XXXIII. Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt.

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1918.) Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Dezember 1918.][1])

In meiner Note vom 19. Juli 1918 habe ich versucht, über die verschiedenen Formen, welche man in der Einsteinschen Gravitationstheorie den Differentialgesetzen für die Erhaltung von Impuls und Energie geben kann, eine Übersicht zu gewinnen; meine Aufgabe soll heute in erster Linie sein, zu der Integralform der Erhaltungssätze Stellung zu nehmen, welche Einstein für die von ihm bevorzugte Form der Differentialgesetze aufgestellt hat. Im Zusammenhang damit werde ich Einsteins Theorie der räumlich-geschlossenen Welt und die Abänderung, welche diese durch de Sitter gefunden hat, behandeln[2]). Die physikalischen Fragen werden nur gestreift, das Ziel ist, die *mathematischen* Zusammenhänge völlig klarzustellen; ich empfinde eine gewisse Genugtuung, daß dabei meine alten Ideen von 1871—72 zu entscheidender Geltung kommen[3]). Wie weit Fortschritte erzielt sind, möge der Leser selbst durch Vergleich mit den Darstellungen der anderen Autoren entscheiden.

[1]) Zum Druck eingereicht Ende Januar 1919.

[2]) Die in Betracht kommenden Veröffentlichungen sind:

Einstein. 1. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 8. Februar 1917.
2. Kritisches zu einer von Herrn de Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen, ebenda, 7. März 1918.
3. Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie, ebenda, 16. Mai 1918.

de Sitter. In verschiedenen Mitteilungen im Verslag der Amsterdamer Akademie, 1917, sowie in einer zusammenfassenden Artikelreihe in den Monthly Notices of the R. Astronomical Society: On Einsteins theory of gravitation and its astronomical consequences (siehe insbesondere den Schlußteil III vom November 1917).

[3]) Siehe insbesondere:
1. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen (1871), Bd. 4. [Abh. XVI dieser Ausgabe.]
2. Das Antrittsprogramm: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. [Abh. XXVII dieser Ausgabe.]

Ich erinnere zunächst an folgende Ergebnisse: Die Erhaltungssätze in der Form, die ich nach Lorentz benenne, (Formel (42) der vorigen Note), lauten:

$$\frac{\partial\left(\mathfrak{T}_\tau^\sigma+\frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{U}_\tau^\sigma\right)}{\partial w^\sigma}=0. \tag{1}$$

Schreiben wir

$$\frac{1}{\varkappa}\,\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}=\mathfrak{t}_\tau^\sigma, \tag{2}$$

so erhalten wir die Einsteinsche Form der Erhaltungssätze:

$$\frac{\partial\left(\mathfrak{T}_\tau^\sigma+\mathfrak{t}_\tau^\sigma\right)}{\partial w^\sigma}=0 \tag{3}$$

(Formel (44) der vorigen Note)[4].

Nun wird es der Einsteinschen Grundauffassung entsprechen, wenn ich weiterhin

$$\text{die } \frac{\mathfrak{U}_\tau^\sigma}{\varkappa},\quad \text{bez. die } \frac{\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}}{\varkappa}$$

kurzweg als *die (durch die zufällige Koordinatenwahl und den jeweiligen Ansatz bedingten) Gravitationskomponenten der Energie bezeichne.* Im übrigen will ich die hiernach sich ergebenden Komponenten der „Gesamtenergie" abkürzend mit dem Buchstaben V, bez. $\mathfrak{V}$, bezeichnen:

$$\mathfrak{T}_\tau^\sigma+\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^\sigma=\mathfrak{V}_\tau^\sigma,\qquad \mathfrak{T}_\tau^\sigma+\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}=\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}. \tag{4}$$

Es ist eine Besonderheit meiner folgenden Darstellung, auf die ich hier vorweg hinweise, daß ich die $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ (oder auch die $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}^*$) — welche beide ihre Vorzüge haben — immer nebeneinander betrachte; man sieht dann deutlicher, wie weit in den aufzustellenden Integralformen der Erhaltungssätze ein subjektives Moment zur Geltung kommt.

Zur Bequemlichkeit des Lesers setze ich die zugrunde liegende Definition der entsprechenden lateinischen Buchstaben nach Formel (16), (55) der vorigen Note noch einmal her. Man hat:

$$2\,U_\tau^\sigma=K\,\delta_\tau^\sigma-\frac{\partial K}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\,g_\tau^{\mu\nu}-\frac{\partial K}{\partial g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}}\,g_{\varrho\tau}^{\mu\nu}+\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,K}{\partial g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}}\right)}{\partial w^\varrho}\,g_\tau^{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$2\,U_\tau^*=G^*\,\delta_\tau^\sigma-\frac{\partial G^*}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}\,g_\tau^{\mu\nu}. \tag{6}$$

---

[4]) [Dieser ganze Absatz konnte wesentlich gekürzt werden, nachdem die bei der ersten Veröffentlichung an dieser Stelle aufgeführten, in der vorigen Note notwendigen Vorzeichenänderungen beim Wiederabdruck in dieser Ausgabe bereits daselbst Berücksichtigung gefunden haben. Auf die Notwendigkeit dieser Vorzeichenänderungen hat mich Herr Vermeil aufmerksam gemacht, der mich auch sonst bei vielen für die folgenden Betrachtungen erwünschten Rechnungen in dankenswerter Weise unterstützt hat. K.]

Ich habe in (5), wie durchweg in meiner vorigen Note, im Anschluß an Hilberts ursprüngliche Schreibweise, die Quadratwurzel $\sqrt{g}$ benutzt. Will man vollen Anschluß an die Einsteinsche Bezeichnungsweise haben, muß man überall $\sqrt{-g}$ nehmen. Auf die Schlußformeln (1) bis (3) hat diese Änderung keinen Einfluß; sie ist aber doch zweckmäßig, damit die der unmittelbaren Beobachtung unterliegenden Größen durchweg reelle Komponenten bekommen; sie soll also weiterhin ebenfalls als angenommen gelten.

I. Die Integralsätze für abgeschlossene Systeme der gewöhnlichen Theorie.

§ 1.

Von der vektoriellen Schreibweise mehrfacher Integrale. Erste Einführung des I_r bzw. I_r^*.

Wo immer man mit der Transformation mehrfacher Integrale zu tun hat, ist die übliche Schreibweise, z. B. $\iint f(xy)\,dx\,dy$, nicht zweckdienlich. Die Stückchen dx, dy sind doch auf verschiedene Richtungen abgetragen zu denken, gehören also zwei verschiedenen Vektoren an, so daß schon etwas gewonnen ist, wenn man $\iint f(xy)\,d'x\,d''y$ schreibt. Noch klarer wird die Bezeichnung, wenn man die Vektoren d', d'' nicht gerade parallel den beiden Koordinatenachsen, sondern beliebig wählt und das Produkt $d'x\,d''y$ dementsprechend durch den Inhalt des zwischen den beiden Vektoren eingeschlossenen Parallelogramms ersetzt. So kommen wir zu der Schreibweise

$$(7)\qquad \iint f(xy)\cdot\begin{vmatrix} d'x & d'y \\ d''x & d''y \end{vmatrix},$$

die ich gern die Graßmannsche nenne, weil sie den Ideenbildungen in Graßmanns Ausdehnungslehre von 1861 entspricht: die Formel ist der Beweglichkeit, die wir in den Begriff des mehrfachen Integrals legen, besser angepaßt.

