideellen Vorrat“ (S. 266) seiner „Bezeichnungen“ den *aktual unendlichen Punktvorrat* des räumlichen und zeitlichen Kontinuums „vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben“ (diese Ausdrucksweise bezieht sich auf G. Kirchhoff, Vorl. üb. math. Phys., 1. Vorl.; Kronecker, Crelles J., Bd. 92, S. 93), und zwar hängt diese meine Überzeugung damit zusammen, daß ich im Jahre 1873 den Satz bewiesen habe: die Mächtigkeit eines Kontinuums ist höher als die Mächtigkeit des Inbegriffs aller endlichen, ganzen Zahlen (vgl. Crelles J., Bd. 77, S. 258ff.) [hier III 1, S. 115].

In der Einleitung des Kroneckerschen Aufsatzes (Phil. Aufs. S. 264) kommt ein kleines parodiertes Gedicht von Schiller (Archimedes und der Jüngling) zum Abdruck, welches der „ewigen Zahl“ gewidmet ist. Wenn, wie hier und in der v. Helmholtzschen Arbeit, die ursprüngliche Bedeutung der Zahlen auf bloße „Zahlzeichen“ herabgedrückt werden soll, so will mir ihr Zusammenhang mit der „Ewigkeit“ nicht recht einleuchten, weil ich bei diesem Worte stets die unübertroffene Definition des Boetius (De consolatione philosophiae, lib. 5, prosa 6) im Sinne habe.

Zum Schluß hebe ich hervor, daß mir der Beweis des Hauptsatzes (S. 268) in dem Kroneckerschen Gedankengange nicht stringent zu sein scheint; es soll dort gezeigt werden, daß die „Anzahl“ von der beim Zählen befolgten Ordnung unabhängig ist. Wenn man den Beweis genau verfolgt, so findet sich, daß darin in anderer Form derselbe Satz vorausgesetzt und gebraucht wird, welcher bewiesen werden soll; es liegt also das Versehen einer *petitio principii* vor.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich mir erlauben, ein andres Versehen zu berichtigen, welches Herr Kronecker gegenüber meinem verewigten Freunde und Kollegen Eduard Heine begangen hat. Letzterer wird in Crelles J., Bd. 99, S. 336, Jahrg. 1886 hauptsächlich verantwortlich gemacht für die von ihm in der Abhandlung „Elemente der Funktionentheorie“, Crelles J., Bd. 74, Jahrg. 1872, auf Grund des Begriffs der „Fundamentalreihe“ (welchen Herr Heine „Zahlenreihe“ nennt) entwickelte Theorie der Irrationalzahlen, obgleich Herr Heine in der Einleitung seiner Arbeit ausdrücklich gesagt hat, daß er den Grundgedanken von mir „entlehnt“ habe, und daß er mir für „mündliche Mitteilungen verpflichtet“ sei, welche einen „bedeutenden Einfluß“ auf die Gestaltung seiner Arbeit ausgeübt hätten. Gleichzeitig erschien von mir in Bd. 5 der „Mathematischen Annalen“, [hier II 5, S. 92] in demselben Jahre 1872 eine Arbeit unter dem Titel: „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“, darin ich die wesentlichen Punkte meiner Theorie der Irrationalzahlen kurz entwickelt habe; auch bin ich später noch einmal in den „Grundlagen“, S. 23 [hier IV 4, S. 183ff.] auf diesen Gegenstand zurückgekommen. Ich muß also die Verantwortung für die, von Herrn Kronecker so schwer angegriffene Theorie *für mich* in Anspruch nehmen, indem ich den seligen Herrn Heine von der vermeintlichen, seitens des Herrn Kronecker ihm zugeschriebenen Hauptschuld hiermit entlaste.

Ad III und IV. Von *theologischer* Seite ist mir eingewendet worden, daß dasjenige, was ich Transfinitum in natura naturata nannte, (Vgl. diese Ztschr. Bd. 88, S. 227 [S. 372]) „sich nicht verteidigen ließe und in einem gewissen Sinne“, den ich jedoch dem Begriffe „nicht zu geben schiene“, „den Irrtum des Pantheismus enthalten würde.“ Auf dieses Bedenken antwortete ich mit dem Briefe III, auf welchen hin ich die Gunst eines ausführlichen an mich gerichteten Schreibens erfuhr, welches ich mir erlaube hier wörtlich, unter Weglassung einiger Epitheta höflich-verbindlichen Charakters, abzdrukken.

Es wurde mir auf den Brief III folgendes geantwortet:

„Aus Ihrem Aufsätze „Zum Problem des Aktual-Unendlichen“ ersehe ich zu meiner Genugtuung, wie Sie das Absolut Unendliche und das, was Sie das *Aktual-Unendliche* im Geschaffenen nennen, sehr wohl unterscheiden. Da Sie das letztere für ein „*noch Vermehrbares*“ (natürlich in indefinitum, d. h. ohne je ein nicht mehr Vermehrbares werden zu können) ausdrücklich erklären und dem Absoluten als „wesentlich Unvermehrbares“ entgegenstellen, was selbstverständlich ebenso von der Möglichkeit und Unmöglichkeit der Verkleinerung oder Abnahme gelten muß; so sind die beiden Begriffe des Absolut-Unendlichen und des Aktual-Unendlichen im Geschaffenen oder Transfinitum wesentlich verschieden, so daß man im Vergleiche beider nur das

Eine als *eigentlich Unendliches*, das andere als uneigentlich und aequivoce Unendliches bezeichnen muß. So aufgefaßt liegt, soweit ich bis jetzt sehe, in Ihrem Begriffe des Transfinitum keine Gefahr für religiöse Wahrheiten. Jedoch in einem gehen Sie ganz gewiß irre gegen die unzweifelhafte Wahrheit; dieser Irrtum folgt aber nicht aus Ihrem Begriffe des Transfinitum, sondern aus der mangelhaften Auffassung des Absoluten. In Ihrem werten Schreiben an mich sagen Sie nämlich erstens richtig (vorausgesetzt, daß Ihr Begriff des Transfinitum nicht bloß religiös unverfänglich, sondern auch *wahr* ist, worüber ich nicht urteile), ein Beweis geht vom Gottesbegriffe aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum *ordinatum*. In der Voraussetzung, daß Ihr Transfinitum *actuale* in sich keinen Widerspruch enthält, ist Ihr Schluß auf die *Möglichkeit der Schöpfung* eines Transfinitum aus dem Begriffe von Gottes Allmacht ganz richtig. Allein zu meinem Bedauern gehen Sie weiter und schließen ‚aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die *Notwendigkeit* einer tatsächlich erfolgten Schöpfung des Transfinitum‘. Gerade weil Gott an sich das absolute unendliche Gut und die absolute Herrlichkeit ist, welchem Gute und welcher Herrlichkeit nichts zuwachsen und nichts abgehen kann, ist die *Notwendigkeit* einer Schöpfung, welche immer diese sein mag, ein Widerspruch, und die *Freiheit* der Schöpfung eine ebenso notwendige Vollkommenheit Gottes, wie alle seine anderen Vollkommenheiten, oder besser, Gottes unendliche Vollkommenheit ist (nach unseren notwendigen Unterscheidungen) ebenso *Freiheit*, als Allmacht, Weisheit, Gerechtigkeit etc. Nach Ihrem Schlusse auf die *Notwendigkeit* einer Schöpfung des Transfinitum müßten Sie noch viel weiter gehen. Ihr Transfinitum *actuale* ist ein Vermehrbares; nun wenn Gottes unendliche Güte und Herrlichkeit die Schöpfung des Transfinitum überhaupt mit *Notwendigkeit* fordert, so folgt, aus ganz demselben Grunde der Unendlichkeit seiner Güte und Herrlichkeit, die *Notwendigkeit* der Vermehrung, bis es nicht mehr vermehrbar wäre, was Ihrem eigenen Begriffe des Transfinitum widerspricht. Mit andern Worten: wer die *Notwendigkeit* einer Schöpfung aus der Unendlichkeit der Güte und Herrlichkeit Gottes erschließt, der muß behaupten, daß alles Erschaffbare wirklich von Ewigkeit erschaffen ist; und daß es vor Gottes Auge kein Mögliches gibt, das seine Allmacht ins Dasein rufen könnte. Diese Ihre unglückliche Meinung von der *Notwendigkeit* der Schöpfung wird Ihnen auch in Ihrer Bekämpfung der Pantheisten sehr hinderlich sein und wenigstens die Überzeugungskraft Ihrer Beweise abschwächen. Ich habe mich bei diesem Punkte so lange aufgehalten, weil ich innigst wünsche, daß Ihr Scharfsinn sich freimachte von einem so verhängnisvollen Irrtum, dem freilich manche andere, selbst solche, die sich für rechtgläubig halten, verfallen sind.“

Mit allem, was in diesem Schreiben steht, stimme ich vollkommen überein, wie aus den wenigen Zeilen, welche unter V abgedruckt sind, hervorgeht. Denn da für mich die absolute Freiheit Gottes außer Frage stand, so war die „Notwendigkeit“ an der betreffenden Stelle des Briefes IV meinerseits nicht so verstanden, wie es hier vorausgesetzt und mit Recht bekämpft wird. Macht man sich aber mit dem richtigen Sinn meiner Argumentation genauer vertraut, so scheint, wie ich bei einer späteren Gelegenheit erklären will, der in IV versuchsweise angedeutete apriorische Beweis für die tatsächlich *erfolgte* Schöpfung einer transfiniten Welt eine weitere Erwägung und Prüfung zu verdienen.

I.¹

Unter *Mächtigkeit* oder *Kardinalzahl* einer Menge M (die aus wohlunterschiedenen, begrifflich getrennten Elementen m, m', \dots besteht und insofern bestimmt und abgegrenzt ist) verstehe ich den Allgemeinbegriff oder Gattungsbegriff (universale), welchen man erhält, indem man bei der Menge sowohl von der Beschaffenheit ihrer Elemente, wie auch von allen Beziehungen, welche die Elemente, sei es unter einander, sei es zu anderen Dingen haben, also im besondern auch von der Ordnung, welche unter den Elementen herrschen mag, abstrahiert und nur auf das reflektiert, was allen Mengen gemeinsam ist, die mit M *äquivalent* sind. Ich nenne aber zwei Mengen M und N *äquivalent*, wenn sie sich gegenseitig eindeutig Element für Element einander zuordnen lassen. (Vgl. Crelles Journal Bd. 84 pag. 242) [IV 2, S. 119]. Daher bediene ich mich auch des kürzeren Ausdrucks *Valenz* für Mächtigkeit oder Kardinalzahl. Von Mengen gleicher Valenz sage ich, sie gehören zu derselben Mächtigkeitsklasse. *Valenz* einer Menge M ist also der Allgemeinbegriff, unter dem alle Mengen derselben Klasse wie M und nur diese stehen.

Eine der wichtigsten Aufgaben der Mengenlehre, welche ich der Hauptsache nach in der Abhandlung „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883“ [III 4] gelöst zu haben glaube, besteht in der Forderung, die verschiedenen Valenzen oder Mächtigkeiten der in der Gesamtnatur, soweit sie sich unsrer Erkenntnis anschließt, vorkommenden Mannigfaltigkeiten zu bestimmen; dazu bin ich durch die Ausbildung des allgemeinen

¹ Dieser Brief ist vor drei Jahren, am 15. Febr. 1884, an Herrn Prof. Dr. Kurd Laßwitz in Gotha geschrieben worden. Er gibt im wesentlichen den Inhalt eines Vortrags wieder, welchen ich im September 1883 in der mathematischen Sektion der Naturforscherversammlung in Freiburg (Baden) gehalten habe. Infolge dieses Vortrags erhielt ich bald darauf einen Brief von Herrn R. Lipschitz (welchen ich in Z. Philos. u. philos. Krit. 88, 225 [hier S. 371] erwähnt habe), worin mich dieser ausgezeichnete Mathematiker auf die Korrespondenz (vom 12. Juli 1831) zwischen Gauß und Schumacher aufmerksam macht, in welcher sich Gauß gegen jede Hereinziehung des aktualen Unendlichen in die Mathematik ausspricht.

Anzahlbegriffs wohlgeordneter Mengen oder, was dasselbe bedeutet, des *Ordnungszahlbegriffs*¹, gelangt.

Die Definition dessen, was ich unter einer *wohlgeordneten Menge* \mathfrak{M} verstehe, findet sich in den „Grundlagen“ S. 4 [hier III 4, S. 168].

Zwei *wohlgeordnete Mengen* \mathfrak{M} und \mathfrak{N} nenne ich von gleichem *Typus* oder auch *einander ähnlich*, wenn sie sich gegenseitig eindeutig *derart* auf einander beziehen lassen, daß wenn m und m' irgend zwei Elemente der ersten, n und n' die entsprechenden Elemente der anderen sind, *alsdann* immer das Rangverhältnis von m' zu m dasselbe ist wie das Rangverhältnis von n' zu n . Ich sage auch von zwei solchen *wohlgeordneten Mengen* \mathfrak{M} und \mathfrak{N} , daß sie *auf einander abzählbar* sind.

So sind beispielsweise die wohlgeordneten Mengen

$$(a, a', a'') \text{ und } (b, b', b'')$$

ebenso aber auch die wohlgeordneten Mengen

$$(a, a', a'' \dots a^{(\nu)} \dots) \text{ und } (b, b', b'' \dots b^{(\nu)} \dots)$$

und auch

$$(a, a', a'' \dots a^{(\nu)} \dots c, c', c'') \text{ und } (b, b', b'' \dots b^{(\nu)} \dots d, d', d'')$$

von gleichem Typus oder, was dasselbe heißt, auf einander abzählbar.

Unter *Anzahl* oder *Ordnungszahl* einer wohlgeordneten Menge \mathfrak{M} verstehe ich den *Allgemeinbegriff* (Gattungsbegriff, universale), welchen man erhält, indem man bei der wohlgeordneten Menge \mathfrak{M} von der Beschaffenheit und Bezeichnung ihrer Elemente abstrahiert und nur auf die Rangordnung reflektiert, durch welche die Elemente in Beziehung zu einander stehen; die *Anzahl* oder *Ordnungszahl* von \mathfrak{M} ist also sämtlichen wohlgeordneten Mengen *desselben Typus* gemeinsam, gewissermaßen dasjenige, was ihnen allen immanent ist. Hier tritt uns die Aufgabe entgegen, die in der Natur vorkommenden Ordnungszahlen oder Anzahlen wohlgeordneter Mengen zu bestimmen und sachgemäß mit Hilfe geeigneter Zeichen zu unterscheiden. Dazu führen folgende Definitionen und Sätze:

Seien \mathfrak{M} und \mathfrak{N} irgend zwei *wohlgeordnete Mengen*, α und β die zu ihnen gehörigen Ordnungszahlen; es ist immer

$$\mathfrak{M} \text{ vereinigt mit darauffolgendem } \mathfrak{N}$$

wieder eine *wohlgeordnete Menge* von *bestimmtem Typus*, die zugehörige

¹ Der Begriff *Ordnungszahl* ist ein besonderer Fall des Begriffes *Ordnungstypus*, welcher sich in derselben Weise auf jede *einfach* oder *mehrfach geordnete Menge* bezieht, wie die *Ordnungszahl* auf eine *wohlgeordnete Menge*. Herr C. Gutberlet hat auf meinen Wunsch hierauf Bezügliches nach einem Manuskript von mir in seinen Aufsatz (Z. Philos. u. philos. Krit. 88, 183) eingefügt.

Ordnungszahl sei γ . Wir definieren γ als die Summe von α und β , $\gamma = \alpha + \beta$, und nennen α den Augend, β den Addend dieser Summe. Sind α und β irgend zwei verschiedene, d. h. verschiedenen Typen entsprechende Ordnungszahlen, so kann bewiesen werden, daß *entweder* die Gleichung $\beta = \alpha + \xi$, *oder* die Gleichung $\alpha = \beta + \xi$ nach ξ (d. h. nach dem *Addenden*) und zwar nur auf eine Weise auflösbar ist; im ersten Falle nennen wir α kleiner als β , im zweiten α größer als β ; ξ wird die Differenz beider Zahlen genannt; im ersteren Falle ist $\xi = \beta - \alpha$, im zweiten $\xi = \alpha - \beta$.

Man beweist leicht, daß wenn $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ alsdann auch $\alpha < \gamma$. Ferner zeigt man, daß immer das Assoziationsgesetz besteht:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Ähnlich wird das Produkt zweier Ordnungszahlen definiert, wobei aber zwischen *Multiplikator* und *Multiplikandus* wohl zu unterscheiden ist, denn im allgemeinen ist $\alpha \cdot \beta$ von $\beta \cdot \alpha$ verschieden. Dagegen beweist man auch hier, ich möchte fast sagen, mit einem Blick, daß

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \text{ (Assoziations-Gesetz),}$$

sowie auch, daß

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ (Distributions-Gesetz mit } \alpha \text{ als Multiplikandus).}$$

Ich habe in den „Grundlagen“ den Multiplikator *links*, den Multiplikandus *rechts* geschrieben; es hat sich mir aber gezeigt, daß der entgegengesetzte Gebrauch, den *Multiplikandus links* zuerst und dann *rechts den Multiplikator* zu schreiben, für die weitere Entwicklung der transfiniten Ordnungszahlenlehre der zweckmäßigeren, ja fast unentbehrliche ist; aus diesem Grunde kehre ich also die betreffende Schreibweise der „Grundlagen“, soweit sie sich auf *Produkte* bezieht, von jetzt ab *immer um*. Von der Wichtigkeit dieser Änderung überzeugt man sich, sobald man transfiniten Ordnungszahlen der Form α^β in Betracht zieht, für welche nach *dieser* Schreibweise das allgemeine Gesetz gilt: $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$. Dieses selbe Gesetz würde aber nach dem Schreibmodus der „Grundlagen“ die abstoßende Form annehmen:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\gamma+\beta}.$$

Ich hebe noch folgendes hervor: wenn in einer wohlgeordneten Menge \mathfrak{M} irgend zwei Elemente m und m' ihre Plätze in der gesamten Rangordnung wechseln, so wird dadurch der Typus nicht verändert, also auch nicht die „Anzahl“ oder „Ordnungszahl“. Daraus folgt, daß *solche Umformungen* einer wohlgeordneten Menge die *Anzahl* derselben ungeändert lassen, welche sich auf eine endliche oder unendliche Folge von *Transpositionen* von je zwei Elementen zurückführen lassen, d. h. alle solchen Änderungen, welche durch

Permutation der Elemente entstehen. Da nun bei einer *endlichen* Menge, wenn der Inbegriff ihrer Elemente derselbe bleibt, *jede* Umformung sich auf eine Folge von Transpositionen zurückführen läßt, so liegt hierin der Grund, warum bei *endlichen* Mengen Ordnungszahl und Kardinalzahl gewissermaßen zusammenfallen, indem hier Mengen derselben Valenz in jeder Form, als wohlgeordnete Mengen gedacht, immer eine und dieselbe Ordnungszahl haben. Bei unendlichen Mengen tritt jedoch der Unterschied von *Kardinalzahl* und *Ordnungszahl* auf das entschiedenste alsbald hervor. Ebenso hängen mit jenem Umstande bei *endlichen* Mengen die Kommutationsgesetze der Addition und Multiplikation zusammen, indem daraus sehr leicht bewiesen wird, daß, wenn μ und ν zwei endliche Ordnungszahlen sind, alsdann stets $\mu + \nu = \nu + \mu$ und $\mu \cdot \nu = \nu \cdot \mu$.

Für die kleinste transfinite Ordnungszahl, es ist diejenige, welche den wohlgeordneten Mengen vom Typus

$$(a, a', a'', \dots, a^{(\nu)}, \dots)$$

entspricht, muß ein *neues* Zeichen genommen werden; ich habe dazu den letzten Buchstaben des griechischen Alphabets ω gewählt.

Unter Ordnungszahlen der *zweiten* Zahlenklasse verstehe ich diejenigen Zahlen, welche zu wohlgeordneten Mengen von der Mächtigkeit der *ersten* Zahlenklasse $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ gehören; dieser Inbegriff von Ordnungszahlen konstituiert eine *neue* Valenz und zwar die auf die vorhergehende Valenz *nächstfolgende*, wie ich streng gezeigt habe (Grundlagen p. 35—38). Und derselbe Gedankengang führt uns zu höheren Zahlenklassen und zu den ihnen zukommenden höheren Valenzen. — Das ist eine wunderbare, ins Große gehende Harmonie, deren genaue Durchführung das Thema der transfiniten Zahlenlehre ist.

Ich glaubte dies alles, in der gedrängten Kürze freilich, vorausschicken zu müssen, um auf einige Bemerkungen, die ich in Ihrem Schreiben finde, eingehen zu können. Zunächst mache ich auf die *Allgemeinheit*, *Schärfe* und *Bestimmtheit* meiner Zahldefinitionen aufmerksam; sie sind *gleichlautend*, gleichviel ob sie auf *endliche* oder auf *unendliche* Mengen bezogen werden. Jede transfinite Zahl der zweiten Zahlenklasse z. B. hat ihrer Definition nach *dieselbe Bestimmtheit*, *dieselbe Vollendung in sich wie jede endliche Zahl*.

Der Begriff ω beispielsweise enthält *nichts Schwankendes*, nichts *Unbestimmtes*, *nichts Veränderliches*, *nichts Potenzielles*, er ist kein *ἄπειρον*, sondern ein *ἀφωρισμένον*, und das gleiche gilt von allen andern transfiniten Zahlen. Er bildet ebenso wie jede endliche Zahl, z. B. 7 oder 3, einen *Gegensatz* zu den unbestimmten Zeichen x, a, b der Buchstabenrechnung, mit welchen *Sie* unzutreffenderweise die transfiniten Zahlen in Ihrem Schreiben verglichen. Sie weichen hierbei von dem Sinn, welchen die transfiniten

Zahlen bei mir haben, ebenso ab, wie es Herr Wundt in der Auffassung getan hat, welche sich über diesen Gegenstand in seiner Methodenlehre, Logik, Bd. II, S. 126—129 findet. Wundt's Auseinandersetzung zeigt, daß er sich des fundamentalen Unterschieds von Uneigentlichunendlichem = veränderlichem Endlichem = synkategorematische infinitum (*ἄπειρον*) einerseits und Eigentlichunendlichem = Transfinitum = Vollendetunendlichem = Unendlichseiendem = kategorematische infinitum (*ἄφωτισμένον*) andererseits nicht klar und deutlich bewußt ist; sonst würde er nicht *jenes* ebensowohl wie *dieses* als *Grenze* bezeichnen; Grenze ist immer an sich etwas *festes, unveränderliches*, daher kann von den beiden Unendlichkeitsbegriffen nur das *Transfinitum* als *seiend* und unter Umständen und in gewissem Sinne auch als *feste Grenze* gedacht werden. Daher irrt Wundt auch darin, wenn er glaubt, das Transfinitum habe keine physikalische Bedeutung, wohl aber das *potentiale Unendliche*; streng genommen ist das *Gegenteil* hiervon richtig, weil das *potentiale Unendliche* nur Hilfs- und Beziehungsbegriff ist und stets auf ein zugrunde liegendes *transfinitum* hinweist, ohne welches es weder sein noch gedacht werden kann. Der Unterschied von Uneigentlichunendlichem und Eigentlichunendlichem ist von den Philosophen sehr frühe, d. h. schon von den alten Griechen erkannt worden, freilich nicht überall mit gleicher Klarheit; ebenso findet man ihn bei den Neueren, mit Ausnahme vielleicht von Kant, Herbart und den Materialisten, Empiristen, Positivisten etc. deutlich ausgesprochen. Doch verdient hierbei Hegel nicht, wie Wundt zu meinen scheint, eine besondere Erwähnung, zumal bei Hegel alles widerspruchsvoll, dunkel und konfuse ist, ja sogar der *Widerspruch* als hervortretendes Element seiner Philosophie von ihm selbst zum charakteristischen Eigentum seiner Denkweise erhoben worden ist, um welches *ich* wenigstens ihn *nicht* beneide. Dazu kommt, daß, was Hegel etwa zutreffendes über den hier erörterten Unterschied gesagt haben mag, wie so manches andere bei ihm, dem Spinoza entlehnt ist. Bei allen Philosophen fehlt jedoch das *Prinzip des Unterschiedes* im Transfinitum, welches zu verschiedenen transfiniten Zahlen und zu verschiedenen Mächtigkeiten führt. Die meisten verwechseln sogar das Transfinitum mit dem seiner Natur nach *unterschiedslosen höchsten Einen*, mit dem Absoluten, dem absoluten Maximum, welches natürlich keiner Determination zugänglich und daher der Mathematik nicht unterworfen ist.