Zum Zwecke der speziellen Auswertung wird man von (7) selbstverständlich in jedem Augenblicke zur gewöhnlichen Schreibweise zurückgehen können. Für alle Transformationsbetrachtungen aber ist (7) vorzuziehen. Setzen wir z. B. $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, so ist aus (7) unmittelbar klar, warum in die Transformationsformel des Integrals die Jacobische Funktionaldeterminante eingeht. Denn man hat identisch:

$$f(xy)\cdot\begin{vmatrix} d'x & d'y \\ d''x & d''y \end{vmatrix} = f(\varphi\psi)\cdot\begin{vmatrix} \varphi_\xi & \varphi_\eta \\ \psi_\xi & \psi_\eta \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d'\xi & d'\eta \\ d''\xi & d''\eta \end{vmatrix}.$$

Dies vorausgeschickt werden wir nun in der Folge gewisse dreifache Integrale betrachten, die sich so anschreiben:

$$(8) \qquad I_\tau = \int\!\!\int\!\!\int \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_\tau^I & \ldots & \mathfrak{B}_\tau^{IV} \\ d'w^I & \ldots & d'w^{IV} \\ d''w^I & \ldots & d''w^{IV} \\ d'''w^I & \ldots & d'''w^{IV} \end{vmatrix},$$

oder auch die anderen, die ich

$$(9) \qquad I_\tau^*$$

nenne und die sich aus dem Vorstehenden ergeben, indem man die $\mathfrak{B}_\tau^\sigma$ durch die $\mathfrak{B}_\tau^{*\sigma}$ ersetzt. — Zu erstrecken sind diese Integrale über irgendein Stück einer in der vierdimensionalen Welt $w^I \ldots w^{IV}$ gelegenen „Hyperfläche"; d', d'', d''' bezeichnen drei voneinander unabhängige Vektoren, die von dem einzelnen Punkt der Hyperfläche je in tangentialer Richtung auslaufen.

Aus den Differentialgesetzen (1), (3), denen die $\mathfrak{B}_\tau^\sigma$ bez. $\mathfrak{B}_\tau^{*\sigma}$ genügen, wird man — bei Voraussetzung der gewöhnlichen Stetigkeits- bez. Eindeutigkeitseigenschaften für die $\mathfrak{B}$ — von vornherein schließen, *daß diese I_τ, bez. I_τ^* Null sind, wenn man ihr Integrationsgebiet in der Weise geschlossen annimmt, daß es ein bestimmtes Weltstück umgrenzt.* In der Tat verwandeln sich dann die I_τ in bekannter Weise in die über das umschlossene Weltstück erstreckten vierfachen Integrale

$$(10) \qquad I_\tau = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma}\right) \cdot \begin{vmatrix} dw^I & \ldots & dw^{IV} \\ d'w^I & \ldots & . \\ d''w^I & \ldots & . \\ d'''w^I & \ldots & . \end{vmatrix},$$

und ähnlich die I_τ^*, wo nun die Integranden selbst wegen der Erhaltungssätze (1), (3) ohne weiteres verschwinden. —

Unser besonderes Interesse aber richtet sich darauf, wie sich die I_τ, I_τ^* bei *affinen* Transformationen der w verhalten, wenn man also die w linearen Transformationen mit konstanten Koeffizienten unterwirft:

$$(11) \qquad \bar{w}^\varrho = a_1^\varrho w^I + \ldots + a_4^\varrho w^{IV} + c^\varrho.$$

Eben hier bewährt sich nun unsere vektorielle Schreibweise. Wir wissen aus den Entwicklungen der vorigen Note, daß sich die V_τ^σ, bez. $V_\tau^{*\sigma}$, bei den Transformationen (11) wie gemischte Tensoren verhalten; aus ihnen erwachsen die $\mathfrak{B}_\tau^\sigma$, bez. $\mathfrak{B}_\tau^{*\sigma}$ durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$ (bez. $\sqrt{-g}$). Danach ist ohne weiteres ersichtlich, daß sich die Integranden dI_τ, bez. dI_τ^*, wie „kontragrediente" Vektoren transformieren. Es will dies heißen, daß sie die aus (11) abgeleiteten *homogenen* linearen Substitutionen erleiden:

$$dI_\tau = a_\tau^I d\bar{I}_1 + \ldots + a_\tau^{IV} d\bar{I}_4.$$

Nun sind aber die Koeffizienten a in (11) nach Voraussetzung Konstante.

Wir werden also entsprechende Substitutionsformeln für unsere Integrale I_τ selbst haben:

$$(12)\qquad I_\tau = a_\tau^{I}\,\overline{I}_1 + \ldots + a_\tau^{IV}\,\overline{I}_4 .$$

(und natürlich ebenso für die I_τ^*), womit das hier abzuleitende Resultat bereits erreicht ist.

Der gedankliche Fortschritt aber, der sich mit diesen Formeln (12) verbindet, läßt sich so aussprechen: die dI_τ, dI_τ^* sind, wie alle Vektoren der allgemeinen Transformationstheorie, von Hause aus je an einen bestimmten Weltpunkt w als Ausgangspunkt angeknüpft, es sind *gebundene* Vektoren (oder, wenn wir uns noch genauer ausdrücken wollen: Vierervektoren). Diese Bindung an einen besonderen Punkt tritt nun bei den Transformationsformeln für die I_τ, I_τ^* ganz zurück. *Man wird die I_τ. I_τ^* zweckmäßigerweise als freie kontragrediente Vierervektoren bezeichnen*, d. h. als Vierervektoren, die nur eine Richtung und eine Intensität $\left(= \sqrt{\sum g^{\mu\nu} I_\mu I_\nu}\right)$ haben, aber keinen bestimmten Ort in der vierdimensionalen Welt.

Dieser Begriff des freien Vierervektors haftet natürlich durchaus daran, daß wir die Gruppe (11) der affinen Transformationen der w zugrunde legten. In der Physik, bez. Mechanik ist es eben genau so, wie ich es in meinem Erlanger Programm für die Geometrie darlegte: daß nämlich von einer Unterscheidung bestimmter Größenarten immer erst dann die Rede sein kann, wenn man sich über die Transformationsgruppe verständigt hat, an der man die Begriffsbildungen messen will. Ich bin schon seit Jahrzehnten dafür eingetreten, daß die Physiker die hierin liegende Auffassung, welche allein Klarheit schafft, bewußt aufnehmen möchten[5]). Insbesondere habe ich 1910 in meinem Vortrag über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe[6]) ausdrücklich bemerkt, daß man nie von Relativitätstheorie schlechtweg reden sollte, sondern immer nur von der Invariantentheorie relativ zu einer Gruppe. — Es gibt so viele Arten Relativitätstheorie als es Gruppen gibt[7]).

Die so formulierte Auffassung steht vielleicht im Gegensatz zu den Auseinandersetzungen, wie sie im Anschluß an Einsteins allgemeine Dar-

---

[5]) Vergl. u. a. meinen Aufsatz „Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball" im 47. Bande der Zeitschrift für Math. und Physik (1902), (1906 im 62 Bande der Math. Annalen mit einigen Erweiterungen wieder abgedruckt). [S. Abh. XXIX dieser Ausgabe.] (Es werden dort wie im Text nicht etwa neue physikalische Begriffsbildungen eingeführt, sondern es wird nur das, was bei eingehender Beschäftigung mit den Einzelproblemen von Vielen gemacht ist, auf ein klares mathematisches Prinzip bezogen.)

[6]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd 19 (1910), abgedruckt in der Physikalischen Zeitschrift, 12. Jahrgang, 1911. [S. Abh. XXX dieser Ausgabe.]

[7]) Vergleiche auch die Mitteilung über „Invariante Variationsprobleme" von Frl. Nöther im Jahrgang 1918, Göttinger Nachrichten (Schlußbemerkung daselbst).

legungen zurzeit vielfach propagiert werden, nicht aber, worauf ich großen Wert lege, zu Einsteins eigenen weitergehenden Einzelentwicklungen. Vielmehr zeigen die Einsteinschen Arbeiten, die ich in der vorliegenden Note kommentiere, daß sich Einstein im einzelnen Falle — ohne den Gedanken systematisch zu fassen — genau der Freiheit der Ideenbildung bedient, wie ich sie in meinem Erlanger Programm empfohlen habe.

§ 2.

Die Integrale I_τ, I_τ^* für abgeschlossene Systeme.

Unter einem „abgeschlossenen" System versteht Einstein in seiner oben unter 3) genannten Mitteilung ein solches, welches sozusagen in einer Minkowskischen Welt „schwimmt", d. h. ein System, dessen Einzelteilchen eine Weltröhre durchlaufen, *außerhalb deren* ein ds^2 von verschwindendem Riemannschen Krümmungsmaß herrscht. Man kann dieses ds^2 mit konstanten Koeffizienten schreiben (ohne es darum gerade in die typische Form $dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$ setzen zu müssen): Einstein spricht dann von „Galileischen" Koordinaten. Als solche sollen die w^ϱ außerhalb der Weltröhre fortan gewählt sein, innerhalb mögen sie, stetigen Übergang vorausgesetzt, beliebig verlaufen. Über die Werte der $\mathfrak{V}_\tau^\sigma$, $\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}$ im Inneren der Röhre kann dementsprechend nichts Besonderes ausgesagt werden, außerhalb aber sind sie jedenfalls Null. Denn es verschwinden dort nicht nur alle $\mathfrak{T}_\tau^\sigma$, sondern, wegen der Konstanz der $g_{\mu\nu}$ — wie ein Blick auf die Definitionsformeln (5), (6) zeigt —, auch alle $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$, bez. $\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}$.

Das Innere der Weltröhre denken wir uns, den Punkten des Systems entsprechend, natürlich von einer kontinuierlichen Schar von Weltlinien durchfurcht, denen allen ein gemeinsamer positiver Sinn beizulegen ist. Irgendein die Weltlinie tangierender Vektor, der diesen Sinn markiert, möge die Komponenten $dw^I, \ldots, dw^{IV}$ besitzen.

Es liegt auf der Hand, welche dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (Hyperflächen) man als „Querschnitte" Q der Weltröhre bezeichnen wird. Um uns bequemer ausdrücken zu können, werden wir in der Folge ausschließlich solche Querschnitte in Betracht ziehen, welche von jeder Weltlinie nur in *einem* Punkte geschnitten werden. Drei voneinander unabhängige, den Querschnitt tangierende Vektoren d', d'', d''' mögen dann so gewählt werden, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} dw^I & \ldots & dw^{IV} \\ d'w^I & \ldots & . \\ d''w^I & \ldots & . \\ d'''w^I & \ldots & . \end{vmatrix}$$

ein festes Vorzeichen erhält. Indem wir an das Beispiel:

$$\begin{aligned} d &= 0,\ 0,\ 0,\ dt \\ d' &= dx,\ 0,\ 0,\ 0 \\ d'' &= 0,\ dy,\ 0,\ 0 \\ d''' &= 0,\ 0,\ dz,\ 0 \end{aligned}$$

anknüpfen, wählen wir dieses Vorzeichen zweckmäßigerweise negativ.

Dies vorausgesetzt bilden wir uns für den Querschnitt die vier Integrale

$$I_r\,, \quad \text{bez. } I_r^*$$

des vorigen Paragraphen.

Im genauen Anschluß an die Einsteinschen Entwicklungen werden wir dann die Behauptung aufstellen, *daß diese Integrale sowohl von der Auswahl der Querschnitte, als von der Koordinatenwahl, die wir im Innern der Röhre treffen mögen, unabhängig sind.* Vom Standpunkte der die ganze Welt umfassenden affinen Transformationen der w definieren die I_r, bez. I_r^* jedenfalls einen freien kontragredienten Vektor. Die von Einstein aufgestellten neuen Sätze besagen, *daß diese Vektoren nur von dem materiellen Systeme als solchem, nicht aber von den Zufälligkeiten der analytischen Darstellung abhängig sind.*

Zum Beweise der neuen Sätze genügt es jedenfalls, solche zwei Querschnitte nebeneinander zu stellen, Q und $\bar{Q}$, die zusammengenommen ein einheitliches Stück der Weltröhre abgrenzen (die also einander nicht schneiden); — der allgemeine Fall, wo Q und $\bar{Q}$ einander durchdringen, erledigt sich hinterher mit Leichtigkeit dadurch, daß man einen dritten Querschnitt (Q) hinzunimmt, der weder Q noch $\bar{Q}$ begegnet, und nun erstlich Q mit (Q), dann (Q) mit $\bar{Q}$ zusammenstellt.

Im übrigen gliedert sich der Beweis (alles im Anschluß an Einstein) in zwei Teile:

a) Wir denken uns zunächst das Koordinatensystem der w innerhalb und außerhalb der Weltröhre irgendwie nach Vorschrift gewählt. Wir denken uns dann das zwischen Q und $\bar{Q}$ befindliche Röhrenstück nach außen stetig abgerundet, so daß es von einer einheitlichen Hyperfläche umgrenzt erscheint, welche das Innere der Röhre in Q und $\bar{Q}$ durchsetzt. Die Integrale I_r, I_r^* geben, sinngemäß über diese geschlossene Hyperfläche erstreckt, gemäß dem vorigen Paragraphen sämtlich Null. Aber diejenigen Teile unserer Hyperfläche, welche über die Weltröhre hinausragen, liefern zu diesen Integralen — weil für sie die Integranden $\mathfrak{B}_r^\sigma$, $\mathfrak{B}_r^{*\sigma}$ selbst verschwinden — überhaupt keinen Beitrag. Es bleiben die Beiträge der beiden Querschnitte Q und $\bar{Q}$, die aber, wenn wir sie nach der früher verabredeten Vorzeichenregel berechnen, in das über die geschlossene Hyperfläche genommene Integral mit entgegengesetztem Vorzeichen eingehen. Da die Summe Null ist, werden die genannten Beiträge einander gleich sein, w. z. b. w.

b) Nun kommt es noch darauf an einzusehen, daß die auf den einzelnen Querschnitt Q treffenden I_τ, I_τ^* bei allen Abänderungen der w^ϱ, die außerhalb der Weltröhre verschwinden, tatsächlich ungeändert bleiben. Wir machen das in der Weise, daß wir uns zunächst innerhalb der Röhre zweierlei Koordinatensysteme, w und $\bar{w}$, gegeben denken, die sich am Rande der Röhre beide in stetiger Weise an dasselbe äußere (Galileische) Koordinatensystem anschließen. Von dem ersteren machen wir Gebrauch, um für den Querschnitt Q die Integrale I_τ, bez. I_τ^* zu berechnen, von dem anderen für $\bar{Q}$, wobei sich die Werte $\bar{I}_\tau$, bez. $\bar{I}_\tau^*$ ergeben mögen. Es ist zu zeigen, daß $I_\tau = \bar{I}_\tau$, bez. $I_\tau^* = \bar{I}_\tau^*$, und dieser Nachweis wird erbracht sein, wenn es uns gelingt, eine dritte Koordinatenbestimmung, $\bar{\bar{w}}$, einzuführen, welche sich entlang Q hinreichend genau an die der w, entlang $\bar{Q}$ desgleichen an die der $\bar{w}$ anschließt, während sie längs des Mantels der Röhre und außerhalb derselben nach wie vor die dort herrschenden Galileischen Koordinaten liefert. „Hinreichend genau" heißt dabei, daß die Berechnung der V_τ^σ, bzw. der $V_\tau^{*\sigma}$ aus den $\bar{\bar{w}}$ für den Querschnitt Q dieselben Resultate liefert, wie die Benutzung der w, und entsprechend für den Querschnitt $\bar{Q}$ dieselben Resultate, wie die Benutzung der $\bar{w}$. Wegen der in den Formeln (5), (6) bei der Definition der V_τ^σ, $V_\tau^{*\sigma}$ vorkommenden Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ genügt es in dieser Hinsicht, — nach einem Überschlag, den mir Herr Vermeil gemacht hat —, daß die $\bar{\bar{w}}$ mit den w entlang Q auch noch in ihren drei ersten Differentialquotienten übereinstimmen, desgleichen mit dem $\bar{w}$ entlang $\bar{Q}$. Allen den solcherweise der Koordinatenbestimmung $\bar{\bar{w}}$ auferlegten Bedingungen genügt man nun offenbar durch folgendes Beispiel: Man führe die *Gleichungen* ein, welchen die Querschnitte Q, $\bar{Q}$ bzw. in den $\bar{w}$ und den w genügen. Sei $f(\bar{w}) = 0$ die erste dieser Gleichungen, $\bar{f}(w) = 0$ die zweite. Ich schreibe dann einfach:

$$\bar{\bar{w}} = \frac{(\bar{f}(w))^4 \cdot w + (f(\bar{w}))^4 \cdot \bar{w}}{(\bar{f}(w))^4 + (f(\bar{w}))^4} \tag{13}$$

und habe damit in der Tat allen Bedingungen entsprochen. Unser zweiter Nachweis ist also erbracht und damit der Beweis der neuen Sätze überhaupt erledigt.