Ganz unzutreffend ist in der Wundt'schen Kritik auch die Zusammenstellung der neueren sogen. „metamathematischen“ Spekulationen mit meinen Arbeiten, sie haben nicht die geringste Ähnlichkeit und keine eigentliche Berührung, auch darf das Transfinitum *nicht* als „transzendent“ (d. h. doch wohl die menschlichen Verstandeskräfte übersteigend) bezeichnet werden.

In der Ballauf'schen Rezension¹, die namentlich in den Noten der Redaktion das Maximum des Unzutreffenden erreicht, ist *nicht einmal* die letzte,

¹ Ztschr. f. exakte Philos. 12, 375. Ich habe von dieser Besprechung den Eindruck gewonnen, daß der Kritiker, welcher in mehreren Beziehungen meine Gedanken sehr gut verstanden hat, durch den Terrorismus der Schulführer zu einer viel schärferen Stellungnahme wider mich gezwungen worden ist, als mit seinen eigenen Überzeugungen verträglich scheint. Dies tritt in auffälligster Weise S. 389 hervor, wo die Redaktion (Theod. Allihn und Otto Flügel) seiner freien, unbefangenen Überlegung plötzlich in die Zügel fällt, um die ärmste in das dunkle, unterirdische Gefängnis der Herbartschen Dogmatik, wohin kein erlösender Lichtstrahl dringt, zurückzuführen. Dem in dieser Note unter dem Text von der Redaktion Gesagten können zwei Antworten nicht erspart bleiben. *Erstens* scheint sie meine Arbeit nicht gelesen zu haben, denn sie nimmt nicht Rücksicht darauf, daß ich in den „Grundlagen“ das potentiale Unendliche, welches ich Uneigentlich-unendliches, von dem aktuellen Unendlichen, welches ich Eigentlich-unendliches dort nannte, strengstens unterscheidet. Herbart und seine Schüler erkennen nur das *erstere* an, geben ihm allein den Namen des Unendlichen und wissen nichts vom Transfiniten. Dagegen wäre formell nichts einzuwenden, non cuius homini contingit adire Corinthum, und es wäre für ihren Sprachgebrauch allerdings eine contradictio in terminis, dem Unendlichen das Prädikat des Bestimmtheits zu erteilen. Wie läßt sich aber der *mir* gemachte Vorwurf formell rechtfertigen, wonach *ich* die Prädikate des Bestimmtheits und des Unbestimmtheits hätte vereinigen wollen, um daraus ein „Unbestimmtes Bestimmtes“ zu machen, da ich doch gerade im Gegenteil das Potential-unendliche vom Transfiniten so streng getrennt habe, daß sie überall als toto genere Verschiedenes bei mir erscheinen? Die *andere* Antwort ist materieller Art und trifft mehr den Meister als dessen unglückliche Schüler. Nach Herbart IV, 88ff. soll der Begriff des Unendlichen „auf einer *wandelbaren Grenze*, welche in jedem Augenblick weiter fortgeschoben werden kann, bzw. muß“ beruhen. „Von dieser *Wandelbarkeit* der Grenze absehen, heißt den Begriff des Unendlichen aufheben, heißt nichts Unendliches, sondern Endliches denken. Von dieser *Wandelbarkeit der Grenze* oder der beständigen Möglichkeit des Fortschreitens sieht man aber ab, sobald man das Unendliche als fertig oder als real vorhanden setzt, man setzt dann eben nicht mehr eine unendliche, sondern eine endliche Menge. Es handelt sich hierbei gar nicht um die subjektive Unfähigkeit, die außerstande ist, jemals mit dem Geschäft des Zählens oder Setzens zu Ende zu kommen, sondern um den Begriff des Unendlichen selbst, dessen wesentliches, nicht wegzudenkendes Merkmal eben jene *wandelbare Grenze ist, jenseits deren immer noch etwas zu finden ist*. In betreff des Zählens läßt sich das eben Gesagte auch dahin aussprechen: bei jeder endlichen Menge von Dingen, wie groß dieselbe auch sein mag, bietet sich sofort die Möglichkeit des objektiven Zählens dar (wenn die Menge etwa tausendmal-millions Gegenstände umfaßt, so möchte ich bezweifeln, daß es den Herren Redakteuren *möglich* sein wird, die objektive Zählung *sofort* auszuführen; Anm. d. Verf.). Hingegen ist bei einer *unendlichen* Menge (also doch eine gewisse Anerkennung der unendlichen Menge!) die Möglichkeit des Zählens schlechthin ausgeschlossen (was in dem hier gemeinten Sinne von niemandem bezweifelt wird), weil eben das *wahrhaft Unendliche nur als ein Unbestimmtes, Unfertiges gefaßt werden kann*. (Also das „wahrhaft Unendliche“ soll *schlechter* sein als das Endliche!?) Usw.“ Ist es den Herren gänzlich aus der Erinnerung gekommen, daß, von den Reisen abgesehen, die in der Phantasie oder im Traume ausgeführt zu werden pflegen, daß, sage ich, zum sichern Wandeln oder Wandern *fester Grund und Boden* sowie ein *geebneter Weg* unbedingt erforderlich

witzig sein sollende Wendung am Schlusse richtig, sondern beruht auf einem offenbaren Irrtum. Wenn wir eine von A anfangende unendliche Grade AO haben und wir setzen an ihren Anfang A die endliche Strecke BA , so erhalten wir wieder eine unendliche von B ausgehende Grade BO , in welcher das hinzukommende gerade Stück nicht die geringste Änderung in bezug auf die „Größe“ hervorgebracht hat, was daraus erkannt wird, daß man die neue Grade zur völligen Kongruenz mit der alten bringen kann; der Gewinn, den sie durch das hinzugekommene Stück BA erhalten hat, ist zwar real vorhanden und unbestreitbar, *verschwindet* aber völlig, wenn man bloß auf das den beiden Linien AO und BO anhaftende *Akzidens* der Größe achtet. Wer hier wie überhaupt bei aktual-unendlichen Quantitäten einen Verstoß gegen das Widerspruchsprinzip findet, irrt durchaus, indem er den abstraktiven Charakter der „Größe“ aus dem Auge verliert und sie fälschlich mit der substanzialen Entität des vorliegenden Quantum identifiziert¹. In ein

(Fortsetzung des Textes auf S. 395.)

sind, ein Weg, der nirgends abbricht, sondern überall, wohin die Reise führt, gangbar sein und bleiben muß? Ist denn die Mahnung, welche Heinrich Hoffmann in seinem „Struwelpeter“ (Frankfurt a. M.: Loening) mit dem „Hans Guck in die Luft“ so deutlich uns allen zu Gemüte geführt hat, nur an den Herren Herbartianern ohne jeden Eindruck geblieben? Die weite Reise, welche Herbart seiner „wandelbaren Grenze“ vorschreibt, ist *eingestandenermaßen nicht* auf einen endlichen Weg beschränkt; so muß denn ihr Weg ein *unendlicher*, und zwar, weil er *seinerseits nichts Wandelndes*, sondern überall fest ist, ein *aktualunendlicher Weg* sein. Es fordert also *jedes potentiale Unendliche* (die wandelnde Grenze) ein *Transfinitum* (den sichern Weg zum Wandeln) und *kann ohne letzteres nicht gedacht werden* (man vgl. hiermit Abschn. 5 V und VII 7 dieser Abhandlung). Da wir uns aber durch unsre Arbeiten der breiten Heerstraße des Transfiniten versichert, sie wohl fundiert und sorgsam gepflastert haben, so öffnen wir sie dem Verkehr und stellen sie als eiserne Grundlage, nutzbar allen Freunden des potentialen Unendlichen, im besondern aber der wanderlustigen Herbartschen „Grenze“ bereitwilligst zur Verfügung; gern und ruhig überlassen wir die rastlose der Eintönigkeit ihres durchaus nicht beneidenswerten Geschicks; wandle sie nur immer weiter, es wird ihr von nun an nie mehr der Boden unter den Füßen schwinden. Glück auf die Reise!

¹ Auf diesen Irrtum gründen viele ihre sogenannten Beweise für die Unmöglichkeit aktual unendlicher Quantitäten oder Zahlen; man vergleiche beispielsweise: Renouvier, Ch.: *Esquisse d'une classification systematique des doctrines philosophiques*. I, 100. Paris 1885. Tongiorgi, Salv.: *Inst. philos.* ed. X, 2 ontol., § 350, 3^o. Pesch, T.: *Inst. phil. nat.* § 412; 1^o, 2^o, 3^o, 4^o. Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir noch auf andere Versehen aufmerksam zu machen, welche sich bei letzteren beiden Autoren, sowie auch bei vielen anderen finden. Tongiorgi sagt in ontol. § 349, prop. 9: „Danturne in eadem linea puncta, quae ab X actu infinite distent, an non? *Si non dantur haec puncta, linea est finita.*“ Ebenso behauptet Pesch, § 425, arg. 3, 1^o: „*Linea autem cujus omnia puncta inter se distantiam habent finitam, ipsa finita est.*“ Während im Vordersatz das *Endlichsein* in *distributiver* Bedeutung *secundum partes* vorausgesetzt wird, schließt man im Nachsatz, ohne jede Berechtigung, auf das *Endlichsein* im *kollektiven* Sinne *quoad totum*; was sich, nach S. Th. Aq. Opusc. de fallaciis, cap. XI, als *fallacia secundum quid et simpliciter* zu erkennen gibt.

Betrachten wir ferner bei Tongiorgi § 350; 2^o (Pesch, § 412, 3^o, 4^o) folgende Argumentation: „Supponatur ex unitatum accumulatione multitudo infinita. Haec erit numerus infinitus, aequabitque numerum qui ipsum immediate praecedit, unitate adjecta. Iam numerus praecedens eratne infinitus, an vero non erat? Infinitum illum dicere non potes; nam crescere adhuc poterat, ac re ipsa crevit additione unitatis. Erat ergo finitus, et unitate addita, factus est infinitus. Nimirum ex duobus finitis infinitum emersit; id quod absurdum est.“

Hier wird fälschlich vorausgesetzt, eine aktualunendliche Zahl müsse notwendig (weil man bei endlichen Zahlen daran gewöhnt ist) eine ihr zunächst vorhergehende ganze Zahl haben, aus welcher sie durch Hinzufügung einer Eins hervorginge. Diese Voraussetzung ist beispielsweise weder an der kleinsten Kardinalzahl ω , noch an der kleinsten Ordnungszahl ω erfüllt; ihnen gehen resp. die endlichen Kardinalzahlen, von denen keine die größte ist, und die endlichen Ordnungszahlen, welche auch kein Maximum haben, voran; es wäre also eine widersinnige Annahme, von einer der Kardinalzahl ω nächst vorhergehenden Kardinalzahl oder von einer der Ordnungszahl ω zunächst kleineren Ordnungszahl zu reden. Von falschen Prämissen kann aber keine wahre Folge erwartet werden. Die ganze Argumentation muß also für immer verworfen werden.

Herr Gutberlet sucht in seinem Werke (Das Unendliche metaph. und mathem. betrachtet, Mainz 1878, S. 18) dieselbe Beweisführung dadurch zu widerlegen, daß er, ähnlich wie es schon Leibniz getan, die *unendliche* „Zahl“ preisgibt, dagegen die unendliche „Menge“ zu retten sucht. Es kann aber m. E. den Gegnern des Transfiniten kein größerer Gefallen geschehen als mit dieser Wendung; denn unendliche Zahl und Menge sind unlösbar miteinander verknüpft; gibt man die eine auf, so hat man kein Recht mehr auf die andere. Ebenso wenig kann ich mich damit einverstanden erklären, daß Gutberlet, verleitet durch zweideutige Erklärungen bei Leibniz und Newton und unter Berufung auf neuere „mathematische Autoritäten“, wie Lübsen, Klügel, R. Hoppe, aus den „Differentialen“ (welche nur als beliebig klein *werdende* Größen aufzufassen sind und die alle die Null zur gemeinschaftlichen Grenze haben; man vgl. die Abschn. VI und VII dieses Aufsatzes), indem er unzulässige Divisionen fingiert, Stützen für das A.-U. zu gewinnen sucht. Er wird in dieser Beziehung von dem R. P. T. Pesch (Inst. phil. nat. §§ 421, 422) mit den zutreffendsten Gründen widerlegt.

Um so mehr muß rühmend hervorgehoben werden, daß Herr Prof. Gutberlet mit Nachdruck und Erfolg (I. Abt., I. Abschn. §§ 3, 5 und 6 seines Werkes) auf die Abhängigkeit des potentialen Unendlichen von einem zugrunde liegenden A.-U. hinweist; mit Recht wird von ihm betont, daß a parte rei eigentlich gar kein potentiales Unendliches existiert; was auch von Stöckl, der das P.-U. für ein ens rationis erklärt, anerkannt worden ist.

Dagegen finde ich aber an verschiedenen Stellen bei Gutberlet (z. B. S. 45 seines Werkes) die durchaus unhaltbare Thesis ausgesprochen, daß „im Begriffe der unendlich gedachten Größe der Ausschluß aller Möglichkeit der Vermehrung“ liege. Dies kann nur in bezug auf das Absolutunendliche zugestanden werden, das Transfinite, obgleich als bestimmt und größer als jedes Endliche gefaßt, teilt mit dem Endlichen den Charakter unbeschränkter Vermehrbarkeit.

Das durch Gelehrsamkeit und Scharfsinn ausgezeichnete Werk des R. P. Tilm Pesch veranlaßt mich, was seinen dem Unendlichen gewidmeten Abschnitt betrifft, zu noch einer Bemerkung.

Der Verf. legt in § 403 seiner Untersuchung *zwei* verschiedene Definitionen des Unendlichen zugrunde, die er promiscue in seinen Beweisen benutzt, ohne den Nachweis

ähnliches Versehen scheint aber auch Wundt pag. 128 geraten zu sein. Es bedarf also keiner weiteren Rechtfertigung, daß ich in den „Grundlagen“ gleich im Anfang zwei *toto genere* von einander verschiedene Begriffe unterscheide, welche ich das Uneigentlich-unendliche und das Eigentlich-unendliche nenne; sie müssen als in *keiner* Weise vereinbar oder verwandt angesehen werden. Die so oft zu allen Zeiten zugelassene Vereinigung oder Vermengung dieser beiden völlig disparaten Begriffe enthält meiner festen Überzeugung nach die Ursache unzähliger Irrtümer; im besonderen sehe ich aber hier den Grund, warum man nicht schon früher die *transfiniten Zahlen* entdeckt hat.

Um diese Verwechslung von vornherein auszuschließen, bezeichne ich die kleinste transfinite Zahl mit einem von dem gewöhnlichen, dem Sinne des Uneigentlich-unendlichen entsprechenden Zeichen ∞ *verschiedenen* Zeichen, nämlich mit ω .

Allerdings kann ω gewissermaßen als die Grenze angesehen werden, welcher die veränderliche endliche ganze Zahl ν zustrebt, doch nur in dem Sinne, daß ω die *kleinste* transfinite Ordnungs-Zahl, d. h. die kleinste *festbestimmte* Zahl ist, welche größer ist als *alle* endlichen Zahlen ν ; ganz ebenso wie $\sqrt{2}$ die Grenze von gewissen veränderlichen, wachsenden, rationalen Zahlen ist, nur daß hier noch dies hinzukommt, daß die Differenz von $\sqrt{2}$ und diesen Näherungsbrüchen beliebig klein wird, wogegen $\omega - \nu$ immer gleich ω ist; dieser Unterschied ändert aber *nichts* daran, daß ω als ebenso bestimmt und vollendet anzusehn ist, wie $\sqrt{2}$, und ändert auch nichts daran, daß ω ebensowenig Spuren der ihm zustrebenden Zahlen ν an sich hat, wie $\sqrt{2}$ irgend etwas von den rationalen Näherungsbrüchen.

Die transfiniten Zahlen sind in gewissem Sinne selbst *neue Irrationalitäten* und in der Tat ist die in meinen Augen beste Methode, die *endlichen* Irrationalzahlen zu definieren, ganz ähnlich, ja ich möchte sogar sagen im Prinzip dieselbe wie meine oben beschriebene Methode der Einführung transfiniter Zahlen. Man kann unbedingt sagen: die transfiniten Zahlen *stehen oder fallen* mit den endlichen Irrationalzahlen; sie gleichen einander ihrem

geführt zu haben, daß sie sich auf Wechselbegriffe bezögen. Dies ist sicherlich schon formell unzulässig; im vorliegenden Fall würde aber sogar der Versuch eines Beweises für die Korrelation der beiden Begriffe zur Überzeugung geführt haben, daß es sich dabei um zwei *toto genere* verschiedene Dinge handelt. Die *erste* Definition: „infinitum illud dicitur, cujus aliquid semper est extra“ (Aristoteles phys. I. 3, c. 4, 203a 20) paßt eigentlich nur auf das *ἄπειρον* oder potentiale Unendliche; die *zweite* Definition: „infinitum id est, quo non sit majus, nec esse possit“ (welche sich übrigens in dem von Pesch angeführten Arist. I. 1 de coelo c. 5 *nicht* findet) entspricht dagegen nur dem Absolutunendlichen. Das *Transfinitum* ist also in diesem Werke ganz unberücksichtigt geblieben.

innersten Wesen nach; denn jene wie diese sind bestimmt abgegrenzte Gestaltungen oder Modifikationen (*ἀφορισμένα*)¹ des aktualen Unendlichen.

II.²

So wenig es meinen Neigungen entspricht, anderer Ansichten zu kritisieren, habe ich doch, in Anbetracht der Wichtigkeit des Gegenstandes und auf Ihren ausdrücklichen, wiederholt kundgegebenen Wunsch hin, mir die, in Ihrem Aufsatz³ „Das Problem des Unendlichen“ angegebenen Gründe gegen das „*Infinitum actuale existens seu in concreto*“, welche Ihrer Meinung nach nicht gleichermaßen gegen das „*Inf. act. possibile*“ anwendbar wären, genau angesehen und gefunden, daß auch hier wieder, wie in allen dasselbe Ziel verfolgenden Beweisen, ein versteckter Zirkelschluß zugrunde liegt. In meinem Briefe an Herrn G. Eneström habe ich gesagt, daß alle sögen. Beweise gegen die aktual-unendlichen Zahlen auf einem *πρώτον ψεύδος* beruhen, über das man sich nicht volle Rechenschaft gibt, welches aber in jedem mir vorliegenden Falle nachzuweisen ich mich anheischig mache; es besteht darin, daß man von vornherein der aktual-unendlichen Größe sämtliche Eigenschaften der endlichen Größe zumutet, woraus leicht ein Widerspruch mit ihrem Nichtendlichein gefolgert wird. Damit glaubt man dann einen Beweis für ihre Unmöglichkeit fertig zu haben, während man sich doch in Wahrheit nur im Zirkel bewegt hat. Ganz die nämliche Überzeugung habe ich in bezug auf alle Beweisversuche, durch welche das A.-U. in *concreto seu in natura creata* bestritten werden soll; nur daß sich hier noch andere, weit gewichtigere Gründe hinzufügen lassen, die aus der absoluten Omnipotenz Gottes fließen und denen gegenüber jede Negation der Möglichkeit eines „*Transfinitum seu Infinitum actuale creatum*“ wie eine Verletzung jenes Attributes der Gottheit erscheint. Ich will jedoch das letztere Argument heute nicht weiter ausführen, weil es genügen wird, an Ihrem Beweise dasjenige hervorzuheben, was, entsprechend meiner vorhin ausgesprochenen Überzeugung und meiner unmaßgeblichen Meinung nach, daran unrichtig ist.

¹ Man vgl. *Conimbricenses Phys. Lib. III, cap. 8, quaest. 1, art. 1.* Diese Stelle bezieht sich auf Aristoteles *Φυ 8 208a 6*, wo dem *ἄπειρον δυνάμει* ein *ἄπειρον ὡς ἀφορισμένον* entgegengestellt und, wie ich gelegentlich in extenso beweisen werde, mit gänzlich unzureichenden Gründen bekämpft wird. Man vgl. auch S. Thomas: *Phys. III, lectio 13.* Die Gründe des Stagiriten beweisen nichts anderes, als daß die Argumente, welche die alten Naturphilosophen für die *notwendige* Existenz eines *ἄπειρον ἀφορισμένον* vorgebracht haben, nicht zwingend sind; *er beweist aber nicht die Unmöglichkeit* eines existierenden *ἄπειρον ἀφορισμένον*; mit anderen Worten, *er beweist nicht*, daß letzterer Begriff, wenn man ihn als *Transfinitum* faßt, ein widersprechender sei, und es würde ihm solches auch schwer oder richtiger gesagt unmöglich gewesen sein.

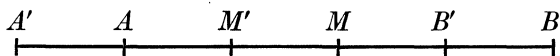
² Dieses Schreiben ist an Herrn Prof. Gutberlet in Fulda gerichtet worden und trägt das Datum vom 24. Januar 1886.

³ *Ztschr. f. Philos. u. philos. Kritik*, 88, 199.

Ihre Überlegung lautet wörtlich wie folgt: „An dieser Stelle glaube ich aber den Nachweis führen zu sollen, daß eine aktual-unendliche Größe nicht existieren kann. Wenn eine unendliche Linie, ein unendlich langer Draht existierte, so könnte man an der Stelle, wo er mich streift, ein endliches Stück heraus-schneiden und sodann die beiden übrigbleibenden Stücke zusammenziehen und wieder miteinander verbinden. Nun ist aber keines der beiden Stücke mehr unendlich; denn beide sind aus der Unendlichkeit herausgerückt, beiden fehlt gerade so viel von der Unendlichkeit, als sie durch die Annäherung nach der Mitte hin verschoben worden sind. Beide sind also nach der Seite der Unendlichkeit hin begrenzt und ebenso begrenzt nach der Mitte. Eine Linie mag nun allerdings nach der einen Seite begrenzt und doch nach der andern unendlich sein, ist sie aber nach beiden Seiten begrenzt, dann ist sie ganz gewiß endlich. Sind aber die beiden Stücke endlich, dann auch die ganze Linie, und wenn sie jetzt, nach der Wegnahme eines endlichen Zwischenstückes, als endlich sich herausstellt, so war sie es auch mit diesem endlichen Zwischenstück, denn zwei Endliche machen kein Unendliches“.

In dieser Argumentation erkenne ich den Fehler, daß die Eigenschaften einer endlichen starren Linie ohne weiteres auf eine unendliche starre Linie übertragen werden, deren Eigenschaften von der Natur des Unendlichen abhängen.

Wenn Sie eine endliche Gerade AB in ihrer Richtung so verrücken, daß ihr Anfangspunkt A um das Stück $AA' = 1$



nach A' geschoben wird, so ist dies nur so möglich, daß *jeder andre ihrer Punkte*, z. B. M nach M' um ein gleiches Stück $MM' = 1$ und *im besonderen auch der Endpunkt* B um das Stück $BB' = 1$ nach B' verrückt wird.

Denken wir uns aber statt der endlichen Linie AB in derselben Richtung und mit demselben Anfangspunkte eine aktual-unendliche Linie AO , die ihren Zielpunkt O im Unendlichen hat, so gilt zwar auch, daß jeder im Endlichen liegende Punkt M um $MM' = 1$ nach M' gerückt wird, falls A nach A' kommt, *wer sagt Ihnen aber, daß hier auch das gleiche gilt vom unendlich fernen Zielpunkt* O ?

Ganz im Gegenteil führt letztere Annahme, wie Sie selbst gezeigt haben, zu einem Widerspruch; dieser Widerspruch berechtigt aber nicht, wie Sie annehmen, zur Leugnung der Möglichkeit der Existenz einer aktual-unendlichen Geraden AO , sondern er führt zu der nichts Widersprechendes involvierenden Eigenschaft der aktual-unendlichen Geraden AO , daß, während *alle anderen Punkte* M, A, B der Geraden AO um ein gleiches Stück $MM' = AA' = BB' = 1$ nach links gezogen werden, *allein der unendlich ferne Punkt* O *fest an seinem Platze bleibt*, d. h. auf diesem Wege aus der unendlichen Entfernung gar nicht ins Endliche gebracht werden kann, *auch dann nicht*, wenn Sie zur Hypothese einer unendlichen Zugkraft greifen wollen.

Da die gedachte aktual-unendliche Gerade AO ihrer Größe nach der von mir mit ω bezeichneten *kleinsten* transfiniten Ordnungszahl entspricht, so läßt sich das soeben Behauptete auch in der bekannten, nicht den geringsten Widerspruch involvierenden Gleichung $1 + \omega = \omega$ wiederfinden, wo auf der linken Seite $1 = A'A$ die Bedeutung des *Augendus*, $\omega = AO$ die des *Addendus* hat. Dagegen ist allerdings $\omega + 1$, wo ω als *Augendus*, 1 als *Addendus* figurieren, wie aus den Prinzipien meiner „Grundlagen“ geschlossen wird, eine von ω *verschiedene* transfiniten Zahl, nämlich die auf die kleinste ω *nächstfolgende ganze transfiniten* Ordnungszahl; letzteres hat aber auf Ihr Exempel keine Anwendung, da bei Ihnen der *Augendus* eine endliche und im Endlichen liegende Größe $A'A = 1$, der *Addendus* $AO = \omega$ eine aktual-unendliche ist.

Da ich denselben Gegenstand von anderen Gesichtspunkten aus in einem dieser Tage von mir geschriebenen Briefe besprochen habe, so möchte ich Ihnen beifolgende Abschrift eines Auszuges¹ davon verehren mit dem Wunsche, daß Sie mir sowohl über das Vorliegende, wie auch über das in dem soeben erwähnten Briefe Gesagte Ihre Meinung gefälligst schreiben mögen².

Es war meine Absicht, diesem heutigen Schreiben noch einige andere Erinnerungen und Bedenken sowohl mit Bezug auf die in Ihrem Aufsatz vorkommenden Schlüsse, wie auch über verschiedenes in Ihrer Schrift: „Das Unendliche mathem. und metaph. betrachtet“ beizufügen; doch halten mich andere Obliegenheiten davon ab, so daß ich mir diese Aufgabe für das nächste Mal zurücklege . . .

¹ Siehe unten III.

² In betreff vorstehender Ausführung läßt sich, wie es scheint, folgendes bemerken. Eben weil die zu verrückende Linie als *starr* vorausgesetzt ist, so muß mit Verschiebung von A nach A' jeder Punkt der Linie um ebensoviel verschoben werden, und somit auch der unendlich ferne Endpunkt O . Die Unendlichkeit könnte nur dann eine Unmöglichkeit des Verschiebens bedingen, wenn die ziehende Kraft wohl zur Verschiebung eines endlichen, nicht aber eines unendlichen Drahtes ausreichte. Aber darum können wir eine unendliche Zugkraft voraussetzen.

Nun kann man allerdings dagegen einwenden, daß wegen der *metaphysischen* Unmöglichkeit, eine unendliche Linie in die Endlichkeit hereinzuziehen, die Ausführung trotz der Erfüllung aller *physischen* Bedingungen, selbst unter Voraussetzung eines unendlich starken Einflusses, doch nicht möglich wird. Wir befinden uns hier in demselben Falle, den Suarez bei der Annahme einer ewigen (unveränderlichen) Welt voraussetzt. Feuer, so meint er, in Ewigkeit an Werg angelegt, würde dieses trotz seiner großen Verbrennbarkeit, nicht entzünden können. Denn der Verbrennungsprozeß von einigen Minuten müßte ein Stück von der Ewigkeit abschneiden und so dieselbe endlich machen.

Ich glaube aber kaum, daß jemand sich dazu verstehen wird, zu denken, daß das Feuer das Werg ewig unverseht lasse. Darum muß eben die Annahme einer ewigen, mit Veränderungen verbundenen Welt als unstatthaft bezeichnet werden. Ähnliches scheint auch von dem unendlichen Draht zu gelten.

(Ann. des Herrn Prof. Gutberlet.)

III.¹

Die Zeilen, welche Ew. . . . am 25. Dezember 1885 an mich zu richten die Güte hatten, enthalten einige Zweifel in bezug auf die philosophische Grundlage meiner, Ihnen zur Prüfung übersandten Arbeiten; vermutlich sind es gewisse von mir gebrauchte Worte, deren Bedeutung ich nicht genauer erklärt habe, welche meine Meinung nicht ganz bestimmt erscheinen lassen, und ich möchte mir daher erlauben, mich in Kürze genauer auszusprechen.

Die in meinem kleinen Aufsätze: „Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche“ vorkommenden Ausdrücke „Natura naturans“ und „Natura naturata“ gebrauche ich in derselben Bedeutung, welche ihnen die Thomisten gegeben haben, so daß der *erstere* Ausdruck Gott als den, außerhalb der aus nichts von ihm geschaffenen Substanzen stehenden Schöpfer und Erhalter derselben, der letztere aber die durch ihn geschaffene Welt bezeichnet. Dementsprechend unterscheide ich ein „Infinitum aeternum increatum sive Absolutum“, das sich auf Gott und seine Attribute bezieht, und ein „Infinitum creatum sive Transfinitum“, das überall dort ausgesagt wird, wo in der Natura creata ein Aktual-Unendliches konstatiert werden muß, wie beispielsweise in Beziehung auf die, meiner festen Überzeugung nach, aktual-unendliche Zahl der geschaffenen Einzelwesen sowohl im Weltall wie auch schon auf unserer Erde und, aller Wahrscheinlichkeit nach, selbst in jedem noch so kleinen, ausgedehnten Teil des Raumes, worin ich mit Leibniz ganz übereinstimme (Epistola ad Foucher, t. 2 operum ed. Dutens, p. I pag. 243).

Obwohl ich weiß, daß die Lehre vom „Infinitum creatum“, zwar nicht von allen, doch von den meisten Kirchenlehrern bekämpft wird und im besonderen auch vom großen S. Thomas Aquinatus in seiner S. theol. p. 1. q 7. a. 4 gewisse Meinungen dagegen angeführt werden, so sind doch die Gründe, welche in dieser Frage im Verlauf zwanzigjähriger Forschung, ich kann sagen, wider Willen, weil im Gegensatz zu von mir stets hochgehaltener Tradition, von innen her sich mir aufgedrängt und mich gewissermaßen gefangen genommen haben, stärker als alles, was ich bisher dagegen gesagt fand, obgleich ich es in weitem Umfange geprüft habe. Auch glaube ich, daß die Worte der heil. Schrift, wie z. B. Sap. c. 11. v. 21: „Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti.“, in denen ein Widerspruch gegen die aktual-unendlichen Zahlen vermutet wurde, diesen Sinn nicht haben; denn, gesetzt den Fall, es gäbe, wie ich bewiesen zu haben glaube, aktual-unendliche „Mächtigkeiten“, d. h. Kardinalzahlen und aktual-unendliche „Anzahlen wohl-

¹ Die folgenden zwei Briefe (III und IV) vom 22. und 29. Januar 1886 waren an einen großen Theologen [Kardinal Franzelin] gerichtet; derselbe ist, wie ich mit Schmerz erwähne, am 11. Dezember 1886 in die Ewigkeit abgerufen.

geordneter Mengen“ d. h. Ordnungszahlen (welche zwei Begriffe, wie ich gefunden habe, bei aktual-unendlichen Mengen außerordentlich verschieden sind, während bei endlichen Mengen ihr Unterschied kaum bemerkbar ist), so würden ganz sicherlich auch diese transfiniten Zahlen in jenem heiligen Ausspruche mitgemeint sein und es darf daher, meines Erachtens, derselbe nicht als Argument gegen die aktual-unendlichen Zahlen genommen werden, wenn ein Zirkelschluß vermieden werden soll.

Daß aber ein „Infinitum creatum“ als existent angenommen werden muß, läßt sich mehrfach beweisen. Um Ew. . . . nicht zu lange aufzuhalten, möchte ich mich in dieser Sache auf zwei kurze Andeutungen beschränken.

Ein Beweis geht vom Gottesbegriff aus und schließt zunächst aus der höchsten Vollkommenheit Gottes Wesens auf die Möglichkeit der Schöpfung eines Transfinitum ordinatum, sodann aus seiner Allgüte und Herrlichkeit auf die Notwendigkeit der tatsächlich erfolgten Schöpfung eines Transfinitum. Ein anderer Beweis zeigt a posteriori, daß die Annahme eines Transfinitum in natura naturata eine bessere, weil vollkommenerere Erklärung der Phänomene, im besondern der Organismen und der psychischen Erscheinungen ermöglicht als die entgegengesetzte Hypothese. . . .

IV.

. . . Ew. . . . sage ich meinen herzlichsten Dank für die Ausführungen des gütigen Schreibens vom 26. Januar 1886, denen ich mit voller Überzeugung zustimme; denn in der kurzen Andeutung meines Briefes vom 22. ds. war es an der betreffenden Stelle nicht meine Meinung, von einer objektiven, metaphysischen Notwendigkeit zum Schöpfungsakt, welcher Gott, der *absolut Freie* unterworfen gewesen wäre, zu sprechen, sondern ich wollte nur auf eine gewisse subjektive Notwendigkeit *für uns* hinweisen, aus Gottes Allgüte und Herrlichkeit auf die tatsächlich *erfolgte* (*nicht a parte Dei zu erfolgende*) Schöpfung, *nicht bloß* eines *Finitum ordinatum*, sondern eines *Transfinitum ordinatum* zu schließen. . . .

V.¹

Mit Vergnügen entnehme ich Ihrem Schreiben vom 23. ds., daß Sie dem Gegenstand meiner Untersuchungen ein Interesse zuwenden, für welches mein Dank um so größer ist, je seltener es mir von namhaften Naturforschern und Ärzten entgegengebracht wird; denn in diesen Kreisen ist das, was ich „horror infiniti“ nenne, nach den verschiedensten Beziehungen und aus den mannigfaltigsten Ursachen, im allgemeinen ein tief eingewurzelttes Übel.

¹ Dieser Brief, datiert vom 28. Februar 1886, ist an Prof. Dr. med. A. Eulenburg in Berlin gerichtet.

Fassen wir die Definitionen des potentialen und aktualen Unendlichen scharf ins Auge, so dürften die Schwierigkeiten, von denen Sie mir schreiben, bald beseitigt sein.

I. Das P.-U.¹ wird vorzugsweise dort ausgesagt, wo eine unbestimmte, *veränderliche endliche* Größe vorkommt, die entweder über alle endlichen Grenzen hinaus wächst (unter diesem Bilde denken wir uns z. B. die sogenannte Zeit, von einem bestimmten Anfangsmomente an gezählt) oder unter jede endliche Grenze der Kleinheit abnimmt (was z. B. die legitime Vorstellung eines sogenannten Differentials ist); allgemeiner spreche ich von einem P.-U. überall da, wo eine *unbestimmte* Größe in Betracht kommt, die unzählig vieler Bestimmungen fähig ist.

II. Unter einem A.-U.² ist dagegen ein Quantum zu verstehen, das einerseits *nicht veränderlich*, sondern vielmehr in allen seinen Teilen fest und bestimmt, eine richtige *Konstante* ist, zugleich aber andererseits *jede endliche Größe* derselben Art an Größe übertrifft. Als Beispiel führe ich die Gesamtheit, den Inbegriff *aller* endlichen ganzen positiven Zahlen an; diese Menge ist *ein Ding für sich* und bildet, ganz abgesehen von der natürlichen Folge der dazu gehörigen Zahlen, ein in allen Teilen festes, bestimmtes Quantum, ein *ἀφωρισμένον*, das offenbar größer zu nennen ist als jede endliche Anzahl³. Ein anderes Beispiel ist die Gesamtheit *aller* Punkte, die auf einem

(Fortsetzung des Textes auf S. 404.)

¹ D. h. das potentiale Unendliche (*ἀπειρον*).

² D. h. das aktuelle Unendliche (*ἀφωρισμένον*).

³ Man vgl. die hiermit übereinstimmende Auffassung der ganzen Zahlenreihe als aktual-unendliches Quantum bei S. Augustin (De civitate Dei. lib. XII, cap. 19): Contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec Dei posse scientia comprehendi. Wegen der großen Bedeutung, welche diese Stelle für meinen Standpunkt hat, will ich sie wörtlich hier aufnehmen und behalte mir vor, dieselbe bei einer späteren Gelegenheit ausführlich zu besprechen. Das Kapitel lautet: „Illud autem aliud quod dicunt, nec Dei scientia quae infinita sunt posse comprehendi: restat eis, ut dicere audeant atque huic se voragini profundae inpietatis immergant, quod non omnes numeros Deus noverit. Eos quippe infinitos esse, certissimum est; quoniam in quocumque numero finem faciendum putaveris, idem ipse, non dico unum addito augeri, sed quamlibet sit magnus et quamlibet ingentem multitudinem continens, in ipsa ratione atque scientia numerorum non solum duplicari, verum etiam multiplicari potest. Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et dispaes inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt. Itane numeros propter infinitatem nescit omnes Deus, et usque ad quandam summam numerorum scientia Dei pervenit, ceteros ignorat? Quis hoc etiam dementissimus dixerit? Nec audebunt isti contemnere numeros et eos dicere ad Dei scientiam non pertinere, apud quos Plato Deum magna auctoritate commendat numeris mundum fabricantem. Et apud nos Deo dictum legitur: *Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti* (Sap. 11, 21); de quo et propheta dicit: *Qui profert numerose saeculum* (Esai. 40, 26) et Salvator in evangelio: *Capilli, inquit, vestri omnes numerati sunt* (Mt. 10, 30). Absit itaque ut dubitemus, quod est notus sit omnis numerus, *cujus intelligentiae* (absolutae), sicut in psalmo canitur, *non est numerus*

(Ps. 147, 5). *Infinitas itaque numeri, quamvis infinitorum numerorum nullus sit numerus [finitus], non est tamen incomprehensibilis ei, cujus intelligentiae [absolutae] non est numerus. Quapropter si, quidquid scientia comprehenditur, scientis comprehensione finitur: profecto et omnis infinitas quodam ineffabili modo Deo [de] finita [ἀφωσμητόν] est, quia scientiae ipsius incomprehensibilis non est. Quare si infinitas numerorum scientiae Dei, qua comprehenditur, esse non potest in [de] finita: qui tandem nos sumus homunculi, qui ejus scientiae limites figere praesumamus, dicentes quod, nisi eisdem circuitibus temporum eadem temporalia repetantur, non potest Deus cuncta quae facit vel praescire ut faciat, vel scire cum fecerit? cujus sapientia simpliciter multiplex et uniformiter multiformis tam incomprehensibili comprehensione omnia incomprehensibilia comprehendit, ut, quaecumque nova et dissimilia consequentia praecedentibus si semper facere vellet, inordinata et improvisa habere non posset, nec ea provideret ex proximo tempore, sed aeterna praescientia contineret.*“ An einzelnen Stellen habe ich (durch Klammern erkenntliche) Einschaltungen zu machen mir erlaubt, die den Sinn, welchen die betreffenden Worte an den betreffenden Stellen bei S. Augustin m. E. nach haben, deutlicher hervortreten lassen. Energischer, als dies hier von S. Augustin geschieht, kann das *Transfinitum* nicht verlangt, vollkommener nicht begründet und verteidigt werden. Denn, daß es sich bei der unendlichen Menge (ν) aller endlichen ganzen Zahlen ν nicht um das Absolut-Unendliche (IIb) handelt, wird wohl von niemandem in Zweifel gezogen werden.

Indem nun der h. Augustin die totale, intuitive Perzeption der Menge (ν), „quodam ineffabili modo“, a parte Dei behauptet, erkennt er zugleich diese Menge *formaliter* als ein aktual-unendliches Ganzes, als ein *Transfinitum* an, und wir sind gezwungen, ihm darin zu folgen. An dieser Stelle wird nun aber möglicherweise der Einwand erhoben werden, daß, wenn wir auch genötigt sind, die Menge (ν) als ein kategorialematisches Unendliches anzusehen, es uns andererseits nicht erlaubt ist, die dieser Menge entsprechende Ordnungszahl ω oder die ihr zukommende Kardinalzahl $\bar{\omega}$ in Betracht zu ziehen, und zwar sei uns dies aus dem Grunde nicht erlaubt, weil *wir* bei der Beschränktheit unsres Wesens nicht imstande sind, alle die unendlich vielen zur Menge (ν) gehörigen Zahlindividuen ν uno intuitu aktuell zu denken. Ich möchte nun aber denjenigen sehen, der etwa bei der *endlichen* Zahl „Tausendmal Million“ oder selbst bei noch viel kleineren Zahlen alle darin vorkommenden Einheiten uno intuitu distinkt und präzise sich vorstellen kann. Ein solcher lebt heutigestages unter uns ganz sicherlich *nicht*. Und trotzdem haben wir das Recht, die endlichen Zahlen, auch wenn sie noch so groß sind, als Gegenstände der *diskursiven, menschlichen* Erkenntnis anzusehen und sie wissenschaftlich nach ihrer Beschaffenheit zu untersuchen; *dasselbe Recht steht uns auch in bezug auf die transfiniten Zahlen zu.* Jenem Einwand gegenüber gibt es also nur eine Antwort: die Bedingung, welche Ihr selbst, sogar an den *kleinen, endlichen* Zahlen, nicht zu erfüllen und zu leisten imstande seid, dieselbe mutet Ihr uns zu in bezug auf die *unendlichen* Zahlen! Ist ein unbilligeres Verlangen von Menschen an Menschen jemals gestellt worden? Nach unsrer Organisation sind wir nur selten im Besitz eines Begriffes, von dem wir sagen könnten, daß er ein „conceptus rei proprius ex propriis“ wäre, indem wir durch ihn eine Sache adäquat, ohne Hilfe einer Negation, eines Symbols oder Beispiels, so auffassen und erkennen, wie sie an und für sich ist. Vielmehr sind wir beim Erkennen zumeist auf einen „conceptus proprius ex communibus“ angewiesen, welcher uns befähigt, ein Ding aus allgemeinen Prädikaten und mit Hilfe von Vergleichen, Ausschließungen, Symbolen oder Beispielen derartig zu bestimmen, daß es von jedem andern Ding wohlunterschieden ist. Man vergleiche z. B. die Methode, nach welcher ich in den „Grundlagen“ (1883) und schon früher in den Math. Ann. 5 (1871), die *irratio-*

nenen Zahlgrößen definiert habe. Ich gehe nun *so weit, unbedingt zu behaupten*, daß diese zweite Art der Bestimmung und Abgrenzung von Dingen für die *kleineren transfiniten Zahlen* (z. B. für ω oder $\omega + 1$ oder ω'' bei kleiner endlicher ganzer Zahl ν) eine *unvergleichlich einfachere, bequemere und leichtere* ist als für sehr große *endliche* Zahlen, bei denen wir gleichwohl auch nur auf dasselbe, unserer unvollkommenen Natur entsprechende Hilfsmittel angewiesen sind.

Im Gegensatz zu Augustin findet sich bei Origenes eine entschiedene Stellungnahme *gegen* das Aktual-Unendliche, und er geht hierin so weit, daß es fast scheinen möchte, er wolle selbst die Unendlichkeit Gottes nicht behauptet wissen. Denn er sagt, man dürfe nicht durch einen falschen Euphemismus (*εὐφημίας χάρις*) die Begrenzung (circumscriptio = *περιγραφή*) der göttlichen Kraft leugnen. Ich erinnere daran, daß *πέρας* im Griechischen Ziel, Grenze und Vollendung zugleich bedeutet: mit dem *ἄπειρον* verbindet sich daher eigentlich der Begriff des Unbestimmten, Unvollkommenen. Auch im Lateinischen kommt infinitum in dem Sinne „unbestimmt“ bei Cicero und Quintilian vor (z. B. *infinitior distributio partium*, ein logischer Fehler in der Rede; *infinitas quaestiones*, ungenau bestimmte Fragen usw.). Auch *finis* bezeichnet, wie *πέρας*, die Vollendung, so in dem bekannten Titel des Ciceronischen Werkes *de finibus bonorum*, bei Tacitus *finis aequi juris etc.*

In Origenes *de principiis* (*περὶ ἀρχῶν*), ed. Redepenning (in den griechisch erhaltenen Fragmenten S. 10, in der Übersetzung des Rufinus S. 214) heißt es wörtlich: „— *intueamur creaturae initium, quodcumque illud initium creantis Dei mens potuerit intueri. In illo ergo initio putandum est tantum numerum rationabilium creaturatum, vel intellectualium, vel quoquomodo appellandae sunt, quas mentes superius diximus, fecisse Deum quantum sufficere posse prospexit. Certum est quippe quod praefinito aliquo apud se numero eas fecit: non enim, ut quidam volunt, finem putandum est non habere creaturas; quia ubi finis non est, nec comprehensio ulla nec circumscriptio esse potest.* (Es ist höchst wahrscheinlich, daß jene Auseinandersetzung bei Augustin im *durchaus bewußten* Gegensatz zu dieser Stelle bei Origenes geschrieben worden ist.) *Quod si fuerit, utique nec contineri vel dispensari a Deo, quae facta sunt, poterunt. Naturaliter nempe quidquid infinitum (Origenes hat immer nur das ἄπειρον im Auge und sagt, wenn die göttliche Kraft ἄπειρος wäre, könnte Gott sich selbst nicht erkennen) fuerit, et incomprehensibile erit. Porro autem, sicut scriptura dicit: „In numero et mensura uniuersa“ (Sap. 11, 21) condidit Deus, et idcirco numerus quidem recte adaptabitur rationabilibus creaturis, vel mentibus, ut tantae sint, quantae a providentia Dei dispensari, regi et contineri possint. Mensura vero materiae corporali consequenter aptabitur: quam utique tantam a Deo esse creatam credendum est, quantum sibi sciret ad ornatum mundi posset sufficere (gr. *τοσαύτην ἔλην ὅσῃν ἠδύνατο κατακοσμήσαι*).“ Ich habe diese *tiefsinnige* Betrachtung des Origenes vollständig reproduziert, weil ich in ihr den *Ursprung* für die, wie ich anerkennen muß, *bedeutendsten* und *inhaltvollsten* Argumente erblicke, welche gegen das Transfinitum zur Geltung gebracht worden sind. Man findet dieselben oft wiederholt; ich will sie in der vollendetsten Form, die ihnen gegeben worden ist, hier anführen. In der S. Thomasschen *Summa theol.* I, q. 7, a. 4 heißt es: „1) *Multitudinem actu infinitam dari, impossibile est, quia omnem multitudinem oportet esse in aliqua specie multitudinis. Species autem multitudinis sunt secundum species numerorum. Nulla autem species numeri est infinita, quia quilibet numerus est multitudo mensurata per unum. Unde impossibile est esse multitudinem infinitam actu; sive per se, sive per accidens.* 2) *Item omnis multitudo in rerum natura existens est creata; et omne creatum sub aliqua certa intentione creantis comprehenditur, non enim in vanum agens aliquod operatur.* Unde necesse est quod sub certo numero omnia creata*

gegebenen Kreise (oder irgendeiner andern bestimmten Kurve) liegen. Ein drittes Beispiel ist die Gesamtheit aller streng punktartig vorzustellenden Monaden, welche zum Phänomen eines vorliegenden Naturkörpers als konstitutive Bestandteile beitragen.