§ 3.

Endgültige Festlegung freier Impuls-Energievektoren für das abgeschlossene System.

Die I_τ, bez. I_τ^* bilden natürlich die Grundlage für die dem abgeschlossenen System beizulegenden Impuls-Energievektoren. Zur vollen Festlegung der letzteren wird es aber noch notwendig sein, die Dimensionen der miteinander verbundenen Größenarten in Betracht zu ziehen. Auf Seite 569 meiner vorigen Note wurde verabredet, dem ds^2 die Dimension sek^2 beizulegen. Wollen wir dementsprechend nun voraussetzen, daß die benutzten w^ϱ sämtlich die Dimensionen sek^{+1} haben. Die $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ und das g sind dann dimensionslos, die K, U_τ^σ, $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$, $U_\tau^{*\sigma}$, $\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}$, werden übereinstimmend von der Dimension sek^{-2}. Da die Gravitationskonstante $\varkappa$ die Dimension gr^{-1} cm^{+1} besitzt, erhalten die $\frac{\mathfrak{U}_\tau^\sigma}{\varkappa}$, $\frac{\mathfrak{U}_\tau^{\sigma *}}{\varkappa}$ die Dimension gr^{+1} cm^{-1} sek^{-2}, d. h. die Dimension einer „spezifischen" (auf die Raumeinheit bezogenen) Energie. Es stimmt das damit, daß sie in den $\mathfrak{V}_\tau^\sigma$, $\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}$ mit den $\mathfrak{T}_\tau^\sigma$ additiv zusammentreten.

Nun werden diese $\mathfrak{V}_\tau^\sigma$, $\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}$ unter den Integralzeichen I_τ, I_τ^* mit dreigliedrigen Determinanten multipliziert, die, nach unserer Verabredung über die Dimension der w, selbst die Dimension sek^{+3} haben. Offenbar muß ich, um die Dimension einer eigentlichen Energie zu bekommen, den I_τ, I_τ^* noch den Faktor c^3 (c = Lichtgeschwindigkeit) hinzufügen. *In Übereinstimmung hiermit sollen als freie Impuls-Energievektoren des vorgelegten abgeschlossenen Systems endgültig die Größenquadrupel:*

$$J_\tau = c^3 I_\tau, \quad J_\tau^* = c^3 I_\tau^* \tag{14}$$

bezeichnet werden. Zahlenfaktoren, die noch zweifelhaft sein könnten, sollen nicht weiter beigefügt werden; auch soll an unserer Vorzeichenbestimmung festgehalten werden.

Den Beweis für die Richtigkeit dieses Ansatzes erblicke ich darin, daß in der Definition unserer J_τ^* Einsteins eigene Definition des zu dem abgeschlossenen System gehörigen Impuls-Energievektors eingeschlossen ist. Um dies einzusehen, werden wir in unserer Definition der J_τ^* zunächst den Faktor c^3 wieder wegstreichen (weil nämlich Einstein solche Maßeinheiten zugrunde legt, daß $c = 1$ wird, was für den in Betracht kommenden Vergleich eine bloße Äußerlichkeit ist). Dann aber müssen wir, was eine wirkliche Partikularisation ist, den Querschnitt Q so wählen, daß er bei der uns gelassenen Freiheit der Koordinatenwahl durch die Gleichung $w^{IV} = 0$ dargestellt werden kann. Um die Tragweite dieser Einschränkung einzusehen, überlege man, daß die Galileischen Koordinaten außerhalb der Weltröhre bis auf eine affine Transformation festgelegt sind. Die neue Bedingung läuft also darauf hinaus, den Querschnitt Q so zu wählen, daß er den Mantel der Weltröhre unseres Systems in einem Gebilde durchsetzt, welches, von außen her gesehen, bei zunächst willkürlich angenommenen Galileischen Koordinaten durch eine *lineare* Gleichung dargestellt wird.

Wollen wir nun in der Tat annehmen, daß entlang des Querschnittes w^{IV} verschwindet, also $d' w^{IV}$, $d'' w^{IV}$, $d''' w^{IV}$ eo ipso Null sind. Unser Integral I_τ^* reduziert sich dann (indem wir $c = 1$ setzen) auf

$$\iiint \mathfrak{B}_\tau^{*4} \begin{vmatrix} d' w^I & \ldots & d' w^{III} \\ d'' w^I & \ldots & d'' w^{III} \\ d''' w^I & \ldots & d''' w^{III} \end{vmatrix}$$

also, wenn wir auf die gewöhnliche Schreibweise zurückgehen, auf

$$J_\tau^* = \iiint \mathfrak{B}_\tau^{*4} dw^I dw^{II} dw^{III}, \tag{15}$$

was bis auf die Buchstabenwahl genau die Einsteinsche Formel ist.

Diese Formel ist ja, äußerlich genommen, ohne Zweifel einfacher, als die von mir zugrunde gelegte. Dafür ist dann der Vektorcharakter der J_τ^*, wie ihn Einstein behauptet aber nicht ausführlicher begründet hatte, schwieriger einzusehen. In längerer Korrespondenz mit Einstein wollte mir in der Tat ursprünglich nicht gelingen, diesen Vektorcharakter zu begründen, bis ich zu der Graßmannschen Schreibweise der Integrale griff, von der ich oben ausging. Damit war aber auch die von mir gewählte Verallgemeinerung des Querschnittbegriffs gegeben.

Bleibt der wesentliche Unterschied gegen die Einsteinsche Darstellung, daß ich neben den Vektor J_τ^* als gleichberechtigt den Vektor J_τ stelle, — indem ich, unter dem Integralzeichen, statt der Einsteinschen $\mathfrak{t}_\tau^\sigma = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}$ die Lorentzschen $\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^\sigma$ setze. *Daß die J_τ und die J_τ^* im allgemeinen verschieden sind, werden wir sogleich an einem Beispiele einsehen.* Ich würde dem abgeschlossenen System danach sogar unendlich viele verschiedene Impuls-Energievektoren zuordnen können, wenn ich z. B. statt $\mathfrak{t}_\tau^\sigma$ das Aggregat $\mathfrak{t}_\tau^\sigma + \lambda\left(\frac{\mathfrak{U}_\tau^\sigma}{\varkappa} - \mathfrak{t}_\tau^\sigma\right)$ setzen wollte, unter λ irgendeine numerische Konstante verstanden. Überhaupt würde ich statt der $\mathfrak{t}_\tau^\sigma$ irgendein $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$ setzen dürfen, das sich von den $\mathfrak{t}_\tau^\sigma$ nur um einen Term der erforderlichen Dimension unterscheidet, welcher gegenüber affinen Transformationen einen gemischten Tensor vorstellt, der außerhalb der Weltröhre identisch verschwindet, im Inneren aber eine verschwindende Divergenz hat. Welcher von diesen unendlich vielen Vektoren zu bevorzugen ist, bleibt, solange ich nur das Bestehen der Integralsätze verlange, unentschieden. Eine Entscheidung kann nur getroffen werden, wenn man neue Gründe heranbringt, die einen bestimmen, unter den unendlich vielen Formen des Differentials gerade eine einzelne zu bevorzugen.

II. Einsteins räumlich geschlossene Welt (Zylinderwelt).

§ 4.

Der geschlossene Raum konstanter positiver Krümmung.