Aus der Definition I folgt, daß Sie vollkommen Recht haben, wenn Sie fragen: „wäre es nicht besser, für das P.-U. den Ausdruck *Unendliches* ganz fallen zu lassen?“

Allerdings ist das P.-U. eigentlich kein Unendliches, darum habe ich es in meinen „Grundlagen“ *uneigentliches* Unendliches genannt. Doch wird es schwer sein, den betreffenden Gebrauch zu beseitigen, um so schwerer, als das P.-U. der leichtere, angenehmere, oberflächlichere, unselbständigere Begriff und die schmeichlerische Illusion zumeist mit ihm verknüpft ist, als hätte man daran was Rechtes, was richtig Unendliches; während doch in Wahrheit das P.-U. nur eine geborgte Realität hat, indem es stets auf ein A.-U. hinweist, durch welches es erst möglich wird. Daher das dem P.-U. von den Scholastikern zutreffend gegebene Epitheton: *συνκατηγορηματικως*.

Sehen wir uns ferner die Definition II an, so folgt zunächst, daß daraus *mit nichten* geschlossen werden kann, daß das A.-U. seiner Größe nach *unvermehrbar sein müsse*; eine irrige Annahme, die nicht nur in der *alten* und in der sich an sie anschließenden *scholastischen*, sondern auch in der *neueren* und *neuesten* Philosophie, man kann fast sagen, allgemein ver-

comprehendantur. Impossibile est ergo esse multitudinem infinitam in actu, etiam per accidens.“

Dies sind die beiden gewichtigsten Gründe, welche im Laufe der Zeiten gegen das Transfinitum vorgeführt worden sind; alle anderen Argumente, die man ausgesprochen findet, lassen sich verhältnismäßig leicht *negativ* entkräften, indem man bemerkt, daß sie auf einem Fehler im Schließen beruhen. *Diese beiden Gründe* dagegen sind *sehr wohl* fundiert und konnten *nur positiv* gelöst und erledigt werden, *indem man bewies und zeigte*, daß die *transfiniten Zahlen und Ordnungstypen im Reiche des Möglichen ebensowohl existieren*, wie die *endlichen Zahlen* und daß *im Transfiniten sogar ein weitaus größerer Reichthum an Formen und an „species numerorum“ vorhanden und gewissermaßen aufgespeichert ist*, als in dem *verhältnismäßig kleinen Felde des unbeschränkten Endlichen*. Daher standen die *transfiniten Spezies den Intentionen des Schöpfers und seiner absolut unermesslichen Willenskraft ganz ebenso verfügbar zu Gebote*, wie die *endlichen Zahlen*. Man möchte glauben, daß S. Thomas diesen Zusammenhang geahnt oder sogar gekannt und durchschaut und eben darum es verschmäht hat, die anderen, *federleichter* Argumente gegen die aktual-unendlichen Größen und Zahlen, welche sich unter anderem auch in den Schriften seines Lehrers Albertus Magnus finden, zu reproduzieren. Er blieb und bestand *mit großem Recht* auf jenen *inhaltvollen und gewichtigen zwei* Gründen, die *nur positiv* gelöst werden konnten; gab aber die übrigen Gründe durchaus gern auf in dem berühmten Ausruf gegen die Murmurantes: „*Praeterea adhuc non est demonstratum, quod Deus non possit facere ut sint infinita actu.*“ (Opusc. de aeternitate mundi.)

breitet ist¹. Vielmehr sind wir hier genötigt, eine *fundamentale Distinktion* zu machen, indem wir unterscheiden:

II^a Vermehrbares A.-U. oder *Transfinitum*.

II^b Unvermehrbares A.-U. oder *Absolutum*.

Die vorhin für das A.-U. angeführten drei Beispiele gehören sämtlich in die Klasse II^a des Transfiniten. Ebenso gehört hierher *die kleinste überendliche Ordnungszahl*, welche ich mit ω bezeichne; denn sie kann zur nächst größeren Ordnungszahl $\omega + 1$, diese wieder zu $\omega + 2$ usw. vergrößert resp. vermehrt werden. Aber auch die *kleinste aktual-unendliche Mächtigkeit oder Kardinalzahl* ist ein Transfinitum, und das gleiche gilt von der nächst größeren Kardinalzahl usw.

Das *Transfinitum* mit seiner Fülle von Gestaltungen und Gestalten weist mit Notwendigkeit auf ein *Absolutes* hin, auf das „wahrhaft Unendliche“, an dessen Größe keinerlei Hinzufügung oder Abnahme statthaben kann und welches daher quantitativ als *absolutes Maximum* anzusehen ist. Letzteres übersteigt gewissermaßen die menschliche Fassungskraft und entzieht sich namentlich mathematischer Determination; wogegen das *Transfinitum* nicht nur das weite Gebiet des Möglichen in Gottes Erkenntnis erfüllt, sondern

¹ Da ich seit vier Jahren, nach Publikation der „Grundlagen“, Zeit gefunden habe, mich in der Literatur der alten und der scholastischen Philosophie etwas genauer umzusehen, so weiß ich nun auch, daß das A.-U. in natura creata zu allen Zeiten seine Verteidiger innerhalb der christlichen Spekulation gehabt hat. Durch Bayles Dictionnaire bin ich vor etwa drei Jahren unter anderem auf den hervorragenden *Franziskanermönch* R. P. Emanuel Maignan* aus Toulouse (Cursus philosophicus, Lugduni, 1673) aufmerksam geworden, der dem kategorematischen Unendlichen eine sehr weite Sphäre zuweist. Darin schließt sich ihm an sein Schüler, der Franziskaner R. P. Joh. Saguens (vgl. dessen Werk: De perfectionibus divinis. Coloniae 1718). Von den Nominalisten (im Anschluß an Avicenna) soll der weitaus größte Teil die „unendliche Zahl“ behauptet haben. Dasselbe wird den *Scotisten* nachgesagt. Der R. P. T. Pesch führt in seinen Inst. phil. nat. § 409 unter den Verteidigern der Möglichkeit der unendlichen Zahlen auch folgende Autoren an: Gabriel Vasquez (Comm. in Summ. p. 1, d. 26, c. 1), Hurtado (Phys. d. 13, § 16), Arriaga (Phys. d. 13. n. 32) und Oviedo (Phys. controv. 14, punct. 4, n. 6; punct. 5). Einen vermittelnden Standpunkt findet man bei den *Conimbrienses* (Phys. l. 3, c. 8, q. 2) und bei Amicus (Phys. tr. 18, q. 6, dub. 2).

* Die Bezeichnung Emanuel Maignans (er lebte von 1601 bis 1676) als eines *Franziskanermönches* ist nicht ganz zutreffend, da hierunter die dem Orden des S. Franciscus von Assisi angehörigen sogenannten *Minoriten* oder *Seraphischen Brüder* gewöhnlich verstanden werden. E. M. war aber (ebenso wie der als Freund des Cartesius bekannte Pater Mersenne) ein *Minime*, d. h. Angehöriger eines von Franciscus von Paula († 1507) im Jahre 1435 gestifteten, die Strenge des Franziskanerordens, an den er sich sonst anschloß, durch Enthaltung von allem Fleisch überbietenden Mönchsordens.

Ich verdanke diese Berichtigung der Güte des R. P. Ignatius Jeiler, O. S. Franz. Präfekten des Coll. S. Bonaventurae in Brozzi per Quaracchi, bei Florenz.

auch ein reiches, stets zunehmendes Feld idealer Forschung darbietet und meiner Überzeugung nach auch in der Welt des Geschaffenen bis zu einem gewissen Grade und in verschiedenen Beziehungen zur Wirklichkeit und Existenz gelangt, um die Herrlichkeit des Schöpfers, nach dessen absolut freiem Ratschluß, stärker zum Ausdruck zu bringen, als es durch eine bloß „endliche Welt“ hätte geschehen können. Dies wird aber auf allgemeine Anerkennung noch lange zu warten haben, zumal bei den *Theologen*, so wertvoll auch diese Erkenntnis als Hilfsmittel zur Förderung der von ihnen vertretenen Sache (der Religion) sich erweisen würde.

Endlich habe ich Ihnen noch zu erklären, in welchem Sinne ich das *Minimum* des Transfiniten als *Grenze des wachsenden Endlichen* auffasse. Dazu beachte man, daß der Begriff „Grenze“ im Gebiete *endlicher Zahlen* zwei wesentliche Merkmale hat, welche hier reziprok auseinander folgen. Die Zahl 1 z. B. ist die Grenze der Zahlen $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$ (wo ν eine veränderliche endliche ganze, über alle endliche Grenzen hinaus wachsende Zahl bedeutet) und bietet als *Grenze* folgende zwei *auseinander ableitbare* Merkmale dar:

Erstens ist die Differenz $1 - z_\nu = \frac{1}{\nu}$ eine unendlich klein werdende Größe, d. h. die Zahlen z_ν nähern sich der Grenze 1 bis zu beliebiger Nähe.

Zweitens ist 1 die *kleinste von allen Zahlgrößen, welche größer sind als alle Größen z_ν* ; denn nimmt man irgendeine Größe $1 - \varepsilon$, die kleiner ist als 1, so wird $1 - \varepsilon$ zwar größer sein als einige der z_ν ; aber von einem gewissen ν an, nämlich für $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$, wird immer $z_\nu > 1 - \varepsilon$ sein; es ist also 1 das *Minimum* aller Zahlgrößen, die größer sind als alle z_ν .

Von diesen zwei Merkmalen charakterisiert, wie gesagt, jedes für sich vollständig die *endliche* Zahl 1 als *Grenze* der veränderlichen Größe $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$.

Will man nun den Begriff der Grenze auch auf transfinite Grenzen ausdehnen, so dient dazu nur *das zweite* der soeben angeführten Merkmale, das erste muß hier fallen gelassen werden, weil es nur für endliche Grenzen Bedeutung, für transfinite aber keinen Sinn hat.

Darnach nenne ich beispielsweise ω die „Grenze“ der endlichen wachsenden ganzen Zahlen ν , weil ω die *kleinste* von allen Zahlen ist, die größer sind als alle endlichen Zahlen ν ; genau ebenso wie 1 als die kleinste von allen Zahlen gefunden wird, die größer sind als alle Größen $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$; jede kleinere Zahl als ω ist eine endliche Zahl und wird von anderen endlichen Zahlen ν der Größe nach übertroffen. Dagegen ist hier $\omega - \nu$ stets gleich ω , und man kann also nicht sagen, daß die wachsenden endlichen Zahlen ν ihrem Ziele ω beliebig nahe kommen; vielmehr bleibt jede noch so große Zahl ν von ω *ebensoweit* entfernt wie die kleinste endliche Zahl.

Es tritt hier besonders deutlich der überaus wichtige und entscheidende Umstand hervor, daß meine kleinste transfiniten Ordnungszahl ω und folglich auch alle größeren Ordnungszahlen *gänzlich außerhalb der endlosen Zahlenreihe* 1, 2, 3, usw. liegen. Das ω ist *nicht* etwa *Maximum* der endlichen Zahlen (ein solches gibt es ja nicht), sondern ω ist das *Minimum aller unendlichen* Ordnungszahlen. Es war das unglückliche Versehen Fontenelles¹, das Transfiniten *innerhalb* der Zahlenreihe 1, 2, 3, . . . , ν , . . . , wenn auch gewissermaßen am Schluß derselben (der ihr aber ja fehlt) zu suchen; indem er auf diese Weise seinen unendlichen Zahlen von vornherein einen unlösbaren Widerspruch mitgab, war das Schicksal seiner unfruchtbaren Theorie entschieden; sie mußte vor einer durchaus berechtigten Kritik² das Feld räumen. Wenn aber letztere durch die Totgeburt der Fontenelleschen unendlichen Zahlen sich außerdem verleiten ließ, über die aktual-unendlichen Zahlen ganz allgemein den Stab zu brechen, so weiß ich, daß sie ihrerseits durch die Tatsache meiner, von der Fontenelleschen total verschiedenen, vollständig widerspruchsfreien Theorie *widerlegt* ist.

VI³.

Sie erwähnen in Ihrem Schreiben die Frage über die aktual *unendlich kleinen* Größen. An mehreren Stellen meiner Arbeiten werden Sie die Ansicht ausgesprochen finden, daß dies *unmögliche*, d. h. *in sich widersprechende* Gedankendinge sind, und ich habe schon in meinem Schriftchen „Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre“ pag. 8 im § 4, wenn auch damals noch mit einer gewissen Reserve, angedeutet, daß die strenge Begründung dieser Position aus der Theorie der transfiniten Zahlen herzuleiten wäre. Erst in diesem Winter fand sich die Zeit dazu, meine diesen Gegenstand betreffenden Ideen in die Gestalt eines förmlichen Beweises zu bringen. Es handelt sich um den Satz:

„Von Null verschiedene lineare Zahlgrößen ζ (d. h. kurz gesagt, solche Zahlgrößen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellen lassen), welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlgröße, gibt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröße.“ Der Gedankengang meines Beweises ist einfach folgender: ich gehe von der *Voraussetzung* einer linearen Größe ζ aus, die so klein sei, daß ihr n -faches

$$\zeta \cdot n$$

¹ Man vgl. Fontenelle: *Éléments de la Géométrie de l'infini*. Paris 1727.

² Man vgl. Maclaurin: *Traité des Fluxions*. Traduction du R. P. Pezenas, t. I introduction pag. XLI. Paris 1749; ferner Gerdil: *Opere edite ed ined.* t. IV, pag. 261; t. V, p. 1. Rome 1806.

³ Das Folgende findet sich fast übereinstimmend in zwei Briefen; der eine vom 13. Mai 1887 ist an Herrn Gymnasiallehrer F. Goldscheider in Berlin, der andere vom 16. Mai 1887 an Herrn Professor Dr. K. Weierstraß von mir geschrieben worden.

für *jede noch so große endliche ganze Zahl n* kleiner ist als die Einheit, und beweise nun aus dem Begriff der linearen Größe und mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre, daß alsdann auch

$$\zeta \cdot \nu$$

kleiner ist als *jede noch so kleine endliche Größe*, wenn ν irgendeine noch so große *transfinit*e Ordnungszahl (d. h. Anzahl oder Typus einer wohlgeordneten Menge) aus irgendeiner noch so hohen Zahlenklasse bedeutet. Dies heißt aber doch, daß ζ *auch durch keine noch so kräftige actual unendliche Vervielfachung endlich* gemacht werden, also sicherlich nicht *Element* endlicher Größen sein kann. Somit widerspricht die gemachte Voraussetzung dem Begriff linearer Größen, welcher derartig ist, daß nach ihm jede lineare Größe als integrierender Teil von anderen, im besonderen von endlichen linearen Größen gedacht werden muß. Es bleibt also nichts übrig, als die Voraussetzung fallen zu lassen, wonach es eine Größe ζ gäbe, die für jede endliche ganze Zahl n kleiner wäre als $\frac{1}{n}$, und hiermit ist unser Satz bewiesen. [1]

Es scheint mir dies eine wichtige Anwendung der transfiniten Zahlenlehre zu sein, ein Resultat, welches alte, weit verbreitete und tiefwurzelnde Vorurteile zu beseitigen geeignet ist.

Die Tatsache der aktual-unendlich großen Zahlen ist also so wenig ein Grund für die Existenz aktual-unendlich kleiner Größen, daß vielmehr gerade mit Hilfe der ersteren die Unmöglichkeit der letzteren bewiesen wird.

Ich glaube auch nicht, daß man dieses Resultat auf anderem Wege *voll und streng* zu erreichen imstande ist.

Das *Bedürfnis* unseres Satzes ist besonders einleuchtend gegenüber neueren Versuchen von O. Stolz und P. Dubois-Reymond, welche darauf ausgehen, die Berechtigung aktual-unendlich kleiner Größen aus dem sogenannten „Archimedischen Axiom“ abzuleiten. (Vgl. O. Stolz, Math. Annalen Bd. 18, S. 269; ferner seine Aufsätze in den Berichten des naturw. medicin. Vereines in Innsbruck, Jahrgänge 1881—82 und 1884; sie sind betitelt: „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes“ und: „Die unendlich kleinen Größen“; endlich vergleiche man desselben Autors: „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“, Leipzig 1885, I. Teil, S. 205.)

Archimedes scheint nämlich zuerst darauf aufmerksam geworden zu sein, daß der in Euklids Elementen gebrauchte Satz, wonach aus jeder noch so kleinen begrenzten geradlinigen Strecke durch *endliche, hinreichend große* Vervielfachung *beliebig große endliche* Strecken erzeugt werden können, eines Beweises bedürftig sei, und er glaubte darum diesen Satz als „Annahme“ (*λαμβάνόμενον*) bezeichnen zu sollen.

(Vgl. Eukl. *Elem.* lib. V, def. 4: *λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μερέδη λέγεται, ἃ δύνανται πολλαπλασιαζόμενα ἄλληλων ὑπερέχειν*; ferner insbesondere *Elem.* lib. X, pr. 1. Archimedes: de sphaera et cylindro I, postul. 5 und die Vorrede zu seiner Schrift: de quadratura parabolae.)

Nun ist der Gedankengang jener Autoren (O. Stolz a. a. O.) der, daß wenn man dieses vermeintliche „Axiom“ fallen ließe, daraus ein Recht auf aktual unendlich-kleine Größen, welche dort „Momente“ genannt werden, hervorgehen würde. Aber aus dem oben von mir angeführten Satze folgt, wenn er auf geradlinige stetige Strecken angewandt wird, unmittelbar die *Notwendigkeit der Euklidischen Annahme*. Also ist das sogenannte „Archimedische Axiom“ *gar kein Axiom, sondern ein, aus dem linearen Größenbegriff mit logischem Zwang folgender Satz*.

VII.¹

Wenn man sich über den Ursprung des weitverbreiteten Vorurteils gegen das aktuelle Unendliche, des horror infiniti in der Mathematik volle Rechenschaft geben will, so muß man vor allem den Gegensatz scharf ins Auge fassen, der zwischen dem aktualen und potentialen Unendlichen besteht. Während das potentiale Unendliche nichts anderes bedeutet als eine unbestimmte, stets endlich bleibende, veränderliche Größe, die Werte anzunehmen hat, welche entweder kleiner werden als jede noch so kleine, oder größer werden als jede noch so große endliche Grenze, bezieht sich das aktuelle Unendliche auf ein in sich festes, konstantes Quantum, das größer ist als jede endliche Größe derselben Art. So stellt uns beispielsweise eine veränderliche Größe x , die nacheinander die verschiedenen endlichen ganzen Zahlwerte $1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ anzunehmen hat, ein potentiales Unendliches vor, wogegen die durch ein Gesetz begrifflich durchaus bestimmte Menge (ν) aller ganzen endlichen Zahlen ν das einfachste Beispiel eines aktual-unendlichen Quantums darbietet.

Die wesentliche Verschiedenheit, welche hiernach zwischen den Begriffen des potentialen und aktualen Unendlichen besteht, hat es merkwürdigerweise nicht verhindert, daß in der Entwicklung der neueren Mathematik mehrfach Verwechslungen beider Ideen vorgekommen sind, derart, daß in Fällen, wo nur ein potentiales Unendliches vorliegt, fälschlich ein Aktual-Unendliches angenommen wird, oder daß umgekehrt Begriffe, welche nur vom Gesichtspunkte des aktualen Unendlichen einen Sinn haben, für ein potentiales Unendliches gehalten werden.

¹ Dieser Brief ist im Mai 1886 an Herrn S. Giulio Vivanti in *Mantua* gerichtet worden. Sein Inhalt ist in den letzten Abschnitt des Aufsatzes: Über die verschiedenen Ansichten in bezug auf die aktual-unendlichen Zahlen in Bihang till. K. Svenska Vet. Akad. Hdl. 11, Nr 19 aufgenommen worden.

Beide Arten der Verwechslung müssen als Irrtümer betrachtet werden.

Die erste tritt unter anderem dort auf, wo man, wie es z. B. Poisson (*Traité de Mécanique*, 2. e édit. t. I, p. 14) getan hat, die sogenannten Differentiale als aktual-unendlich kleine Größen auffaßt, obgleich sie nur die Deutung veränderlicher, beliebig klein anzunehmender Hilfsgrößen zulassen, wie schon von beiden Entdeckern der Infinitesimalrechnung, Newton und Leibniz bestimmt ausgesprochen worden ist. Dieser Irrtum kann, dank Ausbildung der sogenannten Grenzmethode, an welcher die französischen Mathematiker unter Führung des großen Cauchy so ruhmvoll beteiligt sind, wohl als überwunden angesehen werden.

Um so mehr scheint mir aber in der Gegenwart die Gefahr des andern Fehlers zu drohen, welcher darin besteht, von dem Aktual-Unendlichen nichts wissen zu wollen und es auch dort zu verleugnen, wo keine Möglichkeit vorhanden ist, ohne einen richtigen Gebrauch desselben den Dingen auf den Grund zu kommen.

Hier ist in erster Linie die Theorie der irrationalen Zahlgrößen anzuführen, deren Begründung nicht durchführbar ist, ohne daß das A.-U. in irgendeiner Form herangezogen wird. Daß diese Heranziehung auf mehreren Wegen geschehen kann, findet sich in § 9 der „*Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*“ kurz auseinander gesetzt. Ich habe mich dazu schon früher (*Math. Ann.* Bd. 5, S. 123) [II 5, S. 92] besonderer aktual-unendlicher Mengen rationaler Zahlen bedient, welche ich *Fundamentalfolgen* nenne. Herr E. Heine ist mir darin gefolgt (*Crelles Journ.* Bd. 74, S. 172); seine Abweichungen beziehen sich nur auf die Ausdrucksweise, in der Sache stimmt er mit mir ganz überein. Ich erwähne hier den eigentümlichen, meines Erachtens rückschrittlichen Versuch des Herrn Molk (*Acta math.* t. VI), die irrationalen Zahlen gänzlich aus dem Gebiet der höheren Arithmetik zu vertreiben; Herr Kronecker geht sogar noch weiter und will diese Zahlen auch in der Funktionentheorie nicht dulden, aus welcher er sie *durch höchst künstliche Subsidiärtheorien* zu verdrängen sucht; es bleibt abzuwarten, welchen Erfolg und welche Dauer diese unnötigen Bemühungen haben werden. (Vgl. *Crelle J.* Bd. 99, S. 336.)

Man kann aber noch aus einem andern Gesichtspunkte das Vorkommen des Aktual-Unendlichen und seine Unentbehrlichkeit sowohl in der Analysis, wie auch in der Zahlentheorie und Algebra unwiderleglich dartun. Unterliegt es nämlich keinem Zweifel, daß wir die *veränderlichen* Größen im Sinne des potentialen Unendlichen nicht missen können, so läßt sich daraus auch die Notwendigkeit des Aktual-Unendlichen folgendermaßen beweisen: Damit eine solche veränderliche Größe in einer mathematischen Betrachtung verwertbar sei, muß strenggenommen das „Gebiet“ ihrer Veränderlichkeit durch eine Definition vorher bekannt sein; dieses „Gebiet“ kann aber nicht

selbst wieder etwas Veränderliches sein, da sonst jede feste Unterlage der Betrachtung fehlen würde; also ist dieses „Gebiet“ eine bestimmte aktual-unendliche Wertmenge.