In Einsteins Note vom Februar 1917 ist nur erst der Möglichkeit eines *sphärischen* Raumes gedacht, wie er aus einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen ($= \xi, \eta, \zeta, \omega$), deren Bogenelement durch die Gleichung

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\omega^2 \tag{16}$$

gegeben ist, unmittelbar durch die „Kugelgleichung"

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \omega^2 = R^2 \tag{17}$$

ausgeschnitten wird[8]). Für den Kenner der geometrischen Literatur ist es wohl selbstverständlich, daß ich Einstein damals gleich auf meine alten Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie von 1871 aufmerksam machte, denen zufolge sich neben die sphärische Raumform eine andere geschlossene Raumform konstanter positiver Krümmung stellt, der *elliptische* Raum (wie er von mir in Verbindung mit meinen sonstigen Betrachtungen damals genannt wurde). Man erhält ihn aus dem sphärischen Raum, indem man einfach je zwei diametral gegenüberstehende Punkte der Kugel durch Zentralprojektion auf einen berührenden linearen Raum zusammenfaßt. Wir mögen dementsprechend setzen:

$$x = R\frac{\xi}{\omega}, \quad y = R\frac{\eta}{\omega}, \quad z = R\frac{\zeta}{\omega}. \tag{18}$$

Rückwärts wird dann:

$$\xi = \frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+R^2}}, \quad \eta = \ldots, \quad \zeta = \ldots, \quad \omega = \frac{R^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+R^2}}. \tag{19}$$

Der elliptische Raum ist einfacher als der sphärische, indem sich seine geodätischen Linien schlechtweg als *gerade* Linien darstellen (die sich, wenn sie sich überhaupt treffen, immer nur in *einem* Punkte schneiden[9])); die Länge einer solchen geodätischen Linie ist $R\pi$, der

---

[8]) Unter „Raum" soll fortan durchaus ein dreidimensionales Gebiet verstanden werden (das in der vierdimensionalen „Welt" enthalten ist).

[9]) Deshalb steht der elliptische Raum voran, wenn man, wie ich das 1871 tat, von den Grundbegriffen der projektiven Geometrie ausgeht. Er ist dann dem hyperbolischen Raume (dem Raume von Bolyai und Lobatschewsky), wie dem parabolischen Raume (dem Euklidischen Raume) direkt nebengeordnet, und es heißt dieses Sachverhältnis gründlich verkennen, wenn man, wie es bei der Mehrzahl der Autoren immer wieder heißt, die Formeln (18) als eine „Abbildung" des sphärischen Raumes auf den „Euklidischen" bezeichnet. „Euklidisch" wird der Inbegriff der Wertsysteme dreier Variabeln x, y, z erst, wenn wir die Differentialform $dx^2 + dy^2 + dz^2$ hinzunehmen, — oder, für die gruppentheoretische Auffassung, wenn wir die Gesamtheit der projektiven Umformungen der x, y, z (deren Invariantentheorie die projektive Geometrie ist) durch die Untergruppe derjenigen

Gesamtinhalt des Raumes $R^3 \pi^2$ (statt $2 R \pi$, bez. $2 R^3 \pi^2$ im sphärischen Falle).

Bei der bloßen Angabe des Bogenelementes tritt der Unterschied der beiden Raumformen natürlich noch nicht hervor[10]). Ich kann das durch (16) und (17) gegebene $d\sigma^2$ ebensowohl für den elliptischen Raum gebrauchen wie seinen in x, y, z umgerechneten Wert:

$$(20) \qquad d\sigma^2 = \frac{R^2}{(x^2+y^2+z^2+R^2)^2}\{R^2(dx^2+dy^2+dz^2)+(y\,dz-z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2\}$$

im sphärischen Falle, oder auch beidemal den in Polarkoordinaten ausgedrückten Wert:

$$(21) \qquad d\sigma^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2 + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \cdot d\psi^2).$$

§ 5.

Einsteins „Zylinderwelt" und deren Gruppe.

Weiterhin soll $d\sigma^2$, wie im vorigen Paragraphen, — auch ohne daß wir das Koordinatensystem spezifizieren — kurzweg das Quadrat des Bogenelementes eines geschlossenen Raumes von der konstanten Krümmung $\frac{1}{R^2}$ bedeuten, möge dieser nun sphärisch oder elliptisch angenommen werden. Der Anstieg zu **Einsteins** räumlich geschlossener Welt wird sich dann einfach so vollziehen, daß wir

$$(22) \qquad ds^2 = dt^2 - \frac{d\sigma^2}{c^2}$$

setzen und übrigens t von $-\infty$ bis $+\infty$ (unter Ausschluß dieser Grenzen) laufen lassen. (Dimension und Vorzeichen dieses ds^2 stimmen mit unseren allgemeinen Verabredungen. Berechnen wir danach formal das Krümmungsmaß für den Raum $t =$ Konst., so erhalten wir $-\frac{c^2}{R^2}$. Dieses negative

ersetzen, welche die genannte Differentialform ungeändert lassen. — Ich bringe alle diese Dinge, die anderweitig bekannt genug sind, in der gegenwärtigen Mitteilung, die doch auch für Physiker bestimmt ist, zur Sprache, weil sie im Physikerkreise unter Nachwirkung der einseitigen, auf 1868 zurückgehenden **Helmholtz**schen Tradition immer noch wenig verbreitet scheinen.

[10]) Mit der Angabe des $d\sigma^2$ ist in der Tat der „Zusammenhang", den die zugehörige Raumform im Großen zeigt, noch nicht bestimmt. Auch dieses wird in der zeitgenössischen Literatur immer noch vielfach nicht beachtet. Für Räume konstanter Krümmung habe ich die einschlägigen Verhältnisse in einer Abhandlung von 1890 [Math. Annalen, Bd. 37 (siehe Abhandlung XXI dieser Ausgabe)], eingehend behandelt. Von Lehrbüchern geht hierauf insbesondere dasjenige von **Killing** ein (Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Teil I, 1893). Ich verweise auch gern auf neuere Veröffentlichungen von **Hadamard** und **Weyl**.

Vorzeichen entspricht natürlich nur dem Umstande, daß das in (22) eingeführte ds für den genannten Raum rein imaginär wird; es liegt also kein Widerspruch gegen den vorigen Paragraphen vor, wo wir den Raum kurzweg als einen solchen konstanter positiver Krümmung bezeichnet haben.)

Wir fragen in erster Linie nach der größten kontinuierlichen Gruppe von Koordinatentransformationen, durch welche das ds^2 (22) in sich übergeht.

Von vornherein ist klar, daß zum mindesten eine G_7 solcher Transformationen existiert. Denn es gibt bereits eine kontinuierliche G_6, welche $d\sigma^2$ in sich überführt: um an (16) anzuknüpfen, der Inbegriff der orthogonalen Transformationen der ξ, η, ζ, ω von der Determinante $+1$. Zu ihr tritt dann noch die G_1, welche einer Vermehrung von t um eine beliebige Konstante entspricht. Die so gewonnene G_7 ist gewiß transitiv. d. h. man kann durch sie jeden Weltpunkt in jeden anderen, beispielsweise in den Punkt $t = 0$, $\vartheta = 0$ überführen (um von dem in (21) eingeführten Polarkoordinatensystem Gebrauch zu machen). Möge dieser Punkt kurzweg O heißen; um ihn herum ist noch eine kontinuierliche G_3 von Raumdrehungen möglich.

Wir behaupten nun, *daß es auch keine größere kontinuierliche Gruppe von Koordinatentransformationen gibt, die ds^2 in sich überführt, als eben unsere G_7*. Zu dem Zwecke genügt es zu zeigen, daß bei festgehaltenem O eben nur die genannte G_3 von Drehungen besteht. Zum Beweise führe man von O auslaufende „Riemannsche Normalkoordinaten" ein. Man erreicht dies beispielsweise, indem man t als Variable beibehält und statt der Polarkoordinaten ϑ, φ, ψ die Verbindungen einführt:

$$(23)\quad y_1 = \frac{R}{c}\vartheta\cdot\cos\varphi,\quad y_2 = \frac{R}{c}\vartheta\cdot\sin\varphi\cos\psi,\quad y_3 = \frac{R}{c}\vartheta\cdot\sin\varphi\sin\psi.$$

Schreiben wir noch für t der Gleichförmigkeit wegen y_4, so erhalten wir für ds^2

$$(24)\quad ds^2 = (dy_4^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2) + \frac{c^2}{3R^2}\sum_{1,2,3}(y_\iota dy_\varkappa - y_\varkappa dy_\iota)^2$$
$$+ \text{Glieder höherer Ordnung in den } y_1, y_2, y_3,$$

was zeigt, daß wir es in der Tat mit Normalkoordinaten zu tun haben. Was nun die Transformationen von ds^2 in sich angeht, so haben wir, da O festbleiben soll, gemäß der allgemeinen Theorie der Normalkoordinaten nur mehr nach der größten kontinuierlichen Gruppe *homogener linearer* Substitutionen der y zu fragen, welche dieses ds^2 in sich verwandelt. Die beiden hingeschriebenen Terme der ds^2 müssen dabei, ihrer Dimensionen halber, jeder für sich in sich übergehen. Es ist danach klar, daß y_4 ungeändert bleiben muß, während y_1, y_2, y_3 höchstens der kontinuierlichen Gruppe ternärer orthogonaler Substitutionen von der Determinante 1 unterworfen werden können. Damit aber sind wir bereits am Ziele.