So setzt jedes potentiale Unendliche, soll es streng mathematisch verwendbar sein, ein Aktual-Unendliches voraus.

Diese „Gebiete der Veränderlichkeit“ sind die eigentlichen Grundlagen der Analysis sowohl wie der Arithmetik und sie verdienen es daher in hohem Grade, selbst zum Gegenstand von Untersuchungen genommen zu werden, wie dies von mir in der „Mengenlehre“ (théorie des ensembles) geschehen ist.

Hat aber hiermit das Aktual-Unendliche in Form aktual-unendlicher *Mengen* sein Bürgerrecht in der Mathematik geltend gemacht, so ist die Forderung eine unabweisliche geworden, auch den aktual-unendlichen *Zahlbegriff* durch geeignete *naturgemäße Abstraktionen* auszubilden, ähnlich wie die endlichen *Zahlbegriffe*, das Material der bisherigen Arithmetik, durch Abstraktion aus endlichen Mengen gewonnen worden sind. Dieser Gedankengang hat mich auf die *transfinite Zahlenlehre* geführt, deren Anfänge sich in den „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre“ vorfinden.

VIII.¹

1. Abstrahieren wir bei einer gegebenen Menge M , welche aus bestimmten, wohlunterschiedenen konkreten Dingen oder abstrakten Begriffen, welche Elemente der Menge genannt werden, besteht und als ein Ding für sich gedacht wird, sowohl von der Beschaffenheit der Elemente wie auch von der Ordnung ihres Gegebenseins, so entsteht in uns ein bestimmter Allgemeinbegriff (universale, unum versus alia, in der Bedeutung: unum aptum inesse multis)², den ich die *Mächtigkeit* von M oder die der Menge M zukommende *Kardinalzahl* nenne. Ich setze fest, daß \overline{M} ein Zeichen für die Mächtigkeit von M sei. Die *zwei* Striche über dem M sollen andeuten, daß an M ein *zwei-*

¹ Dieser Abschnitt VIII gibt einen kurzen Abriss der Fundamente der *Theorie der Ordnungstypen*; er ist der Hauptsache nach vor bald drei Jahren verfaßt worden und schon damals zur Aufnahme in ein andres Journal bestimmt gewesen. Nachdem der erste Bogen bereits gesetzt war, machten sich zu meiner Überraschung Opportunitätsrück-sichten geltend, die mich bestimmten, den Aufsatz zurückzuziehen. Habent sua fata libelli.

² Man vgl. P. Matth. Liberatore S. J.: Inst. philos., 2a ed. novae formae, vol. 1, Logica pars II, 104. Paris 1883. Allen, welche gern oder ungerne sich ein getreues Bild von der thomistischen Philosophie verschaffen wollen, kann ich dieses billige Werk (2 vol. 8 Fr. 50 cent) als die m. E. vorzüglichste Einführung in dieses System empfehlen. Von demselben Autor existieren noch ein kürzeres einbändiges Handbuch: Comp. Logicae et Metaphysicae, 2a ed., Napoli 1869 (4 Fr. 30 Cent) und andere geistvolle, sorgfältigst gearbeitete Schriften, unter denen ich noch das Werk: Della conoscenza intellettuale, 3a ed., hervorhebe.

facher Abstraktionsakt vollzogen ist, sowohl in bezug auf die Beschaffenheit der Elemente, wie auch in bezug auf ihre Ordnung zueinander. In Nr. 9 wird uns die Bezeichnung \bar{M} mit *nur einem* Strich für dasjenige universale begegnen, welches aus M hervorgeht, wenn daran nur die erstere Art der Abstraktion ausgeübt wird. Die Elemente behalten hierbei auch im Begriff diejenige Ordnung zueinander, mit welcher sie in concreto in M gedacht werden; so wird dasjenige gewonnen werden, was ich den *Ordnungstypus* von M nenne. Zunächst bleiben wir jedoch bei den *Kardinalzahlen*.

2. Zwei bestimmte Mengen M und M_1 nennen wir *äquivalent* (in Zeichen: $M \sim M_1$), wenn es möglich ist, dieselben gesetzmäßig, gegenseitig eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuzuordnen.

Ist $M \sim M_1$ und $M_1 \sim M_2$, so ist auch $M \sim M_2$.

Beispiele. a) Die Menge der *Regenbogenfarben* (Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau, Indigo, Violett,) und die Menge der *Tonstufen* (C, D, E, F, G, A, H) sind äquivalente Mengen und stehen beide unter dem Allgemeinbegriff *Sieben*.

b) Die Menge der *Finger* meiner *beiden Hände* und die Menge der *Punkte* in dem sog. *arithmetischen Dreieck* \therefore (M. v. Pascal, Oeuvres compl. Paris, 1877, Hachette & Cie., tom. III, pag. 243: *Traité du triangle arithmétique*) sind äquivalent; ihnen kommt die Kardinalzahl *Zehn* zu.

c) Die aktual-unendliche Menge (ν) aller positiven, endlichen ganzen Zahlen ν ist äquivalent der Menge ($\mu + \nu i$) aller komplexen ganzen Zahlen von der Form $\mu + \nu i$, wo μ und ν unabhängig voneinander alle ganzzahligen positiven Werte erhalten; diese beiden Mengen sind äquivalent der Menge $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ aller positiven rationalen Zahlen $\frac{\mu}{\nu}$, wo μ und ν relativ prim zueinander sind; letzteres erscheint um so merkwürdiger, als die den rationalen Zahlen entsprechenden sog. rationalen Punkte einer Geraden in dieser „überalldicht“ liegen (vgl. Math. Ann. Bd. 15, S. 2) [hier S. 140], während die den ganzen Zahlen ν entsprechenden Punkte der Geraden in Abständen von der Größe der zugrunde gelegten Längeneinheit aufeinander folgen. Aber auch der Inbegriff aller sog. *algebraischen* Zahlen hat, wie ich bewiesen habe, *nur* die Mächtigkeit des Inbegriffs (ν), welches die *kleinste* Mächtigkeit ist von allen, die bei aktual-unendlichen Mengen überhaupt vorkommen.

d) Dagegen ist die Menge *aller reellen* (d. h. der rationalen und irrationalen, der algebraischen und transzendenten) Zahlgrößen *nicht* äquivalent der Menge (ν), wie ich zuerst in Bd. 77 von Crelles J. [III 1, S. 115] und später noch einmal in Bd. 15 der Math. Ann. [III 4, S. 143] und in Acta math. Bd. 2 bewiesen habe. Wohl ist aber auch der nicht weniger merkwürdige Satz von mir bewiesen worden, daß sog. *n-dimensionale* stetige Gebilde hinsichtlich ihres Punktbestandes *äquivalent* sind dem Linear-

kontinuum, also mit diesem *gleiche*, von (\bar{v}) verschiedene Mächtigkeit haben. [Vgl. hier III 2) S. 119.]

3. Aus Nr. 1 und 2 wird bewiesen, daß äquivalente Mengen immer eine und dieselbe Mächtigkeit oder Kardinalzahl haben und daß auch umgekehrt Mengen von derselben Kardinalzahl äquivalent sind. In Zeichen können wir diesen Doppelsatz so formulieren: Ist $M \sim M_1$, so ist auch $\bar{M} = \bar{M}_1$ und umgekehrt¹.

Die Kenntnis nur eines *Zuordnungsgesetzes* für zwei Mengen M und M_1 genügt, um die Äquivalenz derselben zu konstatieren; doch gibt es immer viele, im allgemeinen sogar unzählig viele Zuordnungsgesetze, durch welche zwei äquivalente Mengen in gegenseitig eindeutige und vollständige Beziehung zueinander gebracht werden können.

4. Steht es nach irgendeinem Beweise fest, daß zwei gegebene Mengen M und N *nicht* äquivalent sind, so tritt einer von folgenden zwei Fällen ein: *entweder* es läßt sich aus N ein Bestandteil N' absondern, so daß $M \sim N'$ oder es läßt sich aus M ein Bestandteil M' absondern, so daß $M' \sim N$. Im *ersten* Falle heißt \bar{M} kleiner als \bar{N} , im *zweiten* nennen wir \bar{M} größer als \bar{N} .

Hier kann nicht genug betont werden, daß das exklusive Verhalten der beiden Fälle, welches der Definition des Größer- und Kleinerseins bei *Kardinalzahlen* zugrunde liegt, wesentlich von der gemachten Voraussetzung abhängt, daß M und N *nicht* gleiche Mächtigkeit haben. Sind nämlich die beiden Mengen äquivalent, dann kann es sehr wohl vorkommen, daß Bestandteile M' und N' derselben existieren, für welche sowohl $\bar{M} = \bar{N}'$, wie auch $\bar{M}' = \bar{N}$. Man hat den Satz: sind M und N zwei solche Mengen, daß Bestandteile M' und N' von ihnen abgesondert werden können, von denen sich zeigen läßt, daß $\bar{M} = \bar{N}'$ und $\bar{M}' = \bar{N}$, so sind M und N äquivalente Mengen.

¹ Die Kardinalzahl \bar{M} einer Menge M bleibt nach 1. ungeändert dieselbe, wenn an Stelle der Elemente m, m', m'', \dots von M andere Dinge substituiert werden. Ist nun $M \sim M_1$, so existiert ein Zuordnungsgesetz, durch welches den Elementen m, m', m'', \dots von M die Elemente m_1, m'_1, m''_1, \dots von M_1 entsprechen; man kann sich an die Stelle der Elemente m, m', m'', \dots in M mit einem Male die Elemente m_1, m'_1, m''_1, \dots von M_1 substituiert denken; dadurch geht die Menge M in M_1 über, und da bei diesem Übergange an der Kardinalzahl nichts geändert wird, so ist $\bar{M}_1 = \bar{M}$.

Die Umkehrung dieses Satzes ergibt sich aus der Bemerkung, daß zwischen den Elementen einer Menge M und den Einsen ihrer Kardinalzahl \bar{M} ein gegenseitig eindeutiges und vollständiges Zuordnungsverhältnis besteht, so daß wir sagen können, es ist: $M \sim \bar{M}$. Hat man daher zwei Mengen M und M_1 mit *gleicher* Kardinalzahl, so ist letztere sowohl der Menge M wie auch der Menge M_1 äquivalent; folglich sind auch M und M_1 äquivalent; denn es besteht der Satz: sind zwei Mengen einer dritten äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent. [Vgl. III 9, S. 283—285 und die bezügliche Anmerkung S. 351.]

5. Die durch Vereinigung zweier Mengen M und N hervorgehende Menge werde mit $M + N$ bezeichnet, wo später das Nähere über die Ordnung der Elemente in dieser neuen Menge gesagt werden wird, auf welche Ordnung es ja hier bei den Kardinalzahlen nicht ankommt. Hat man zwei andere Mengen M' und N' , so daß $M \sim M'$ und $N \sim N'$, so sieht man leicht, daß auch $M + N \sim M' + N'$, sofern die Summanden keine gemeinsamen Elemente haben.

Auf diesen Satz wird die Definition der *Summe* zweier und folglich auch mehrerer *Kardinalzahlen* oder *Mächtigkeiten* gegründet: ist $a = \overline{M}$ und $b = \overline{N}$, so versteht man unter $a + b$ diejenige Kardinalzahl, welche der Menge $M + N$ zukommt, d. h. man definiert:

$$a + b = M + N.$$

Das *kommutative* Gesetz ($a + b = b + a$) und das *assoziative* Gesetz ($a + (b + c) = (a + b) + c$) bedürfen, wie man sich leicht überzeugt, *hier bei den Kardinalzahlen keiner weitläufigen Beweise*, weil die Kardinalzahl durch den Abstraktionsakt, welcher sie liefert (m. v. Nr. 1), von vornherein von der Ordnung ihrer Elemente *unabhängig ist*.

6. Sind M und N zwei Mengen, so verstehe man unter $M \cdot N$ irgendeine dritte Menge, die dadurch aus N hervorgeht, daß man *an Stelle jedes* einzelnen Elementes von N je eine Menge setzt, die äquivalent ist der Menge M ; über die Ordnung der Elemente dieser neuen Menge wird erst in Nr. 11 eine Bestimmung getroffen werden; hier kommt es darauf nicht an. Man beweist nun sehr leicht, daß *alle* nach dem bezeichneten Modus zu gewinnenden Mengen $M \cdot N$ untereinander äquivalent sind, und gründet hierauf die Definition des Produkts zweier Kardinalzahlen. Ist a die Mächtigkeit von M , b die von N , so definiert man:

$$a \cdot b = \overline{M \cdot N}.$$

a heißt der *Multiplikandus*, b der *Multiplikator* in diesem Produkt.

Auch hier wird leicht bewiesen, daß das *kommutative* Gesetz: $a \cdot b = b \cdot a$ und das *assoziative* Gesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für *Mächtigkeiten* oder *Kardinalzahlen* allgemeine Gültigkeit haben. Ebenso besteht, wie man leicht zeigen kann, das *distributive* Gesetz: $a(b + c) = ab + ac$.

7. Alles Vorangehende bezieht sich gleichmäßig auf *endliche* sowohl, wie auch auf *aktual-unendliche* Mengen und Kardinalzahlen.

Für *endliche* Mengen läßt sich nun *weiter beweisen*, daß, wenn von drei *endlichen* Kardinalzahlen a , b und c die letztere gleich ist der Summe der beiden ersteren, $a + b = c$, alsdann niemals c gleich einem der Summanden a und b sein kann¹.

¹ Der Beweis dieses Satzes muß sorgfältigst geführt werden; denn gerade wegen seiner fundamentalen Einfachheit und weil er für selbstverständlich gehalten wird, liegt hier die Gefahr einer Erschleichung besonders nahe. — Die Bedeutung des Satzes ist

Wenn aber von der Voraussetzung der *Endlichkeit* bei den drei Zahlen α , β , γ abgesehen wird, so hört dieser Satz auf richtig zu sein, und darin liegt der tiefste Grund der *wesentlichen Verschiedenheit* zwischen *endlichen* und *aktual-unendlichen* Zahlen und Mengen, einer Verschiedenheit, welche so groß ist, daß man die Berechtigung hat, die unendlichen Zahlen ein *ganz neues Zahlengeschlecht* zu nennen.

Hier liegt nun *der große Stein des Anstoßes*, den von altersher Philosophen und Mathematiker nicht haben wegräumen können, und der die

diese: Ist M eine *endliche* Menge, M' ein echter, von M verschiedener Bestandteil von M , so sind M und M' *nicht* äquivalent.

Unter einer *endlichen* Menge verstehen wir eine solche M , welche aus *einem* ursprünglichen Element durch sukzessive Hinzufügung neuer Elemente derartig hervorgeht, daß auch *rückwärts* aus M durch *sukzessive* Entfernung der Elemente *in umgekehrter Ordnung* das ursprüngliche Element gewonnen werden kann. [Hierzu vergleiche III 9, § 5, S. 289 ff. und die zugehörige Anmerkung S. 352.]

Ich schicke folgenden allgemeinen, höchst einleuchtenden *Hilfssatz* voraus: sind irgend zwei Mengen M und N äquivalent, so können sie (im allgemeinen auf viele Weisen) so in gegenseitig eindeutige und vollständige Zuordnung gebracht werden, daß bei *dieser* Zuordnung einem beliebig vorgegebenen Elemente m von M ein ebenso beliebig gewähltes Element n von N entspricht.

Und nun wird zum Beweise des in Rede stehenden Satzes ein *vollständiges Induktionsverfahren* eingeleitet.

Man setze eine Menge M voraus, welche keinem ihrer Bestandteile äquivalent ist; ich will zeigen, daß alsdann auch die aus M durch Hinzufügung *eines* neuen Elementes l hervorgehende Menge $M + l$ *dieselbe* Eigenschaft hat, mit keinem ihrer Bestandteile äquivalent zu sein. Sei N irgendein Bestandteil von $M + l$, so kann er zwei Fälle darbieten. 1) Es gehört das Element l mit zu N , so daß $N = N' + l$. N' ist dann offenbar auch Bestandteil von M . Wäre nun $N \sim M + l$, so könnte nach obigem *Hilfssatze* zwischen den Mengen N und $M + l$ eine solche gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz hergestellt werden, daß das Element l von N dem Element l von $M + l$ entspricht; durch diese Zuordnung würde auch eine Zuordnung zwischen N' und M hergestellt sein und es wäre M seinem Bestandteil N' äquivalent, gegen unsere Voraussetzung. 2) Es gehört l nicht mit zu N ; dann ist N nicht nur Bestandteil von $M + l$, sondern auch von M . Wäre in diesem Falle $N \sim M + l$, so nehme man *irgendeine* gegenseitig eindeutige und vollständige Zuordnung der beiden Mengen $M + l$ und N und es möge bei derselben dem Elemente l von $M + l$ das Element n von N entsprechen. Ist $N = N' + n$, so wäre durch diese Zuordnung auch eine gegenseitig eindeutige und vollständige Korrespondenz zwischen N' und M hergestellt, was, da auch hier N' Bestandteil von M ist, gegen die gemachte Voraussetzung streitet, wonach M keinem ihrer Bestandteile äquivalent ist.

Der in Rede stehende Satz ist unmittelbar einleuchtend für den Fall einer aus *zwei* Elementen bestehenden Menge. Vermöge des soeben Bewiesenen wird die Richtigkeit desselben auf *jede endliche* Menge übertragen.

Als *durchaus wesentliches* Merkmal *endlicher* Mengen muß es angesehen werden, daß eine solche *keinem* ihrer Bestandteile äquivalent ist. Denn eine *aktual unendliche* Menge ist *immer* so beschaffen, daß auf mehrfache Weise ein Bestandteil von ihr bezeichnet werden kann, der ihr äquivalent ist.

meisten von ihnen bestimmt hat, allen Versuchen, die Lehre vom Unendlichen einen weiteren Schritt vorwärts zu bringen, standhaft und hartnäckig, mit aller Zähigkeit eines uralten und, wenn auch falschen, doch darum nicht weniger fest eingewurzelten Prinzips entgegenzutreten. *Man täuschte sich mit der Annahme, es sei ein Widerspruch, wenn einer unendlichen Menge M dieselbe Zahl zukommt wie einem Bestandteil M' von M .* Daß diese Annahme auf einem Trugschluß beruht, kann wie folgt bewiesen werden. Ist etwa $M = M' + M''$, so ist die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Kardinalzahl zu wie der Menge M' , nach Nr. 1 *gleichbedeutend* mit dem Satze: die Mengen M und M' stehen unter einem und demselben Allgemeinbegriff, der durch Abstraktion von der Beschaffenheit und der Anordnung ihrer Elemente gewonnen wird; mit anderen Worten, es wird mit jener Behauptung gesagt, daß $\overline{M} = \overline{M'}$ ist. Seit wann wäre aber ein Widerspruch darin zu sehen, daß der Bestandteil eines Ganzen, nach irgendeiner Hinsicht, unter einem und demselben „universale“ steht wie das Ganze? Man erwidert vielleicht hierauf, es sei wohl im allgemeinen zuzugeben, daß ein Ganzes und sein Bestandteil unter einem und demselben „universale“ stehen können, allein hier handle es sich um eine besondere Art von Allgemeinbegriffen, um *Zahlen*, und bei *Zahlen* treffe dies nicht zu. Dann könnte meinerseits verlangt werden, daß für letztere Behauptung, wonach bei den *Zahlen* in der bezeichneten Richtung ein Ausnahmefall stattfände, der Beweis gebracht werde. Es mag ja sein, daß man ihn hier und da versuchen wird. *Gelingen* wird er aber *nur dann*, wenn stillschweigend die Voraussetzung hinzugenommen wird, daß es sich um *endliche* Mengen handle; und diese Voraussetzung ist es ja gerade, welche hier vermieden werden muß. Um aber nach meinen Kräften *unnützen* Bemühungen, die sich nur im Kreise bewegen würden, vorzubeugen, will ich die Sache noch stärker beleuchten und bemerke: die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Kardinalzahl zu, wie ihrem Bestandteil M' , *ist nicht gleichbedeutend* mit der Aussage, daß den konkreten Mengen M und M' eine und dieselbe Realität zukomme; denn wenn auch an den zugehörigen Allgemeinbegriffen \overline{M} und $\overline{M'}$ die Bedingung des Gleichseins erfüllt ist, so ist *damit schlechterdings nicht der vorausgesetzten Tatsache widersprochen, daß die Menge M sowohl die Realität von M' , wie auch diejenige von M'' umfaßt*. Sind nicht eine Menge und die zu ihr gehörige Kardinalzahl ganz verschiedene Dinge? Steht uns nicht *erstere* als Objekt gegenüber, wogegen letztere ein abstraktes Bild davon *in unserm* Geiste ist? Der alte, so oft wiederholte Satz: „Totum est majus sua parte“ darf ohne Beweis nur in bezug auf die, dem Ganzen und dem Teile zugrunde liegenden *Entitäten* zugestanden werden; *dann und nur dann* ist er eine unmittelbare Folge aus den Begriffen „totum“ und „pars“. Leider ist jedoch dieses „Axiom“

(und „pars“. Leider ist jedoch dieses „Axiom“) unzählig oft¹, ohne jede Begründung und unter Vernachlässigung der notwendigen Distinktion zwischen „Realität“ und „Größe“ resp. „Zahl“ einer Menge, gerade in derjenigen Bedeutung gebraucht worden, in welcher es im *allgemeinen falsch* wird, sobald es sich um *aktual-unendliche* Mengen handelt und in welcher es für *endliche* Mengen nur aus dem Grunde richtig ist, weil man hier imstande ist, es als richtig zu beweisen. Ein Beispiel möge alles erläutern.

Sei M die Gesamtheit (ν) aller endlichen Zahlen ν , M' die Gesamtheit (2ν) aller geraden Zahlen 2ν . Hier ist unbedingt richtig, daß M seiner Entität nach *reicher* ist, als M' ; enthält doch M außer den geraden Zahlen, aus welchen M' besteht, noch außerdem alle ungeraden Zahlen M'' . Andererseits ist ebenso unbedingt richtig, daß den beiden Mengen M und M' nach Nr. 2 und 3 *dieselbe* Kardinalzahl zukommt. Beides ist sicher und keines steht dem andern im Wege, wenn man nur auf die Distinktion von *Realität* und *Zahl* achtet. Man muß also sagen: *die Menge M hat mehr Realität wie M' , weil sie M' und außerdem M'' als Bestandteile enthält; die den beiden Mengen M und M' zukommenden Kardinalzahlen sind aber gleich.* Wann endlich werden alle Denker diese so einfachen und einleuchtenden Wahrheiten (gewiß nicht zu ihrem Nachtheile) anerkennen?

8. Nach den Auseinandersetzungen und Erklärungen der vorigen Nummer wird man an Sätzen, wie etwa die folgenden:

$$\alpha + \bar{\nu} = \alpha; \quad \alpha \cdot \bar{\nu} = \alpha; \quad \alpha^{\bar{\nu}} = \alpha$$

(wo $\bar{\nu}$ die Bedeutung irgendeiner *endlichen*, α die Bedeutung irgendeiner

¹ Ich führe im folgenden eine im Verhältnis zum vorhandenen Material verschwindende Zahl von Autoren an, welche das hier charakterisierte Versehen begangen zu haben scheinen und infolgedessen als Gegner der aktual unendlichen Zahlen zu bezeichnen sind.

Fullerton: The conception of the infinite, chap. 2. Philadelphia 1887.

Renouvier: Esq. d'une classif. syst. d. doct. philos. 1, 100. Paris 1885.