Nach dem so bewiesenen Satze ist es vielleicht gestattet, Einsteins räumlich-geschlossene Welt kurzweg als *Zylinderwelt* zu bezeichnen, weil sie sozusagen die Symmetrie eines Rotationszylinders besitzt: beliebige Verschiebung längs der t-Achse und beliebige Drehung um O bei festgehaltenem t. Natürlich ist die Analogie keine vollkommene, weil ebensowohl um einen beliebigen anderen Punkt (als O) gedreht werden kann. Ich möchte auch keinen bleibenden Term einführen, sondern nur ad hoc einen kurzen Ausdruck haben, der den Gegensatz gegen die im nächsten Abschnitt zu behandelnde de Sittersche Hypothese B markiert.

Im übrigen werden wir sagen dürfen, daß im vorliegenden Falle, nachdem wir uns über die Zeiteinheit und den Anfangspunkt der Zeitrechnung geeinigt haben, *der Zeitbegriff weiter keine Willkür enthält*[11]), oder, wenn man es lieber so ausdrückt, daß innerhalb der vierdimensionalen Welt *die dreifach ausgedehnten Räume $t =$ Konst. Mannigfaltigkeiten sui generis sind.* Also eine bemerkenswerte Annäherung an die Vorstellungsweisen der klassischen Mechanik.

Dies ist, wenn man die physikalische Überlegung erwägt, von der aus Einstein die Zylinderwelt eingeführt hat, von vornherein selbstverständlich. Um nämlich die Gesamtheit der Massenverteilungen und Geschehnisse der Welt vom höheren Standpunkte zu übersehen, fingiert Einstein zunächst einen Durchschnittszustand, bei welchem die Gesamtheit der Massen in dem als geschlossen vorausgesetzten Raume *inkohärent* und *gleichförmig verteilt* ist, und innerhalb dieses Raumes, während t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, *ruht.* Die wirklichen Massenverteilungen und Geschehnisse sollen als Abweichungen von diesem Durchschnittszustand aufgefaßt werden. An diesem Durchschnittzustand gemessen ist dann die Zeit (oder genauer die in verabredeter Einheit gemessene Zeitdifferenz zweier Weltpunkte) eo ipso etwas Absolutes, der Raum in sich homogen[12]). Ihren präzisen mathematischen Ausdruck aber findet diese Auffassung in der Invariantentheorie unserer G_7.

Besonders interessant ist es noch, zu sehen, wie sich unsere G_7 zur *Lorentzgruppe* G_{10} erweitert, man also zu den *Vorstellungen der „speziellen" Relativitätstheorie* kommt, wenn man das Krümmungsmaß unseres Raumes verschwindend nimmt, d. h. $R = \infty$ setzt. Unser ds^2 (22) reduziert sich

---

[11]) So auch bei de Sitter l. c. vermerkt.

[12]) Daß der Raum dabei noch nach Belieben sphärisch oder elliptisch vorausgesetzt werden kann, hat Einstein s. Z. ohne weiteres gutgeheißen. Übrigens behandelt auch de Sitter diese beiden Annahmen immer nebeneinander. Ebenso auch das neue Weylsche Buch (Raum, Zeit, Materie).

dann nämlich überhaupt auf seinen ersten Term[13]): $dy_4^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2$ und bleibt danach bei allen homogenen linearen Substitutionen der dy_1, dy_2, dy_3, dy_4 ungeändert, welche diese *einzelne* quadratische Form in sich transformieren. *Damit hört $y_4 = t$ auf, eine für sich stehende Variable zu sein, kombiniert sich vielmehr bei den zulässigen Substitutionen mit den y_1, y_2, y_3, wie dies gerade das Wesen der speziellen Relativitätstheorie ausmacht.*

§ 6.

Die Feldgleichungen der Zylinderwelt.

Wir müssen noch bestätigen, daß die Annahme einer den ganzen Raum gleichförmig erfüllenden, ruhenden Materie, sagen wir von der konstanten Dichte ϱ, mit den für unser ds^2 aufgestellten Einsteinschen Feldgleichungen in der Tat verträglich ist. Gedacht ist dabei natürlich an die Feldgleichungen „mit λ-Glied", von denen bereits in meiner vorigen Note (Formel 57) die Rede war:

(25) $$K_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0.$$

Da die Verteilung der Materie im Raume eine durchaus gleichförmige sein soll, genügt es, die Verifikation für den Punkt O zu machen. Auch werden wir, da es sich um eine Relation zwischen Tensorkomponenten handelt, von vornherein das in Normalkoordinaten geschriebene ds^2 (24) zugrunde legen dürfen.

Von hier aus aber findet man ohne alle besondere Rechnung, vgl. die Note von Vermeil in den Göttinger Nachrichten vom 26. Oktober 1917 („Notiz über das mittlere Krümmungsmaß einer n-fach ausgedehnten Riemannschen Mannigfaltigkeit"):

(26) $$K_{11} = K_{22} = K_{33} = -\frac{c^2}{R^2}, \quad K_{44} = \frac{3c^2}{R^2},$$

während alle anderen $K_{\mu\nu}$ verschwinden.

Nun hat man für den Punkt O bei Zugrundelegung der Normalkoordinaten:

(27) $$\text{alle } T_{\mu\nu} = 0, \text{ bis auf } T_{44} = c^2\varrho.$$

Daher ergeben die Feldgleichungen (25):

$$-\frac{c^2}{R^2} + \lambda = 0, \quad \frac{3c^2}{R^2} - \lambda - \varkappa c^2 \varrho = 0,$$

d. h.

(28) $$\lambda = \frac{c^2}{R^2}, \quad \varrho = \frac{2}{\varkappa R^2},$$

---

[13]) Nicht nur der zweite Term, sondern auch alle höheren Terme fallen fort.

was mit dem von Einstein selbst gegebenen Resultate stimmt (sofern man noch $c^2 = 1$ setzt).

Hierzu die Bemerkung, daß sich für K selbst folgender konstanter Wert berechnet:

$$K = \frac{6c^2}{R^2}. \tag{29}$$

Für die Anwendung auf das Weltall bleibt natürlich der unseren heutigen Kenntnissen der Stellarastronomie mit einiger Wahrscheinlichkeit entsprechende Wert von R abzuschätzen. Dies hat de Sitter in seiner wiederholt genannten Mitteilung ausgeführt. Ich führe gern sein Resultat an, damit man sieht, daß Einsteins kosmologische Betrachtung, deren mathematischen Inhalt allein wir hier behandeln, doch auch physikalisch nicht völlig in der Luft hängt. Man hat nach de Sitter

$$R = 10^{12} \text{ bis } 10^{13} \text{ Halbmessern der Erdbahn}$$

zu nehmen. Die Dichte ϱ wird so gering, daß nur etwa 10^{-26} gr Masse auf den Kubikzentimeter treffen, d. h. in etwa 100 Kubikzentimetern befindet sich die Masse eines Wasserstoffmoleküls. Die Konstante λ aber wird beiläufig $10^{-30}\,\text{sek}^{-2}$.

§ 7.

Die Integralsätze für die Zylinderwelt.

Nimmt man die Feldgleichungen mit λ-Glied, so sind, wie ich in § 7 meiner vorigen Note im Anschluß an Einsteins Entwicklungen ausführte, U_τ^σ und $t_\tau^\sigma = \frac{1}{\varkappa} U^{*\sigma}_{\tau}$, damit die Erhaltungssätze gewahrt bleiben, durch

$$\bar{U}_\tau^\sigma = U_\tau^\sigma + \lambda\delta_\tau^\sigma, \qquad \bar{t}_\tau^\sigma = t_\tau^\sigma + \frac{\lambda}{\varkappa}\delta_\tau^\sigma \tag{30}$$

zu ersetzen. Wir werden dementsprechend statt der Integrale I_τ, bez. I_τ^* des § 1 Integrale $\bar{I}_\tau$ bez. I_τ^* bilden und von vornherein sicher sein, daß diese Integrale, genommen über solche geschlossene Hyperflächen, welche einen Teil der Zylinderwelt abgrenzen, verschwinden.