Moigno: Imposs. d. nombre act. inf. Paris 1884. Hier werden Galilei, Gerdil, Toricelli, Guldin, Cavalieri, Newton, Leibniz als solche angeführt, welche sogenannte Beweise gegen die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen geführt hätten.

Cauchy: Sept. leçons d. phys. gén. 23. Paris 1868.

Salv. Tongiorgi, S. J. Inst. phil. Paris, ed. 10a, t. 2, Ont. § 350ff.

Sanseverino: Él. d. l. phil. chrétienne 2e, Ontol. § 252. Avignon 1876.

Pesch, Tilm. S. J.: Inst. phil. nat. § 412. Freiburg 1880.

Zigliara, Card. Th. Maria: O. P. Summa phil. Ed. 5a, Vol. 1, Ont. Lib. 2, cap. 3, art. 5, II, III.

Gerdil, Card.: Op. ed. et ined. 4, 261; 5, 1. Rom 1806.

Leibniz: Ed. Erdmann S. 138, 244, 236.

Goudin: O. P. Phil. juxta D. Thomae dogm. 2, 189. Paris 1851.

Pererius, Bened. S. J.: De comm. omn. rer. nat. princ. et affect. lib. 10, cap. 9. Lugduni (1585).

transfiniten Kardinalzahl hat), ich sage, man wird an solchen Sätzen keinen Anstoß mehr nehmen können, falls man gegen sie nichts anderes vorzubringen findet, als daß sie mit den hergebrachten Sätzen für *nur endliche* Zahlen nicht übereinstimmen. Denn, wie schon gesagt, es handelt sich bei unsern *transfiniten* Zahlen um ein *neues Zahlengeschlecht*, dessen Beschaffenheit man zu erforschen, nicht aber nach dem Rezept von Vorurteilen eigenmächtig zu präparieren hat. Jene Sätze sowie alle anderen, die ich in diesem kurzen Abriß nicht anführen kann, haben ihren *festen Bestand durch die logische Kraft von Beweisen, die, von den vorher gegebenen, nicht willkürlichen oder gekünstelten, sondern aus dem Quell naturgemäßer Abstraktion entsprungene Definitionen ausgehend, mit Hilfe von Syllogismen zum Ziele gelangen*. Es empfiehlt sich dabei namentlich, diejenigen Methoden weiter auszubilden, welche in Crelle J. Bd. 84, S. 253, Acta math. Bd. 4, S. 381, Bd. 7, S. 105, Math. Ann. Bd. 23, S. 453 [hier III 2, III 6, III 7, III 4] eingeführt worden sind¹.

(Fortsetzung des Textes auf S. 420.)

¹ In den Nummern 1 bis 8 dieses Aufsatzes sind die Fundamente der allgemeinen finiten sowohl wie transfiniten Kardinalzahlenlehre in möglichster Kürze gelegt. Zur Vervollständigung will ich noch einiges in bezug auf die *endlichen* Kardinalzahlen hinzufügen. Unter einer *endlichen* Kardinalzahl verstehe ich eine solche, welche einer *endlichen* Menge in der Weise entspricht, wie dies in den Nummern 1 bis 3 erklärt worden ist. Was hierbei unter einer *endlichen Menge* verstanden werden muß, findet sich in der Note zu Nr. 7, S. 61. Hiernach hebe ich zunächst hervor, daß jede endliche (ebenso wie jede transfinite) Kardinalzahl für sich eine *durchaus unabhängige* ideale Existenz und Stellung hat mit Bezug auf alle die anderen Kardinalzahlen. Zur Bildung des Allgemeinbegriffs „fünf“ bedarf es *nur einer* Menge (z. B. der vollzähligen Finger meiner rechten Hand), welcher diese Kardinalzahl zukommt; der Abstraktionsakt mit Bezug auf die Beschaffenheit und Ordnung, in welcher diese wohlunterschiedenen Dinge mir entgetreten, bewirkt oder vielmehr weckt in meinem Geiste den Begriff „fünf“. Es ist also die „fünf“ an und für sich unabhängig von der „vier“ oder „drei“ und von irgendwelcher anderen Zahl. Jede Zahl ist ihrem Wesen nach ein *einfacher* Begriff, in welchem eine Mannigfaltigkeit von Einsen organisch-einheitlich in *spezieller Weise* zusammengefaßt ist, so daß darin die verschiedenen Einsen sowie auch die aus ihrer teilweisen Zusammenfassung hervorgehenden Zahlen *virtuelle* Bestandteile sind. Der Umstand, daß nach der in Nr. 5 gegebenen Summendefinition die Gleichung

$$\bar{5} = \bar{2} + \bar{3}$$

besteht, *darf uns nicht zu der Annahme verleiten*, als seien in dem Begriff $\bar{5}$ die Begriffe $\bar{2}$ und $\bar{3}$ als *Teile real* enthalten; wäre dies der Fall, so würde nimmermehr $\bar{5}$ auch $= \bar{1} + \bar{4}$ sein können. Wohl aber lassen sich $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ und $\bar{4}$ als *virtuelle Bestandteile* von $\bar{5}$ bezeichnen, wenn hierunter nichts anderes verstanden wird, als daß in jeder *konkreten* Menge M von der Kardinalzahl $\bar{5}$ sich Teilmengen M' vorfinden, denen die Kardinalzahlen $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ oder $\bar{4}$ entsprechen. Jene Gleichung hat also die Bedeutung einer bestimmten *idealen Beziehung* der drei für sich bestehenden Kardinalzahlen $\bar{2}$, $\bar{3}$ und $\bar{5}$, und dieser idealen Beziehung entspricht als Korrelat die *Tatsache*, daß *jede konkrete*

Menge von der Kardinalzahl $\bar{5}$ aus zwei Teilmengen *real* zusammengesetzt werden kann, welchen die Kardinalzahlen 2 und $\bar{3}$ entsprechen.

Analog sind alle zwischen Kardinalzahlen bestehenden, auf Grund der Definitionen in Nr. 1 bis 6 aufgebauten Gleichungen und Ungleichheiten zu deuten; sie stellen feste ideale Beziehungen und Gesetze unter Zahlbegriffen dar, die ihr Korrelat und in gewissem Sinne, nämlich für unsere menschliche Erkenntnisweise, ihr Fundament in bestimmten Beziehungen konkreter Mengen haben.

Unter den gesetzmäßigen Beziehungen, welche in mannigfaltigst umschlungener Verkettung das Reich der endlichen Kardinalzahlen zu einem idealen, organischen Ganzen verbinden, verdient diejenige zunächst hervorgehoben werden, durch welche wir nach der in Nr. 4 gegebenen Definition (man berücksichtige hierbei auch die Note S. 414 zu Nr. 7), von je zwei verschiedenen Kardinalzahlen a und b die eine als die kleinere, die andere als die größere zu bezeichnen haben. Hat man noch eine dritte c , so beweist man leicht, daß, wenn $a < b$ und $b < c$, alsdann auch immer $a < c$ ist.

Die Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen bildet also, wenn in ihr die kleineren Zahlen einen niedrigeren Rang erhalten als die größeren, in dieser Rangordnung das, was ich eine *einfach geordnete Menge* nenne. Doch noch mehr; sie stellt sich uns in dieser Rangordnung als eine *wohlgeordnete Menge* (vgl. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre S. 4) [S. 168] vor. Denn wir haben hier ein *dem Rang nach niedrigstes Element*, die kleinste Kardinalzahl $\bar{1}$ und eine auf jede endliche Kardinalzahl \bar{v} *dem Range*, d. h. hier der Größe nach nächstfolgende endliche Kardinalzahl $\bar{v} + \bar{1}$. So erhalten wir die *Gesamtheit aller endlichen Kardinalzahlen* in der sogenannten *natürlichen endlosen Folge*: $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{v}, \dots$, in welcher Folge sie eine *wohlgeordnete Menge vom Ordnungstypus ω* darstellt.

Die Endlosigkeit dieser Folge gibt den Beweis, daß die *Gesamtheit aller endlichen Zahlen*, als ein Ding für sich betrachtet, eine *aktual unendliche Menge*, ein *Transfinitum* ist. Denn für die Behauptung, daß eine Menge *aktual unendlich* sei, ist die *Bestimmtheit aller ihrer Elemente* sowie das *Größersein der Anzahl derselben im Vergleich mit jeder endlichen Zahl* das allein Wesentliche; nicht aber ist erforderlich, daß die Menge in irgendeiner Form durch ein letztes, zu ihr gehöriges Glied begrenzt sei. Abgegrenzt ist eine Menge vollkommen schon dadurch, daß alles zu ihr Gehörige in sich bestimmt und von allem nicht zu ihr Gehörigen wohl unterschieden ist. Dies stimmt vollkommen mit demjenigen überein, was S. Augustin in dem pag. 32 abgedruckten Kapitel seiner Hauptschrift *De Civitate Dei*, lib. XII, cap. 19, sagt: „Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et disparet inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt.“

Bietet sich solcherweise die Anordnung: $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{v}, \dots$ der endlichen Kardinalzahlen *wie von selbst* dar und ist dies der Grund, warum sie allgemein die Benennung der „natürlichen Folge der ganzen Zahlen“ erhalten hat, so darf darum nicht übersehen werden, daß diese gesetzmäßige Repräsentation der Menge (\bar{v}), bei der vorhin hervorgehobenen *idealen Unabhängigkeit jeder Zahl von allen anderen und wegen der Mannigfaltigkeit von Beziehungen der Zahlen untereinander, nur eine von unzählig vielen möglichen gesetzmäßigen Zusammenfassungen und Anordnungen aller endlichen Kardinalzahlen* ist, so daß es in gewissem Sinne wohl als willkürlich bezeichnet werden muß, wenn gerade diese, *auf die Größenbeziehung basierende* Rangordnung der endlichen Kardinalzahlen die „natürliche Folge“ derselben genannt worden ist. Später werden wir sehen, daß auch die *Gesamtheit aller Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten* (der endlichen und der überendlichen), wenn man sie sich nach ihrer Größe geordnet denkt, eine *wohlgeordnete Menge* bildet.

Um die *Kardinalzahlenlehre*, für welche in den acht ersten Nummern dieses Abschnitts VIII die obersten Begriffsbestimmungen gegeben worden sind, in das Gebiet des *Transfiniten* sicher hinüberzuführen und dort zu strenger Ausbildung zu bringen, ist man, wie ich im Abschnitt I angedeutet habe, auf die Heranziehung der transfiniten *Ordnungszahlen* angewiesen, welche selbst nur spezielle Formen der *Ordnungstypen* oder *Idealzahlen* (*ἀριθμοὶ νοητοί* oder *εἰδητικοί*) sind. Die transfiniten *Ordnungszahlen* sind nämlich nichts anderes, als Typen derjenigen unendlichen einfach geordneten Mengen, welche von mir *wohlgeordnete Mengen* genannt worden sind. (Vgl. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitsl. § 2) [S. 168]. In den folgenden Nummern dieses Abschnittes VIII. entwickle ich daher zunächst die Prinzipien der allgemeinen Theorie der Ordnungstypen, und es sollen alsdann in einem spätern Aufsätze die Grundzüge der speziellen Theorie der Ordnungszahlen, nebst ihrer Anwendung auf die Kardinalzahlenlehre folgen.

9. Stellen wir uns, wie in Nr. 1 dieses Abschnitts, eine bestimmte Menge M vor, die aus gegebenen, wohlunterschiedenen Elementen E, E', E'', \dots besteht, welche konkrete Dinge oder abstrakte Begriffe (letztere aber, ebenso wie jene, im Sinne von uns gegenüberstehenden Objekten gedacht) sein können; sie mögen nach n voneinander unabhängigen Beziehungen¹, welche ich *Richtungen* (dieses Wort nicht bloß im geometrischen, sondern in allgemeinerem Sinne verstanden) nennen will, *geordnet* sein. Diese n Richtungen mögen als $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \dots, \nu^{\text{te}}, \dots, n^{\text{te}}$. Richtung unterschieden werden. Eine solche Menge M nennen wir eine *n -fach geordnete Menge*.

Zum genauen Verständnis dieses Begriffs heben wir die folgenden Eigenschaften und Bestimmungen desselben hervor.

Sind E und E' irgend zwei Elemente von M , so besteht unter ihnen nach jeder der n Richtungen ein bestimmtes Verhältnis des *niedereren*, *gleichen* oder *höheren Ranges* (des *πρότερον καὶ ὑστερον κατὰ τάξιν*). Bedienen wir uns der gebräuchlichen Bezeichnungen $<$, $=$, $>$ für das Kleiner-, Gleich- und Größersein zur Andeutung dieser drei *Rangverhältnisse*, so wird also, wenn ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ bedeutet, nach der ν^{ten} Richtung E entweder $<$, oder $=$, oder $>$ als E' sein. Für *verschiedene* Richtungen kann das Rangverhältnis von E zu E' übereinstimmen oder differieren.

Sind E, E' und E'' irgendwelche drei Elemente von M und bestehen nach der ν^{ten} Richtung die Beziehungen

$$E \leq E' \quad \text{und} \quad E' \leq E'',$$

so ist nach derselben ν^{ten} Richtung auch immer

$$E \leq E'',$$

¹ Hier hat n die Bedeutung einer endlichen Kardinalzahl mit Einschluß von $n = 1$.

wobei hier das Zeichen = *dann und nur dann* gültig ist, wenn es in den *beiden* vorangehenden Relationen Geltung hat.

Dies sind die Voraussetzungen, unter denen ich eine gegebene Menge M eine *n-fach geordnete Menge mit Bezug auf jene n Ordnungsrichtungen, letztere in einer bestimmten Reihenfolge als 1^{te}, 2^{te}, . . . , n^{te} Richtung gedacht*, nenne.

Zur Erläuterung führe ich einige Beispiele von mehrfach geordneten Mengen an, bei denen die Rangordnung der Elemente nach mehreren Richtungen durch *Natur* oder *Kunst* gegeben ist.

Erstes Beispiel. Im *Raume* seien m bestimmte Punkte irgendwie gelegen. Bezieht man sie in der üblichen Weise auf ein dreiachsiges, orthogonales Koordinatensystem, setzt die x -Achse als erste, die y -Achse als zweite und die z -Achse als dritte Ordnungsrichtung fest und läßt demgemäß das Rangverhältnis von je zwei Punkten E und E' nach der 1^{ten}, 2^{ten} und 3^{ten} Richtung durch die Größenbeziehung resp. ihrer Koordinaten x und x' , y und y' , z und z' bestimmt sein, so ist hiermit unser aus m Punkten bestehendes Punktsystem als eine *dreifach geordnete Menge* aufgefaßt. Auf die Entfernungen und sonstigen geometrischen Beziehungen der m Punkte kommt es bei dieser Auffassung gar nicht an; nur die gegenseitige Rangordnung der m Punkte nach den drei Ordnungsrichtungen ist hier wesentlich.

Zweites Beispiel. Ebenso lassen sich m Punkte in einer *Ebene*, unter Zugrundelegung eines zweiachsigen orthogonalen Koordinatensystems als eine *zweifach geordnete Menge* auffassen, wobei wiederum die Entfernungen und sonstigen geometrischen Beziehungen der m Punkte nicht in Betracht kommen.

Drittes Beispiel. Man nehme ein *Tonstück*, sei es eine einfache Melodie oder ein kompliziertes musikalisches Kunstwerk, etwa eine Symphonie oder ein Oratorium. Dasselbe setzt sich aus einer bestimmten Zahl m verschiedener Töne zusammen, die nach vier voneinander unabhängigen Richtungen geordnet sind.

Als *erste* Richtung nehme man die *Folge* der Töne in der *Zeit*; in dieser Beziehung erhalten die beiden Töne E und E' gleichen Rang, wenn sie gleichzeitig erfolgen oder, wie man sich ausdrückt, einem Akkord angehören, andernfalls E einen niederen oder höheren Rang als E' hat, je nachdem E früher oder später als E' eintritt.

Die *zweite* Richtung werde von der *Dauer*, welche jeder Ton für sich in der Zeit hat, bestimmt, so daß in dieser Beziehung zwei Töne E und E' gleichen Rang erhalten, wenn sie gleiche Dauer haben, wogegen der Rang von E hier niedriger oder höher ist als der von E' , je nachdem die Dauer von E kleiner oder größer ist als die von E' .

Die *dritte* Richtung sei durch die *Höhe* der Töne gegeben, so daß hier E und E' gleichen Rang haben, wenn sie von gleicher Höhe sind, hingegen E niederen oder höheren Rang als E' erhält, je nachdem E tiefer oder höher ist als E' .

Endlich werde die *vierte* Ordnungsrichtung in analogem Sinne durch die *Intensität* der Töne bestimmt. So aufgefaßt stellt demnach jedes Tonstück eine *vierfach geordnete Menge* vor.

Viertes Beispiel. Betrachten wir ein Gemälde und fassen darin m bestimmte Punkte ins Auge, etwa so viele und solche, daß sie in der Entfernung, von welcher aus das Bild gesehen wird, den Eindruck des kontinuierlichen Ganzen hervorbringen. Beziehen wir das Bild auf eine horizontale und vertikale Richtung als auf ein zweiachsiges Koordinatensystem, so läßt es sich nach folgenden Gesichtspunkten als eine *vierfach geordnete Menge* auffassen.

Die x -Koordinaten mögen zur Bestimmung der *ersten*, die y -Koordinaten zur Bestimmung der *zweiten* Ordnungsrichtung dienen. Die *dritte* Richtung werde durch die *Farbe* der Punkte gegeben, so daß zwei Punkte E und E' in dieser Richtung gleichen Rang haben, wenn sie von gleicher Farbe sind, dagegen E niedrigeren oder höheren Rang als E' einnimmt, je nachdem der Farbe von E eine kleinere oder größere *Wellenlänge* entspricht als derjenigen von E' . Endlich bestimme die *Farbenintensität* der m Punkte die *vierte* Ordnungsrichtung.

In diesen vier Beispielen haben wir *endliche*, d. h. aus einer endlichen Zahl von Elementen zusammengesetzte mehrfach geordnete Mengen in Betracht gezogen. Unser Begriff bezieht sich aber auch auf Mengen mit einer *unendlichen Zahl* von Elementen; es handelt sich dann jedoch immer um nur *Aktualunendliches*, da nur solche Mengen ein Interesse für uns haben, die in sich bestimmt sind und von welchen daher sämtliche Elemente als fertig zusammen bestehend gedacht werden müssen. Das potentielle Unendliche kommt hier nicht zur Geltung, weil es seinem Begriffe nach nur auf unbestimmte, resp. veränderliche Dinge bezogen werden kann.

So können wir beispielsweise *alle* diejenigen Punkte des Raumes ins Auge fassen, bei denen, unter Zugrundelegung eines dreiachsigen, orthogonalen Koordinatensystems, alle drei Koordinaten rationales Verhältnis zur Längeneinheit haben; sie bilden, wenn, wie im ersten Beispiel, die Größe ihrer Koordinaten zur Bestimmung ihrer Rangordnung verwendet wird, eine bestimmte *dreifach geordnete aktual-unendliche Punktmenge*.

Nach diesen Erläuterungen gehe ich ohne weiteres zur Erklärung dessen über, was ich den *Ordnungstypus* oder die *Idealzahl* einer geordneten Menge nenne.

Sei M irgendeine bestimmte, aus einer endlichen oder aktual unendlichen Zahl von Elementen E, E', E'', \dots bestehende n -fach geordnete Menge. Abstrahieren wir an ihr von der Beschaffenheit der Elemente, unter Beibehaltung ihrer Rangordnung nach den n verschiedenen Richtungen, so wird in uns ein intellektuales Bild, ein Allgemeinbegriff (universale) erzeugt, welchen ich den der Menge M zukommenden n -fachen Ordnungstypus oder auch die der Menge M entsprechende Idealzahl nenne und mit \bar{M} bezeichne.

Es entspricht also jedem Punktsystem im Raume (im Sinne des 1. Beispiels) ein dreifacher, jedem Punktsystem in der Ebene (im Sinne des 2. Beispiels) ein zweifacher, jeder Punktmenge in der geraden Linie ein einfacher *bestimmter* Ordnungstypus, während einem Tonstück (unserm 3. Beispiel gemäß) und einem Gemälde (in der Auffassung unseres 4. Beispiels) bestimmte vierfache Ordnungstypen zukommen. Ist es daher nicht undenkbar, daß einem Tonstück und einem Gemälde zufällig ein und derselbe Ordnungstypus zugrunde liege, so sieht man hieraus, wie unter Umständen die heterogensten Dinge durch das *gemeinsame Band der Idealzahlen* verbunden sein können.

10. Fassen wir den aus einer geordneten Menge M vermöge des beschriebenen Abstraktionsakts gewonnenen Ordnungstypus \bar{M} genauer ins Auge.

Den einzelnen Elementen E, E', E'', \dots der Menge M entsprechen in ihrem Ordnungstypus \bar{M} lauter *Einsen* $e = 1, e' = 1, e'' = 1, \dots$, die als solche zwar alle gleich sind, sich aber durch ihre Stellung innerhalb des Ordnungstypus \bar{M} voneinander unterscheiden; es herrscht unter ihnen dieselbe Rangordnung wie unter den Elementen der Menge M .

Wir haben uns daher unter einem n -fachen Ordnungstypus das *ideale Paradigma* einer n -fach geordneten Menge, gewissermaßen eine *n -dimensionale ganze reale Zahl*, d. h. eine begriffliche, organisch-einheitliche Zusammenfassung von *Einsen* $e = 1, e' = 1, e'' = 1, \dots$ zu denken, die nach n verschiedenen und voneinander unabhängigen Beziehungen, welche auch hier Richtungen genannt werden sollen, geordnet sind. Nimmt man *irgend welche* zwei von diesen Einsen e und e' , so hat nach der ν^{ten} Richtung (für $\nu = 1, 2, \dots, n$) e entweder gleichen Rang mit e' , oder es ist der Rang von e niedriger, oder er ist höher wie derjenige von e' . Das Rangverhältnis derselben zwei Einsen e und e' kann nach der ν^{ten} und nach einer andern μ^{ten} Richtung übereinstimmen oder differieren. Sind e, e', e'' *irgendwelche* drei jener Einsen und hat man nach der ν^{ten} Richtung:

$$e \leq e' \quad \text{und} \quad e' \leq e'',$$

so ist nach derselben ν^{ten} Richtung:

$$e \leq e'',$$

wo das Zeichen $=$ dann und nur dann gilt, wenn in *beiden* vorangehenden Relationen das Zeichen $=$ Geltung hat¹.

Ich nenne den Ordnungstypus einen *reinen Ordnungstypus*, wenn je zwei seiner Einsen e und e' *zum wenigsten nach einer der n Richtungen verschiedenen Rang* haben.

¹ Ich erinnere daran, daß hier (vgl. Nr. 9) die Zeichen $<, =$ und $>$ zur Angabe von *Rangverhältnissen* verwandt werden.

Andernfalls nenne ich ihn einen *gemischten Ordnungstypus*; bei diesem vereinigen sich die Einsen zu bestimmten Gruppen, so daß die einer und derselben Gruppe angehörigen Einsen *nach allen n Richtungen* gleichen Rang haben und daher zu einer *bestimmten Kardinalzahl* zusammenfließen, während die, verschiedenen Gruppen angehörigen Einsen zum wenigsten nach einer der n Richtungen verschiedenen Rang haben.

Jeder gemischte Ordnungstypus geht folglich aus einem bestimmten reinen Ordnungstypus dadurch hervor, daß in letzteren an Stelle der Einsen gewisse Kardinalzahlen substituiert werden.

Es erhebt sich nun die Frage, *wann zwei verschiedene n -fach geordnete Mengen M und N einen und denselben Ordnungstypus haben und wann nicht?* Zur Beantwortung derselben bedienen wir uns des Beziehungsbegriffs der *Ähnlichkeit geordneter Mengen*.

*Zwei n -fach geordnete Mengen M und N werden „ähnlich“ genannt, wenn es möglich ist, sie gegenseitig eindeutig und vollständig, Element für Element, einander so zuzuordnen, daß, wenn E und E' irgend zwei Elemente von M , F und F' die beiden entsprechenden Elemente von N sind, alsdann für $v = 1, 2, \dots, n$ das Rangverhältnis von E zu E' nach der v^{ten} Richtung innerhalb der Menge M genau dasselbe ist wie das Rangverhältnis von F zu F' nach der v^{ten} Richtung innerhalb der Menge N . Wir wollen eine derartige Zuordnung von zwei einander ähnlichen Mengen eine *Abbildung der einen auf die andere* nennen.*

Die Ähnlichkeit zweier Mengen M und N werde durch folgende Formel ausgedrückt:

$$M \simeq N$$

Wir können nun die aufgeworfene Frage durch folgenden Satz beantworten:

Zwei n -fach geordnete Mengen M und N haben dann und nur dann einen und denselben Ordnungstypus, wenn sie ähnlich sind; in Zeichen: wenn $M \simeq N$, so ist $\overline{M} = \overline{N}$ und umgekehrt: wenn $\overline{M} = \overline{N}$, so ist $M \simeq N$.

Beide Teile dieses Doppelsatzes ergeben sich leicht durch Zurückgehen auf die Begriffe des Ordnungstypus und der Ähnlichkeit geordneter Mengen in analoger Weise, wie wir in Nr. 3 dieses Abschnitts VIII den Satz bewiesen haben, daß zwei Mengen dann und nur dann gleiche Kardinalzahl haben, wenn sie äquivalent sind.

Der Ordnungstypus einer gegebenen n -fach geordneten Menge M ist also derjenige Allgemeinbegriff, unter welchem die Menge M und alle ihr ähnlichen Mengen stehen, der aber sonst keine anderen Dinge unter sich begreift, so daß sein Umfang durch M und die M ähnlichen Mengen genau bestimmt ist.

Die Ähnlichkeit zweier Mengen M und N begründet, wie man unmittelbar sieht (Vgl. Nr. 2) auch ihre Äquivalenz, während umgekehrt äquivalente Mengen nicht ähnlich zu sein brauchen.

Wir können daher sagen:

Haben zwei geordnete Mengen M und N einen und denselben Ordnungstypus, so kommt ihnen auch immer eine und dieselbe Kardinalzahl zu; in Zeichen: ist $\bar{M} = \bar{N}$, so hat man auch $\overline{\bar{M}} = \overline{\bar{N}}$.

Die Kardinalzahl einer geordneten Menge M ist daher immer auch die Kardinalzahl ihres Ordnungstypus \bar{M} und geht aus letzterem durch die Abstraktion von der eigentümlichen Rangordnung seiner Einsen hervor. Ist α ein Zeichen für den Ordnungstypus \bar{M} , so sei $\bar{\alpha}$ ein Zeichen für die Kardinalzahl \bar{M} . In diesem Sinne haben wir in den Nummern 1—8 dieses Abschnitts die Zeichen $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{\nu}, \dots$ für die endlichen *Ordnungszahlen*, dagegen die Zeichen $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \dots, \bar{\nu}, \dots$ für die endlichen *Kardinalzahlen* gebraucht.

Je nachdem die Kardinalzahl einer Menge endlich oder transfinit ist, nennen wir die Menge selbst und ihren Ordnungstypus endlich oder transfinit.

Bei zwei *transfiniten* n -fach geordneten Mengen kann es, wenn sie ähnlich sind, vorkommen, daß es nicht bloß *eine* Abbildung der einen auf die andere, sondern deren *mehrere*, ja sogar unendlich viele Abbildungen derselben zwei ähnlichen Mengen auf einander gibt; in diesen Fällen läßt jede Menge des entsprechenden Ordnungstypus sich in mehrfacher Weise auf sich selbst abbilden, und ebenso können wir von dem betreffenden Ordnungstypus sagen, daß er *sich selbst auf mehrfache Weise ähnlich* ist. Hat man es mit *endlichen* n -fach geordneten Mengen von *reinem* Ordnungstypus zu tun, so existiert für je zwei ähnliche Mengen immer nur *eine einzige Abbildung*. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht auf endliche Mengen beschränkt; es gibt auch Klassen von transfiniten geordneten Mengen, die *nur eine* Abbildung von zwei ähnlichen Mengen zulassen und dazu gehören beispielsweise alle diejenigen *einfach geordneten* Mengen, welche ich *wohlgeordnete* Mengen¹ genannt habe.

11. Ein n -facher Typus α setzt sich, wie wir in Nr. 10 sahen, aus gewissen Einsen e, e', e'', \dots zusammen, die nach n Richtungen ein bestimmtes Rangverhältnis zu einander haben. Faßt man nicht alle, sondern nur einen gewissen Teil von diesen Einsen ins Auge, so bestimmt derselbe für sich in der vorliegenden Rangordnung ebenfalls einen Typus γ , den wir als Teil von α (allerdings nur im virtuellen Sinne verstanden) ansehen können. So enthält also jeder Typus α andere Typen $\gamma, \gamma', \gamma'', \dots$ als virtuelle *Teile*, welche gewissermaßen teils auseinanderfallen, teils ineinander eindringen. Die Mannigfaltigkeit von Beziehungen zwischen dem Ganzen und den Teilen ist bei den Typen eine so große, daß es geraten scheint, sich zunächst auf die

¹ Man vgl. Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre S. 4 [S. 168].

Betrachtung der einfachsten Verhältnisse zu beschränken; sie hängen mit den Operationen des *Addierens* und *Multiplizierens* von zwei n -fachen Typen α und β zusammen, und diese will ich jetzt mit der unerläßlichen Ausführlichkeit erklären.

a) *Definitionen von $\alpha + \beta$* . Wir denken uns zwei Mengen M und N , denen die Typen $\overline{M} = \alpha$, $\overline{N} = \beta$ zukommen, und setzen aus ihnen eine neue geordnete Menge, die wir mit $M + N$ bezeichnen, zusammen, und zwar mit folgenden Bestimmungen über die Rangordnung der Elemente. Die Elemente von M mögen innerhalb $M + N$ *untereinander* dieselbe Rangordnung nach allen n Richtungen behalten, welche sie in M hatten; ebenso mögen die Elemente von N innerhalb $M + N$ *untereinander* dieselbe Rangordnung nach allen n Richtungen bewahren, welche ihnen in N zukam; endlich mögen in $M + N$ alle Elemente von N nach jeder der n Richtungen höheren Rang haben als alle Elemente von M .

Alle Mengen $M + N$, welche diesen Anforderungen genügen, sind offenbar untereinander ähnliche n -fach geordnete Mengen und bestimmen denjenigen Typus, den wir als die Summe $\alpha + \beta$ betrachten wollen. Wir haben also folgende Definitionsgleichung:

$$\alpha + \beta = \overline{M + N},$$

und es heißt hier α der *Augendus*, β der *Addendus*.

Darnach beweist man leicht die Gültigkeit des *assoziativen* Gesetzes:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Das kommutative Gesetz hat dagegen hier *keine* allgemeine Herrschaft; abgesehen von Ausnahmen, sind $\alpha + \beta$ und $\beta + \alpha$ *verschiedene* Typen.

Man bemerke noch, daß die Kardinalzahl von $\alpha + \beta$ gleich ist der Summe der Kardinalzahlen von α und β (vgl. Nr. 5); in Zeichen:

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}.$$

b) *Definition von $\alpha \cdot \beta$* . Man lege eine Menge N vom Typus β zugrunde, so daß $\overline{N} = \beta$, und bezeichne die Elemente, aus denen N besteht, mit $F_1, F_2, \dots, F_\lambda, \dots$

Ferner seien $M_1, M_2, \dots, M_\lambda, \dots$ lauter Mengen vom Typus α , so daß

$$\overline{M_1} = \overline{M_2} = \dots = \overline{M_\lambda} = \dots = \alpha.$$

Diese einander ähnlichen Mengen denken wir uns auf einander abgebildet; es seien:

$E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,\mu}, \dots$ die Elemente von M_1

$E_{2,1}, E_{2,2}, \dots, E_{2,\mu}, \dots$ die Elemente von M_2

.....

$E_{\lambda,1}, E_{\lambda,2}, \dots, E_{\lambda,\mu}, \dots$ die Elemente von M_λ, \dots

und zwar mögen

$$E_{1,\mu}, E_{2,\mu}, \dots, E_{\lambda,\mu}, \dots$$

bei den zugrunde gelegten Abbildungen einander entsprechende Elemente von $M_1, M_2, \dots, M_\lambda, \dots$ sein.

Es werde nun eine neue Menge, die ich mit $M \cdot N$ bezeichne, aus N dadurch gebildet, daß darin an Stelle der Elemente $F_1, F_2, \dots, F_\lambda, \dots$ resp. die Mengen $M_1, M_2, \dots, M_\lambda, \dots$ substituiert werden, wobei die Rangordnung folgenden Bestimmungen unterworfen sei. Alle Elemente $E_{\lambda,\mu}$ einer und derselben Menge M_λ mögen innerhalb $M \cdot N$ untereinander nach allen n Richtungen dasselbe Rangverhältnis behalten, welches sie in M_λ hatten. Für zwei Elemente $E_{\kappa,\mu}$ und $E_{\lambda,\mu'}$, welche zwei verschiedenen Mengen M_κ und M_λ angehören, muß dagegen eine Unterscheidung gemacht werden: 1) Haben F_κ und F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung verschiedenen Rang, so sei die Rangbeziehung von $E_{\kappa,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb $M \cdot N$ in der ν^{ten} Richtung dieselbe, wie die von F_κ zu F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung. 2) Haben F_κ und F_λ innerhalb N nach der ν^{ten} Richtung gleichen Rang, so sei das Rangverhältnis von $E_{\kappa,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb $M \cdot N$ in der ν^{ten} Richtung dasselbe, wie das von $E_{\kappa,\mu}$ zu $E_{\kappa,\mu'}$ innerhalb M_κ oder, was wegen der Abbildung von M_κ auf M_λ dasselbe bedeutet, wie das von $E_{\lambda,\mu}$ zu $E_{\lambda,\mu'}$ innerhalb M_λ nach der ν^{ten} Richtung.

Man überzeugt sich leicht, daß alle nach dieser Vorschrift gebildeten n -fach geordneten Mengen $M \cdot N$ untereinander *ähnlich* sind, und es gilt dies im besondern auch, wenn statt der zugrunde gelegten Abbildungen der Mengen $M_1, M_2, \dots, M_\lambda, \dots$ andere Abbildungen derselben vorausgesetzt werden, falls deren mehrere möglich sind.

Mit der Menge $M \cdot N$ ist also ein bestimmter Typus gegeben und dieser ist es, der das Produkt aus dem *Multiplikandus* α in den *Multiplikator* β genannt werden soll. Wir haben also folgende Definition:

$$\alpha \cdot \beta = \overline{M \cdot N}.$$

Man beweist auch hier das *assoziative* Gesetz:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma,$$

während $\alpha \cdot \beta$ im allgemeinen von $\beta \cdot \alpha$ verschieden ist.

Auch hat man das *distributive* Gesetz:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

mit α als *Multiplikandus*.

Ferner sieht man, im Hinblick auf Nr. 6, daß die Kardinalzahl des Produkts zweier Typen gleich ist dem Produkt aus den Kardinalzahlen der beiden Faktoren; in Zeichen:

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}.$$

Ist ein Typus π nicht anders als Produkt zweier Typen α und β darstellbar, als daß der *Multiplikator* β dem Typus π selbst oder der Eins im n -fachen Ordnungssystem gleich ist, so nennen wir π einen *Primtypus*.

12. Mit einem gegebenen n -fachen Typus α hängen gewisse andere Typen eng zusammen, welche ich die mit α *konjugierten Typen* nenne.

Man kann die dem Typus α eigene Rangordnung so verändern, daß sämtliche Rangbeziehungen der Einsen e, e', e'', \dots mit Bezug auf die μ^{te} und ν^{te} Richtung miteinander vertauscht, nach allen anderen Richtungen aber erhalten bleiben.

Zwei Einsen e und e' haben demnach im transformierten Typus nach der μ^{ten} und ν^{ten} Richtung dieselben Rangbeziehungen, welche ihnen in α resp. nach der ν^{ten} und μ^{ten} Richtung zukommen, während nach den anderen $n - 2$ Richtungen keine Änderung in der Rangordnung der Einsen eintritt. Diese Transformation nennen wir die *Vertauschungstransformation mit Bezug auf die μ^{te} und ν^{te} Richtung*.

Solcher Vertauschungstransformationen gibt es $n \binom{n-1}{2}$; ihre wiederholte Anwendung liefert, wenn der Typus α mitgezählt wird, im ganzen $n! = 1. 2. 3 \dots n$ im allgemeinen verschiedene konjugierte Typen.

Es läßt sich aber auch aus α dadurch ein im allgemeinen neuer Typus herstellen, daß alle Rangverhältnisse mit Bezug auf die ν^{te} Richtung *umgekehrt*, mit Bezug auf die anderen Richtungen aber konserviert werden. Zwei Einsen e und e' haben hier im transformierten Typus mit Bezug auf die ν^{te} Richtung das entgegengesetzte Rangverhältnis von demjenigen, welches sie nach derselben ν^{ten} Richtung in α haben; kommt den Einsen e und e' in α gleicher Rang in der ν^{ten} Richtung zu, so bleibt er natürlich bei der Transformation erhalten; nach allen übrigen Richtungen sind die Rangbeziehungen von e und e' in beiden Typen dieselben. Diese Transformation nennen wir *Umkehrtransformation mit Bezug auf die ν^{te} Richtung*. Solcher Umkehrtransformationen gibt es n ; ihre sukzessive Anwendung liefert, wenn α mitgezählt wird, im ganzen 2^n verschiedene konjugierte Typen.

Setzt man die Vertauschungstransformationen und die Umkehrtransformationen beliebig zusammen, so erhält man, mit Einschluß von α , im ganzen $2^n \cdot n!$ im allgemeinen verschiedene konjugierte Typen. In besonderen Fällen reduzieren sich dieselben auf eine geringere Zahl, unter Umständen sind sie sogar alle gleich.

13. Beschränken wir unsere weiteren Betrachtungen zunächst auf *endliche* n -fache Typen, d. h. auf solche, bei denen die zugehörige Kardinalzahl m *endlich* ist.

Die *reinen* einfachen Typen ($n = 1$) fallen hier mit den *endlichen* Ord-

nungszahlen 1, 2, 3, 4, ... zusammen, weil die *endlichen einfach* geordneten Mengen von *reinem* Typus zugleich immer wohlgeordnete Mengen (vgl. über diesen Begriff; Grundl. e. allg. Mannigfaltigkeit. p. 4.) sind, deren Typen ich allgemein *Ordnungszahlen* nenne. Zu jeder endlichen Kardinalzahl m gibt es nur einen einzigen *reinen* einfachen Typus, d. h. *nur eine* Ordnungszahl; es hängt dies unmittelbar mit dem in Nr. 7 bewiesenen Satz zusammen, wonach eine *endliche Menge* niemals einem ihrer Bestandteile äquivalent ist.

Die Anzahl *aller* einfachen Typen ($n = 1$), d. h. der reinen und der gemischten, von gegebener Kardinalzahl m ist hingegen, wie man sich leicht überzeugt, gleich 2^{m-1} .

Fassen wir jetzt die *zweifachen* Typen ($n = 2$) von endlicher Kardinalzahl m näher ins Auge.

Ein solcher Typus α besteht (vgl. Nr. 10) aus m *Einsen*, die nach zwei voneinander unabhängigen Richtungen eine bestimmte Rangordnung haben.

Es mögen diese m Einsen im ganzen s verschiedene Rangstufen nach der *ersten* Richtung haben und t sei die Anzahl der verschiedenen Rangstufen nach der *zweiten* Richtung.

Die verschiedenen Rangstufen erster Richtung wollen wir als $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \dots, s^{\text{te}}$ Rangstufe unterscheiden, und zwar so, daß die 1^{te} Rangstufe alle Einsen von α umfaßt, welche den niedrigsten Rang nach der ersten Richtung haben, die zweite alle Einsen enthält, welche den nächst höheren Rang nach der ersten Richtung haben usw.; auch werde mit g_1 die Anzahl der verschiedenen Einsen bezeichnet, welche nach der ersten Richtung den ersten Rang haben, mit g_2 die Anzahl der Einsen zweiten Ranges usw., mit g_s die Anzahl der Einsen s^{ten} Ranges in bezug auf die erste Richtung.

Ganz analog unterscheiden wir $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \dots, t^{\text{te}}$ Rangstufe zweiter Richtung und bezeichnen mit h_1, h_2, \dots, h_t die Anzahlen der Einsen, welche resp. den $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \dots, t^{\text{ten}}$ Rang nach der zweiten Richtung haben.

So entsprechen jedem Typus α gewisse *positive* ganze Zahlen $s, t, g_1, g_2, \dots, g_s, h_1, h_2, \dots, h_t$. Ihrer Bedeutung nach sind sie alle $\leq m$ und man hat immer

$$g_1 + g_2 + \dots + g_s = h_1 + h_2 + \dots + h_t = m. \quad (1)$$

Zur vollständigen Bestimmung des zweifachen Typus α führen wir ein System von $s \cdot t$ Größen $k_{\mu, \nu}$ ein, wo der Index μ die Werte 1, 2, 3, ..., s , der Index ν die Werte 1, 2, 3, ..., t erhält, und zwar habe $k_{\mu, \nu}$ die Bedeutung der Anzahl derjenigen Einsen in α , welche den μ^{ten} Rang nach der ersten und den ν^{ten} Rang nach der zweiten Richtung haben; falls solche Einsen in α nicht vorhanden sind, habe $k_{\mu, \nu}$ den Wert Null.

Wir wollen das so bestimmte System:

$$\begin{array}{cccc}
 k_{1,t}, & k_{2,t}, & \dots, & k_{s,t} \\
 k_{1,t-1}, & k_{2,t-1}, & \dots, & k_{s,t-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 k_{1,2}, & k_{2,2}, & \dots, & k_{s,2} \\
 k_{1,1}, & k_{2,1}, & \dots, & k_{s,1}
 \end{array} \tag{2}$$

die *Charakteristik* von α nennen.

Ist α ein *reiner* Typus, so haben die Größen $k_{\mu,\nu}$ nur die Werte 0 und 1; bei *gemischten* Typen α kommt unter den Größen $k_{\mu,\nu}$ wenigstens eine vor, die größer ist als 1.

Es bestehen hier folgende Gleichungen, die sich unmittelbar aus der Bedeutung der darin vorkommenden Buchstaben ergeben:

$$\left. \begin{array}{l}
 \sum_{\substack{\mu=1,2,\dots,s \\ \nu=1,2,\dots,t}} k_{\mu,\nu} = m \\
 \sum_{\nu=1,2,\dots,t} k_{\mu,\nu} = g_{\mu} \\
 \sum_{\mu=1,2,\dots,s} k_{\mu,\nu} = h_{\nu}
 \end{array} \right\} \tag{3}$$

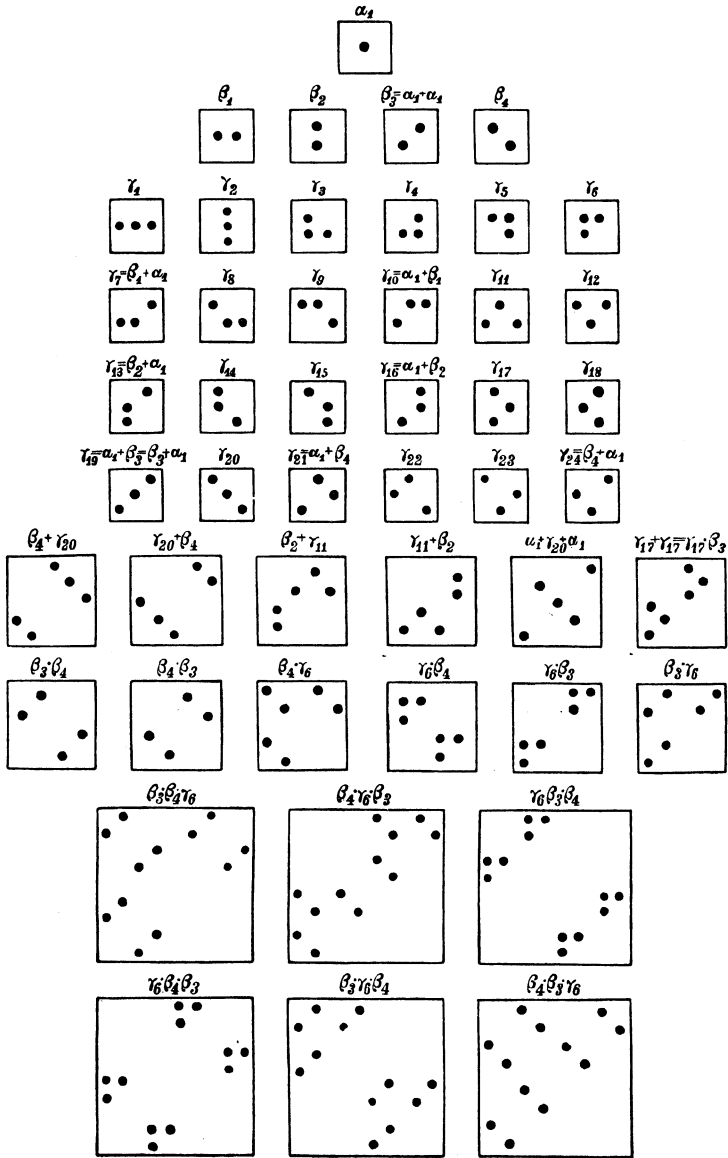
Es stellt daher das System (2) von *nicht negativen* ganzen Zahlen $k_{\mu,\nu}$ *dann und nur dann* die *Charakteristik* eines zweifachen Typus α vor, wenn die daraus nach (3) resultierenden Summen m , g_{μ} und h_{ν} *von Null verschiedene* positive ganze Zahlen sind, wie aus dem Sinn von m , g_{μ} und h_{ν} sich ergibt.

Unsere Aufgabe sei nun die Bestimmung der *Anzahl aller reinen zweifachen Ordnungstypen von gegebener Kardinalzahl m* ; diese Anzahl, als Funktion von m gedacht, werde mit $\Phi(m)$ bezeichnet.

Bevor ich die Lösung entwickle, möchte ich in der nebenstehenden Tafel¹ die verschiedenen zweifachen *reinen* Typen für $m = 1, 2$ und 3 veranschaulichen, deren es für $m = 1$ *einen*: α_1 , für $m = 2$ *vier*: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, für $m = 3$ *vierundzwanzig*: γ_1 bis γ_{24} gibt. Sie sind durch *Punktmengen* in der Ebene dargestellt, welche wir in dem Sinne als zweifach geordnete Mengen aufzufassen haben, daß die erste Ordnungsrichtung durch die horizontale Richtung von links nach rechts, die zweite Ordnungsrichtung durch die vertikale Richtung von unten nach oben bestimmt sind. Jeder *Punkt* repräsentiert eine *Eins* in dem betreffenden Ordnungstypus. Punkte, welche auf einer und derselben Vertikalen liegen, entsprechen im Typus Einsen, die

¹ Ich verdanke die zweckmäßige Herstellung derselben Herrn Dr. H. Wiener, Privatdozenten der Mathematik an der Universität in Halle.

nach der ersten Richtung gleichen Rang haben; liegen aber zwei Punkte nicht auf einer Vertikalen, so hat von den beiden durch sie dargestellten Einsen diejenige den niedrigeren Rang in der ersten Ordnungsrichtung,



welche dem links vom andern gelegenen Punkte entspricht. Ebenso haben Einsen, denen Punkte auf einer und derselben Horizontalen entsprechen, im Typus gleichen Rang nach der zweiten Ordnungsrichtung, wogegen von zwei Einsen, deren entsprechende Punkte nicht auf einer und derselben

Horizontalen liegen, diejenige den niedrigeren Rang nach der zweiten Ordnungsrichtung hat, für welche der entsprechende Punkt der niedriger in der Ebene gelegene ist.