Nunmehr wird der Begriff des *Querschnitts*, den wir in I für die damals betrachtete „Weltröhre“ benutzten, zu übertragen sein. Wir werden als solchen eine sonst beliebige geschlossene Hyperfläche bezeichnen wollen, welche jede Weltlinie der Zylinderwelt, d. h. jede Parallele zur t-Achse, einmal schneidet. Das einfachste Beispiel bilden die „Räume“ $t =$ Konstans.

Wir werden dann wie früher den Doppelsatz haben:

1. daß die Integrale $\bar{I}_\tau$, bez. $\bar{I}_\tau^*$, genommen für einen beliebigen Querschnitt, einen von dessen Auswahl unabhängigen Wert haben;

2. daß dieser Wert auch nicht davon abhängt, welche Koordinaten man bei der Ausführung der über den Querschnitt hinerstreckten Integration benutzt.

Nur das wird sich ändern, daß es nicht mehr angeht, den Inbegriff der Integrale $\bar{I}_\tau$, bez. $\bar{I}_\tau^*$ als einen (freien) Viervektor zu bezeichnen. Denn für diese Benennung fehlt, gemäß der Natur unseres G_7, die gruppentheoretische Grundlage. Jedenfalls gilt:

$\bar{I}_4$, bez. $\bar{I}_4^*$ wird von Hause aus für sich stehen. Wir mögen seinen Wert, mit c^3 multipliziert, als *Gesamtenergie der Zylinderwelt* bezeichnen.

Um die Klassifikation der Größen $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ aber (bez. der $\bar{I}_1^*$, $\bar{I}_2^*$, $\bar{I}_3^*$) brauchen wir uns nicht viel zu kümmern, da man sich auf verschiedenartige Weise überzeugen kann, *daß sie sämtlich Null sind.*

Erstlich folgt dies (wie auch Einstein betr. der $\bar{I}_\tau^*$ ausführt) aus Symmetriegründen. Ich resumiere die Sache von meinem Standpunkte aus. Wenn wir an den Normalkoordinaten y festhalten, so werden von den ∞^6 kontinuierlichen Transformationen, die den Raum $y_4 = 0$ in sich überführen, natürlich nur die ∞^3 sich als homogene lineare Substitutionen der y_1, y_2, y_3 darstellen, welche Drehungen des Raumes um O vorstellen. Aber es genügt für unsere Zwecke auch, die von ihnen gebildete Untergruppe zu betrachten. Ihr gegenüber werden sich die $\bar{U}_1^\sigma$, $\bar{U}_2^\sigma$, $\bar{U}_3^\sigma$ (und ebenso die $\bar{U}_1^{*\sigma}$, $\bar{U}_2^{*\sigma}$, $\bar{U}_3^{*\sigma}$) wie die Komponenten eines dreidimensionalen Tensors, also die $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ (bez. die $\bar{I}_1^*$, $\bar{I}_2^*$, $\bar{I}_3^*$) wie die Komponenten eines von O auslaufenden Dreiervektors verhalten. Nun ist aber die Zylinderwelt, wie wir wissen, um O herum räumlich isotrop. Besagter Dreiervektor muß also bei einer beliebigen Raumdrehung um O herum ungeändert bleiben, und das kann er nur, wenn seine sämtlichen Komponenten verschwinden.

Zweitens mögen wir den Weg direkter Rechnung beschreiten. Wir wählen als den Querschnitt, über den unsere Integrale zu erstrecken sind, irgendeine der Mannigfaltigkeiten $y_4 =$ Konst. Innerhalb derselben mögen irgendwelche Koordinaten w^I, w^{II}, w^{III} eingeführt gedacht werden. Die Integrale $\bar{I}_\tau$, bzw. $\bar{I}_\tau^*$ werden dann, gemäß den Darlegungen von § 3, in der abgekürzten Form geschrieben werden können:

$$(31)\qquad \bar{I}_\tau = \int\!\!\int\!\!\int \left(T_\tau^4 + \frac{1}{\varkappa}\,\bar{U}_\tau^4\right)\sqrt{-g}\cdot dw^I\,dw^{II}\,dw^{III}$$

bez.

$$(31^*)\qquad \bar{I}_\tau^* = \int\!\!\int\!\!\int (T_\tau^4 + \bar{t}_\tau^4)\sqrt{-g}\cdot dw^I\,dw^{II}\,dw^{III}.$$

Die direkte Rechnung ergibt nun, daß die T_τ^4, $\bar{U}_\tau^4$, $\bar{t}_\tau^4$ für $\tau = 1, 2, 3$ sämtlich verschwinden.

Für die *Gesamtenergie der Zylinderwelt* haben wir mit diesen Formeln die Ausdrücke gewonnen:

$$(32)\qquad \bar{J}_4 = c^3 \iiint \left(T_4^4 + \frac{1}{\varkappa}\,\bar{U}_4^4\right) \sqrt{-g}\, dw^I\, dw^{II}\, dw^{III},$$

bez.

$$(32^*)\qquad \bar{J}_4^* = c^3 \int\int\int (T_4^4 + \bar{t}_4^4) \sqrt{-g}\, dw^I\, dw^{II}\, dw^{III}.$$

Der Energiebetrag stellt sich danach in dem einen wie dem anderen Falle als Summe zweier Summanden dar. — Wir mögen denjenigen Summanden, der T_4^4 entspricht, als *Massenenergie* bezeichnen, den anderen als die *Gravitationsenergie.*

Die Massenenergie berechnet sich jetzt ohne weiteres. T_4^4 nämlich wird, wie wir auch die w^I, w^{II}, w^{III} wählen mögen, gleich $c^2 \varrho$, und $c^3 \sqrt{-g}\, dw^I\, dw^{II}\, dw^{III}$ ist nichts anderes, als das Volumelement dV unseres Raumes $y_4 =$ Konst. *Die Massenenergie wird also einfach* $c^2 \varrho V$, unter V das Gesamtvolumen des Raumes verstanden, also, je nachdem wir die sphärische oder die elliptische Hypothese annehmen wollen, $2\pi^2 R^3$ oder $\pi^2 R^3$.

Für die Gravitationsenergie aber hat Einstein in seinem Falle, also bei Zugrundelegung der Formel (32*), indem er räumliche Polarkoordinaten benutzte, *Null gefunden.* Das dV wird in diesem Falle $= \sin^2\vartheta \sin\varphi \cdot d\vartheta\, d\varphi\, d\psi$, das $\bar{t}_4^4$ (wenn ich die Einsteinsche Terme zusammenziehe) $\frac{\cos 2\vartheta}{\sin^2\vartheta}$, das Resultat der Integration wird Null, weil das $\int \cos 2\vartheta \cdot d\vartheta$ von 0 bis π zu nehmen ist. — Dieses Ergebnis ist gewiß sehr bemerkenswert. Da es von der Wahl der w^I, w^{II}, w^{III} unabhängig sein muß, fragt es sich, ob man statt der Polarkoordinaten, die eine (von Einstein nur angedeutete) längere mechanische Rechnung mit sich bringen, nicht zweckmäßigerweise andere einführen soll. Ich möchte vorschlagen, durchweg mit den überzähligen Koordinaten ξ, η, ζ, ω des § 4 (zwischen denen dann die Abhängigkeit $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \omega^2 = R^2$ besteht) zu operieren. Man wird dann natürlich die Grundformeln der Tensorrechnung auf den Fall abhängiger Koordinaten verallgemeinern müssen, wozu indes alle Ansätze in der Literatur vorliegen. Ich vermute, daß bei Durchführung dieser Umsetzung nicht nur das Integral über die Gravitationsenergie sämtlicher Volumelemente des Raumes, sondern bereits das dem einzelnen Volumelement entsprechende Differential verschwinden dürfte, wodurch doch eine verbesserte Einsicht in die Einfachheit des Einsteinschen Resultates erreicht wäre.