Zur Erläuterung der Zahlen s, t, g, h bemerke ich, daß in $\alpha_1: s = 1, t = 1$, in $\beta_1: s = 2, t = 1$, in $\beta_2: s = 1, t = 2$, in β_3 und $\beta_4: s = 2, t = 2$, in $\gamma_1: s = 3, t = 1$, in $\gamma_2: s = 1, t = 3$, in γ_3 bis $\gamma_6: s = 2, t = 2$, in γ_7 bis $\gamma_{12}: s = 3, t = 2$, in γ_{13} bis $\gamma_{18}: s = 2, t = 3$, in γ_{19} bis $\gamma_{24}: s = 3, t = 3$ ist. Ferner hat man beispielsweise in $\gamma_6: g_1 = 2, g_2 = 1, h_1 = 1, h_2 = 2$, in γ_{19} bis $\gamma_{24}: g_1 = g_2 = g_3 = h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Die vier letzten Reihen in unsrer Tafel mögen die in Nr. 11 erklärten Operationen der *Addition* und *Multiplikation* von Typen veranschaulichen.

Es werde nun mit $\varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$ die Anzahl der reinen zweifachen Typen bezeichnet, in welchen s und t (beide $\leq m$) sowohl wie auch g_1, g_2, \dots, g_s gegebene positive Werte haben, bei denen die Bedingungsgleichung (1) erfüllt sei. Dann setzt sich offenbar $\Phi(m)$ nach folgender Formel zusammen:

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{g_1 + g_2 + \dots + g_s = m \\ s = 1, 2, \dots, m \\ t = 1, 2, \dots, m}} \varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, t). \tag{4}$$

Die Summation ist hier so zu verstehen, daß den Buchstaben s und t alle Werte von 1 bis m beizulegen sind und bei jedem Wertepaar s, t die Buchstaben g_1, g_2, \dots, g_s alle positiven Wertssysteme zu durchlaufen haben, die der Bedingungsgleichung (1) genügen.

$\varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$ ist nach (3) die Anzahl der Lösungssysteme $(k_{\mu, \nu})$, welche folgenden s Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} k_{1,1} + k_{1,2} + \dots + k_{1,t} = g_1 \\ k_{2,1} + k_{2,2} + \dots + k_{2,t} = g_2 \\ \dots\dots\dots \\ k_{s,1} + k_{s,2} + \dots + k_{s,t} = g_s \end{array} \right\} \tag{5}$$

sowie auch den t Nebenbedingungen:

$$h_1 > 0, h_2 > 0, \dots h_t > 0 \tag{6}$$

genügen, wobei die $s \cdot t$ Unbekannten $k_{\mu, \nu}$ nur die Werte 0 und 1 erhalten dürfen und wo die h_ν die Bedeutung der in (3) geschriebenen Summen haben.

Sei $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(k_{\mu, \nu})$ für dasselbe Gleichungssystem (5), wenn die Nebenbedingungen (6) fallen gelassen werden; diese Anzahl ist, weil hier die Gleichungen (5) unabhängig voneinander aufzulösen sind, gleich dem Produkt aus den Anzahlen der Lösungen, welche die einzelnen Gleichungen (5), jede für sich, haben.

Die Anzahl der Lösungssysteme einer Gleichung von der Form:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_t = g$$

in ganzen Zahlen k_1, k_2, \dots, k_t , welche nur die Werte 0 und 1 annehmen dürfen, ist gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{t}{g} = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-g+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot g}. \quad (7)$$

Man hat folglich:

$$\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t) = \binom{t}{g_1} \cdot \binom{t}{g_2} \cdot \dots \cdot \binom{t}{g_s}. \quad (8)$$

Zwischen den Funktionen φ und φ' besteht aber folgende Beziehung:

$$\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t) = \sum_{\nu=0,1,2,\dots,t-1} \binom{t}{\nu} \cdot \varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, t-\nu). \quad (9)$$

Das allgemeine Glied dieser Summe ist nämlich gleich der Anzahl derjenigen Lösungssysteme von (5), für welche ν der Summen h_1, h_2, \dots, h_t den Wert Null, die übrigen $t-\nu$ dieser Summen aber von Null verschiedene Werte haben; summiert man daher von $\nu=0$ bis $\nu=t-1$, so erhält man als Resultat die Anzahl $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$.

Aus (9) ergibt sich leicht, wenn man darin $t=1, 2, 3, \dots, m$ setzt und diese m Gleichungen nach den Werten der Funktion φ' auflöst, folgende Umkehrung:

$$\varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, t) = \sum_{\nu=0,1,\dots,t-1} (-1)^\nu \binom{t}{\nu} \cdot \varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t-\nu). \quad (10)$$

Wird dieser Wert von φ' in die Formel (4) eingesetzt, nachdem vorher der Buchstabe t in t' verwandelt worden ist, so erhält man:

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{\nu=0,1,2,\dots,t'-1 \\ g_1+g_2+\dots+g_s=m \\ s=1,2,\dots,m \\ t'=1,2,\dots,m}} (-1)^\nu \binom{t'}{\nu} \cdot \varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t'-\nu).$$

Fassen wir hier diejenigen Glieder zusammen, in denen $t'-\nu$ einen und denselben Wert t hat, so erhält der Koeffizient von $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$ folgenden Wert:

$$\sum_{\nu=0,1,2,\dots,m-t} (-1)^\nu \binom{t+\nu}{\nu} = (-1)^{m-t} C(m, t),$$

wo demnach wegen $\binom{t+\nu}{\nu} = \binom{t+\nu}{t}$ die hier eingeführte Funktion $C(m, t)$ durch folgende Gleichung definiert ist

$$C(m, t) = \binom{m}{t} - \binom{m-1}{t} + \binom{m-2}{t} - \dots - (-1)^{m-t} \binom{t}{t}. \quad (11)$$

Wir haben daher

$$\Phi(m) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\dots+g_s=m \\ s=1,2,\dots,m \\ t=1,2,\dots,m}} (-1)^{m-t} C(m, t) \cdot \varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t).$$

Wird also folgende Funktion:

$$D(m, t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\dots+g_s=m \\ s=1,2,\dots,m}} \varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t) \tag{12}$$

in die Betrachtung eingeführt, so haben wir:

$$\Phi(m) = \sum_{t=1,2,\dots,m} (-1)^{m-t} C(m, t) \cdot D(m, t). \tag{13}$$

Hiermit ist die gesuchte Funktion $\Phi(m)$ auf die beiden Funktionen $C(m, t)$ und $D(m, t)$, welche durch die Formeln (11) und (12) definiert sind, zurückgeführt.

Zur praktischen Berechnung bieten sich Rekursionsformeln dar.

Für $C(m, t)$ beweist man leicht die Funktionalgleichung:

$$C(m + 1, t + 1) = C(m, t + 1) + C(m, t). \tag{14}$$

Man hat außerdem für diese Funktion die Werte:

$$\left. \begin{aligned} C(2m, 1) = m; \quad C(2m + 1, 1) = m + 1; \\ C(m, m) = 1; \quad C(m, t) = 0, \text{ wenn } t > m. \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

Daraus ergibt sich nebenstehende Tabelle für $C(m, t)$, die leicht zu vervollständigen ist. Andererseits haben wir nach (12):

m	$t=$	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	1	1					
3	2	2	1				
4	2	4	3	1			
5	3	6	7	4	1		
6	3	9	13	11	5	1	

$$D(m + 1, t) = \sum_{\substack{g_0+g_1+\dots+g_s=m+1 \\ s=0,1,2,\dots,m}} \varphi(g_0, g_1, \dots, g_s, t).$$

Für $s = 0$, $g_0 = m + 1$ nimmt das allgemeine Glied der letzten Summe den Wert $\binom{t}{m+1}$ an; man kann daher, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß g_1, g_2, \dots, g_s positiv sind und daher $s \leq m + 1 - g_0$ sein muß, schreiben:

$$D(m + 1, t) = \binom{t}{m+1} + \sum_{\substack{g_1+g_2+\dots+g_s=m+1-g_0 \\ s=1,2,3,\dots,m+1-g_0 \\ g_0=1,2,3,\dots,m}} \binom{t}{g_0} \varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t).$$

Also ist

$$\begin{aligned} D(m + 1, t) &= \binom{t}{m+1} + \binom{t}{m} D(1, t) \\ &\quad + \binom{t}{m+1} D(2, t) + \dots + \binom{t}{1} D(m, t). \end{aligned}$$

Setzt man daher fest, daß

$$D(0, t) = 1 \tag{16}$$

sei, so hat man folgende Rekursionsformel:

$$D(m+1, t) = \binom{t}{1} D(m, t) + \binom{t}{2} D(m-1, t) + \dots + \binom{t}{m+1} D(0, t). \quad (17)$$

Man bemerke noch, daß stets

$$D(m, 1) = 1 \quad (18)$$

ist.

Um hieraus $D(m, t)$ zu berechnen, bedürfen wir der nebenstehenden Tafel für den Binomialkoeffizienten $\binom{t}{m}$.

$t =$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2		1	3	6	10	15
3			1	4	10	20
4				1	5	15
5					1	6
6						1

So gewinnt man folgende zu vervollständigende Tafel für $D(m, t)$:

$t =$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	5	12	22	35	51
3	1	12	46	116	235	416
4	1	29	177	613	1580	3396
5	1	70	681	3240	10626	27732
6	1	169	2620	17124	71460	226454

Mit Hilfe dieser Tabellen ergeben sich aus (13) folgende Werte der Funktion $\Phi(m)$:

$$\Phi(1) = 1; \quad \Phi(2) = 4; \quad \Phi(3) = 24; \quad \Phi(4) = 196; \\ \Phi(5) = 2016; \quad \Phi(6) = 24976.$$

Dies sind für $m = 1$ bis 6 die Anzahlen der *reinen* zweifachen Ordnungstypen. Handelt es sich aber um die Anzahl *aller* zweifachen Ordnungstypen (der reinen und der gemischten) bei gegebener Kardinalzahl m , welche wir mit $\Psi(m)$ bezeichnen wollen, so kann derselbe Weg eingeschlagen werden wie für die Berechnung von $\Phi(m)$.

Das Gleichungssystem (5) wird jetzt so aufzulösen sein, daß die Unbekannten $k_{\mu, \nu}$ nicht bloß die Werte 0 und 1, sondern beliebige nicht negative ganzzahlige Werte annehmen dürfen.

An die Stelle der Funktion $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$ tritt hier eine andere, die wir $\psi(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$ nennen wollen und welche durch die Gleichung definiert ist:

$$\psi(g_1, g_2, \dots, g_s, t) = \binom{t+g_1-1}{g_1} \cdot \binom{t+g_2-1}{g_2} \cdot \dots \cdot \binom{t+g_s-1}{g_s}. \quad (19)$$

Versteht man daher unter $E(m, t)$ folgende Funktion:

$$E(m, t) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\dots+g_s=m \\ s=1,2,\dots,m}} \psi(g_1, g_2, \dots, g_s, t). \quad (20)$$

so hat man:

$$\Psi(m) = \sum_{t=1,2,\dots,m} (-1)^{m-t} C(m, t) E(m, t). \quad (21)$$

Es besteht aber auch ein einfacher Zusammenhang zwischen $\Phi(m)$ und $\Psi(m)$, der durch Zurückgehen auf die Bedeutung dieser Anzahlen direkt geschlossen wird, in Gestalt folgender Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Psi(m) = \Phi(m) + \binom{m-1}{1} \Phi(m-1) + \binom{m-1}{2} \Phi(m-2) + \dots \\ + \binom{m-1}{m-2} \Phi(2) + \Phi(1), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Phi(m) = \Psi(m) - \binom{m-1}{1} \Psi(m-1) + \binom{m-1}{2} \Psi(m-2) + \dots \\ + (-1)^{m-2} \binom{m-1}{m-2} \Psi(2) + (-1)^{m-1} \Psi(1). \end{aligned} \quad (23)$$

Aus (22) erhält man mit Hilfe der gefundenen Werte von $\Phi(m)$:

$$\begin{aligned} \Psi(1) = 1; \quad \Psi(2) = 5; \quad \Psi(3) = 33; \quad \Psi(4) = 281; \\ \Psi(5) = 2961; \quad \Psi(6) = 37277. \end{aligned}$$

14. Das Verfahren, durch welches wir die Anzahlen $\Phi(m)$ und $\Psi(m)$ der *zweifachen* Ordnungstypen in Nr. 13 bestimmt haben, läßt sich auch auf ein beliebiges n übertragen.

Es werde mit $\Phi(m, n)$ die Anzahl der *reinen*, mit $\Psi(m, n)$ die Anzahl der *reinen und gemischten* n -fachen Ordnungstypen von der Kardinalzahl m bezeichnet.

In einem n -fachen Typus α sind die Einsen nach n verschiedenen voneinander unabhängigen Richtungen, welche von uns als $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \dots, \nu^{\text{te}}, \dots, n^{\text{te}}$ Richtung unterschieden werden, geordnet.

Wir bezeichnen mit s_ν die Anzahl der verschiedenen in α vorkommenden *Rangstufen* nach der ν^{ten} Richtung.

$g_{\nu, \mu}$ sei die Anzahl der verschiedenen Einsen in α , welche den μ^{ten} Rang nach der ν^{ten} Richtung einnehmen; es erhält daher der Index μ die Werte $1, 2, 3, \dots, s_\nu$.

Alle s_v und $g_{v,u}$ sind *positive ganze Zahlen* $\leq m$ und man hat für *jedes bestimmte* $v = 1, 2, 3, \dots, n$

$$\sum_{u=1, 2, \dots, s_v} g_{v,u} = m. \tag{24}$$

Unter der *Charakteristik* des Typus α verstehen wir ein System von s_1, s_2, \dots, s_n Zahlen

$$(k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}), \tag{25}$$

wo der Index λ_v die Werte $1, 2, 3, \dots, s_v$ anzunehmen hat, und zwar hat $k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ die Bedeutung der Anzahl aller in α vorkommenden Einsen, welche nach der ersten Richtung den λ_1^{ten} , nach der zweiten Richtung den λ_2^{ten} , u. s. w., nach der n^{ten} Richtung den λ_n^{ten} Rang einnehmen; falls solche Einsen in α nicht existieren, soll $k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ den Wert Null haben. Ist α ein *reiner* Typus, so kommen den Größen k nur die Werte 0 und 1 zu.

Aus der Bedeutung der Größen k und g folgen unmittelbar die Gleichungen:

$$\sum_{\substack{\lambda_1=1, 2, \dots, s_1 \\ \lambda_2=1, 2, \dots, s_2 \\ \dots \\ \lambda_n=1, 2, \dots, s_n}} k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = m \tag{26}$$

und

$$\sum k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v, \dots, \lambda_n} = g_{v, \lambda_v}, \tag{27}$$

wo die Summierung sich über alle Werte der Indizes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zu erstrecken hat, mit *Ausnahme* des Index λ_v , der bei der Summation einen *konstanten Wert* der Reihe $1, 2, 3, \dots, s_v$ behält.

Das System (25) von *nicht negativen* ganzen Zahlen $k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ bildet *dann und nur dann* die Charakteristik eines bestimmten n -fachen Typus α , wenn die aus ihnen nach (26) und (27) resultierenden Summen $m, g_{v,u}$ *von Null verschiedene positive ganze Zahlen* sind.

In der nun folgenden Betrachtung spielt die *erste* der n Ordnungsrichtungen eine bevorzugte Rolle, und wir wollen daher für die sich auf sie beziehenden Größen einfachere Bezeichnungen einführen. Wir setzen:

$$s_1 = s, \quad g_{1,1} = g_1, \quad g_{1,2} = g_2, \quad \dots, \quad g_{1,s} = g_s.$$

Es sei $\varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, s_2, s_3, \dots, s_n)$ die Anzahl der *reinen* n -fachen Typen, für welche die Größen s, s_2, \dots, s_n bestimmte positive ganzzahlige Werte $\leq m$ und ebenso g_1, g_2, \dots, g_s bestimmte der Gleichung

$$g_1 + g_2 + \dots + g_s = m$$

genügende positive ganzzahlige Werte haben.

Man hat alsdann:

$$\Phi(m, n) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\dots+g_s=m \\ s=1, 2, \dots, m \\ s_2=1, 2, \dots, m \\ \dots \\ s_n=1, 2, \dots, m}} \varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, s_2, s_3, \dots, s_n). \tag{28}$$

Die Funktion φ' läßt sich nun, wie die in Nr. 13 mit demselben Zeichen vorkommende, auf die durch Formel (8) definierte Funktion $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t)$ zurückführen; setzen wir die Bezeichnungen

$$s_2 = t_1, s_3 = t_2, \dots, s_n = t_{n-1}$$

fest, so besteht die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\varphi'(g_1, g_2, \dots, g_s, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \\ &= \sum_{\substack{\mu_1=0,1,\dots,t_1 \\ \mu_2=0,1,\dots,t_2 \\ \mu_{n-1}=0,1,\dots,t_{n-1}}} (-1)^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{n-1}} \binom{t_1}{\mu_1} \cdot \binom{t_2}{\mu_2} \cdot \dots \cdot \binom{t_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t). \end{aligned} \quad (29)$$

In dieser Summe hat der Buchstabe t die Bedeutung

$$t = (t_1 - \mu_1)(t_2 - \mu_2) \cdot \dots \cdot (t_{n-1} - \mu_{n-1}).$$

Wird dieser Wert in (28) eingesetzt, so erhält man, wenn $t'_1, t'_2, \dots, t'_{n-1}$ an Stelle von t_1, t_2, \dots, t_{n-1} , t' an Stelle von t gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \Phi(m, n) = \sum_{\substack{\mu_1=0,1,\dots,t'_1 \\ \mu_2=0,1,\dots,t'_2 \\ \dots \\ \mu_{n-1}=0,1,\dots,t'_{n-1}}} (-1)^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{n-1}} \binom{t'_1}{\mu_1} \binom{t'_2}{\mu_2} \cdot \dots \cdot \binom{t'_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, t'). \end{aligned}$$

$g_1+g_2+\dots+g_s=m$
 $s=1,2,\dots,m$
 $t'_1=1,2,\dots,m$
 $t'_{n-1}=1,2,\dots,m$

Es ist hier

$$t' = (t'_1 - \mu_1)(t'_2 - \mu_2) \cdot \dots \cdot (t'_{n-1} - \mu_{n-1}).$$

Fassen wir diejenigen Glieder zusammen, in welchen $t'_1 - \mu_1, t'_2 - \mu_2, \dots, t'_{n-1} - \mu_{n-1}$ entsprechend die bestimmten Werte t_1, t_2, \dots, t_{n-1} haben, so erhält der Koeffizient von $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_s, (t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_{n-1}))$ den Wert

$$(-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\dots-t_{n-1}} C(m, t_1) C(m, t_2) \cdot \dots \cdot C(m, t_{n-1}).$$

Führen wir daher die folgende Funktion ein:

$$\begin{aligned} &C(m, n, t) \\ &= \sum_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}=1} (-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\dots-t_{n-1}} C(m, t_1) C(m, t_2) \cdot \dots \cdot C(m, t_{n-1}), \end{aligned} \quad (30)$$

wo t_1, t_2, \dots, t_{n-1} alle positiven ganzzahligen Wertsysteme anzunehmen haben, bei denen die Gleichung

$$t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_{n-1} = t \quad (31)$$

mit den Nebenbedingungen

$$t_1 \leq m, t_2 \leq m, \dots, t_{n-1} \leq m \quad (32)$$

erfüllt ist, so ergibt sich ohne weiteres die Formel:

$$\Phi(m, n) = \sum_{t=1,2,3,\dots,m^{n-1}} C(m, n, t) \cdot D(m, t). \quad (33)$$

Für den Fall $n = 2$ ist $C(m, 2, t) = (-1)^{m-t} C(m, t)$ und es geht die Formel (32) in die Formel (13) für $\Phi(m)$ über.

Ebenso findet man:

$$\Psi(m, n) = \sum_{t=1,2,3,\dots,m^{n-1}} C(m, n, t) \cdot E(m, t). \quad (34)$$

Auch bestehen zwischen $\Phi(m, n)$ und $\Psi(m, n)$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Psi(m, n) &= \Phi(m, n) + \binom{m-1}{1} \Phi(m-1, n) \\ &+ \binom{m-1}{2} \Phi(m-2, n) + \dots + \binom{m-1}{m-2} \Phi(2, n) + \Phi(1, n), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Phi(m, n) &= \Psi(m, n) - \binom{m-1}{1} \Psi(m-1, n) \\ &+ \binom{m-1}{2} \Psi(m-2, n) - \dots - (-1)^{m-2} \binom{m-1}{m-2} \Psi(2, n) + (-1)^{m-1} \Psi(1, n). \end{aligned} \quad (36)$$

[Anmerkungen.]

Dieser Aufsatz ist in seiner ersten Hälfte eine Fortsetzung des vorangehenden IV 3 und bestimmt, die Cantorsche Auffassung des Aktual-Unendlichen gegen philosophische und theologische Einwände zu verteidigen. Die zweite Hälfte dagegen (S. 420ff.) bringt eine ausführliche, rein mathematische Theorie der Ordnungstypen „mehrfach geordneter Mengen“, insbesondere der endlichen. Augenscheinlich hat Cantor eine Anwendung dieser Ordnungstypen, vielleicht auf physikalische Theorien der Materie und des Äthers vorgeschwebt. Ob sich diese speziellen Untersuchungen später noch einmal als fruchtbar erweisen werden, steht dahin.

[1] zu S. 408. Die Nicht-Existenz „aktual-unendlichkleiner Größen“ läßt sich ebenso wenig beweisen, wie die Nicht-Existenz der Cantorschen Transfiniten, und der Fehlschluß ist in beiden Fällen ganz der nämliche, indem den neuen Größen gewisse Eigenschaften der gewöhnlichen „endlichen“ zugeschrieben werden, die ihnen nicht zukommen können. Es handelt sich hier um die sogenannten „nicht-archimedischen“ Zahlensysteme bzw. Körper, deren Existenz heute als einwandfrei nachgewiesen betrachtet werden kann. Vgl. Van der Waerden, Moderne Algebra, Kap. X. In einem nicht-archimedisch geordneten Körper, in welchem z. B. $n\zeta < 1$ ist für jedes endliche ganzzahlige n , existiert auch keine „obere Grenze“ γ dieser Größen $n\zeta$, die mit $\omega\zeta$ bezeichnet werden könnte, weil das Intervall $(\gamma - \zeta, \gamma)$ höchstens eine Größe $n\zeta$ enthalten könnte, und die Multiplikation mit weiteren Transfiniten $\alpha > \omega$ wird gegenstandslos. Mit dem „Archimedischen Axiom“ fällt eben gleichzeitig auch das „Stetigkeitsaxiom“, wie z. B. in D. Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ hervorgehoben wird. Ob ein Satz ein „Axiom“ ist oder nicht, hängt nicht von seinem Inhalte ab, sondern vom Aufbau des ganzen Systems, von den das System definierenden Grundeigenschaften oder Axiomen. Indem Cantor das Stetigkeitsaxiom als gültig voraussetzt, schließt er in der Tat alle nicht-archimedischen Zahlensysteme aus, beweist aber nichts gegen die Existenz solcher „geordneten Körper“, in welchen weder das archimedische noch das Stetigkeitsaxiom gilt.