So viel über das $\bar{t}_4^4$. Das Neue, was ich nun auszuführen habe, ist, *daß wir ein ganz anderes Resultat bekommen* (und dies gleich ohne komplizierte Rechnung), *wenn wir an Stelle des* $\bar{t}_4^4$ *das* $\frac{1}{\varkappa}\,\bar{U}_4^4$, *also an Stelle von* $\bar{J}_4^*$ *das* $\bar{J}_4$ *wählen.* — $\bar{U}_4^4$ ist, wie wir wissen $= U_4^4 + \lambda$. Wenn wir nun auf die oben unter (5) wieder angeführte Formel für U_4^4 zurückgreifen, so zeigt sich, daß im Falle der Zylinderwelt, bei beliebiger Wahl der w^I, w^{II}, w^{III}, alle Terme bis auf den ersten fortfallen. U_4^4 wird einfach $= \frac{1}{2} K$ und also

$$\bar{U}_4^4 = \frac{1}{2} K + \lambda = \frac{4c^2}{R^2}. \tag{33}$$

Es hat also einen konstanten, aber nicht verschwindenden Wert. Infolgedessen wird bei Zugrundelegung der U_τ^σ *die Gravitationsenergie der Zylinderwelt nicht etwa Null, sondern doppelt so groß wie die Massenenergie.*

Die hiermit festgelegte Sachlage hat ersichtlich eine über den Fall der Zylinderwelt hinausreichende Bedeutung. Sie zeigt am Beispiele, daß die Energiekomponenten $\frac{U_\tau^\sigma}{\varkappa}$ auch für die *Integralformen* der Erhaltungssätze allgemein andere Resultate als die t_τ^σ geben. Dies ist, was ich in der Einleitung das Hineinspielen eines subjektiven Momentes in die Aufstellung der Energiebilanz genannt und in seiner Tragweite für abgeschlossene Systeme am Schlusse von § 3 näher erläutert habe. Das Ergebnis ist an sich gewiß in keiner Weise wunderbar, aber widerspricht doch dem Eindruck, den man beim ersten Durchlesen der Einsteinschen Note hat, als sei es ein ausschließlicher Rechtstitel der t_τ^σ, zu einfachen Integralsätzen zu führen.

III. Über de Sitters Hypothese *B*.

In seinen wiederholt genannten Mitteilungen, insbesondere in Note 3 der Monthly Notices, hat de Sitter die Annahme der Zylinderwelt, die er als Hypothese *A*. bezeichnet, u. a. dahin modifiziert, daß er statt der Zylinderwelt — unter Aufrechterhaltung der für ds^2 charakteristischen Vorzeichen — eine Welt *konstanter Krümmung* setzte. Es ist dies die von ihm mit *B* bezeichnete Hypothese[14]); ich stelle mir die Aufgabe, die hierbei vorkommenden Verhältnisse durch möglichst einfache Formeln überzeugend darzulegen. Das Wesentliche meiner Überlegungen findet man

[14]) de Sitter bemerkt, daß ihm diese Annahme (die sich dem Mathematiker durch ihre Symmetrie empfiehlt) zunächst durch Ehrenfest vorgeschlagen worden sei. Ich selbst habe in meinen Vorträgen vom Frühjahr 1917 (deren Ausarbeitung in einer kleinen Zahl von Exemplaren verbreitet ist), indem ich über Einsteins damals eben erschienene „Kosmologische Betrachtungen" referieren wollte, aber die Formeln nicht genau verglich, unwillkürlich denselben Ansatz gemacht und mich dann später, als ich zur Ausarbeitung der physikalischen Folgerungen schritt, gewundert, daß die Resultate mit den von Einstein für seine Zylinderwelt angegebenen natürlich nicht stimmen wollten.

übrigens bereits in den Protokollen über die Sitzungen der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vom Sommer 1918 angegeben, die in dem im Oktober 1918 ausgegebenen Hefte des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung abgedruckt sind (schräge pagina, S. 42—44). Vgl. auch eine Mitteilung an die Amsterdamer Akademie (Verslag vom 29. Sept. 1918).

§ 8.

Die geometrischen Grundlagen für die Welt konstanter Krümmung.

Wir werden der Annahme, daß die Welt eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung sei, in einfacher Weise gerecht werden, indem wir bei fünf Variabeln *mit Änderung eines Vorzeichens* die gewöhnliche Gleichung einer Kugel anschreiben, und auf dieser „Pseudokugel" euklidisch messen [15]). Dabei wollen wir indes, um die frühere Verabredung betr. die Dimension der Variabeln einzuhalten, den Radius nicht R, sondern $\frac{R}{c}$ nennen; wir werden ebenso, der Konsequenz halber, das übliche Vorzeichen von ds^2 umkehren. Ich schreibe also als Gleichung der Pseudokugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2 = \frac{R^2}{c^2} \tag{34}$$

und für das zugehörige ds^2:

$$-ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - dv^2 + d\omega^2. \tag{35}$$

Die hierdurch gegebene *pseudosphärische Welt* $(\xi, \eta, \zeta, v, \omega)$ hat wegen des dem ds^2 zugesetzten Minuszeichens das konstante (Riemannsche) Krümmungsmaß $-\frac{c^2}{R^2}$. Im übrigen geht sie durch eine kontinuierliche G_{10} „pseudoorthogonaler" Substitutionen, d. h. geeigneter linearer homogener Substitutionen der $\xi, \eta, \zeta, v, \omega$ in sich über, nicht aber, wie man leicht nachweisen kann, durch eine noch umfassendere Gruppe.

An ihre Seite stellen wir dann gleich eine *pseudoelliptische Welt*, indem wir, unter Beibehaltung des in (35) gegebenen ds^2, schreiben:

$$x = \frac{R}{c}\cdot\frac{\xi}{\omega}, \quad y = \frac{R}{c}\cdot\frac{\eta}{\omega}, \quad z = \frac{R}{c}\cdot\frac{\zeta}{\omega}, \quad u = \frac{R}{c}\cdot\frac{v}{\omega}, \tag{36}$$

woraus rückwärts

$$\xi = \frac{Rx}{c\sqrt{x^2+y^2+z^2-u^2+\frac{R^2}{c^2}}}, \quad \eta = , \quad \zeta = , \quad v = , \tag{37}$$

$$\omega = \frac{R^2}{c^2\sqrt{x^2+y^2+z^2-u^2+\frac{R^2}{c^2}}}.$$

---

[15]) Die Vorschlagssilbe „pseudo" soll immer auf das Auftreten eines abweichenden Vorzeichens hinweisen.

Diese ξ, η, ζ, v, ω werden wir bei Behandlung der pseudoelliptischen Welt zum Homogenisieren der Gleichungen gebrauchen können (wie vielfach geschehen soll). Bemerken wir noch, daß

$$(38) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 + \frac{R^2}{c^2} = \frac{R^2}{c^2}\frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2)}{\omega^2} = \frac{R^4}{c^4\,\omega^2},$$

insofern wir uns, wie selbstverständlich, auf reelle Werte der ursprünglichen Koordinaten $\xi, \ldots, \omega$ beschränken, immer positiv ist.

Wir werden nun der Kürze wegen allein von dieser pseudoelliptischen Welt sprechen (also die pseudosphärische beiseite lassen) und ich muß schon den Leser bitten, mich hierbei durchaus *projektiver* Auffassungen bedienen zu dürfen, welche allein den in Betracht kommenden Verhältnissen wirklich gerecht werden. Ich will in dieser Hinsicht eine Reihe von Aussagen, die dem geschulten Geometer selbstverständlich sind, kurz zusammenstellen:

1. Es handelt sich in der pseudoelliptischen Welt um eine *projektive Maßbestimmung*, deren Fundamentalgebilde durch

$$(39) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - u^2 + \frac{R^2}{c^2} = 0$$

gegeben ist und, der Analogie nach, fortan kurz als (zweischaliges) Hyperboloid bezeichnet sein mag. Nach der Vorzeichenbestimmung (38) befinden wir uns *zwischen* den Schalen dieses Hyperboloids (d. h. in dem Weltstück, von dem aus reelle Tangentialkegel an das Hyperboloid laufen), in Übereinstimmung mit dem indefiniten Charakter unseres ds^2. In homogenen Koordinaten $\xi, \ldots$ geschrieben lautet die Gleichung des Hyperboloids:

$$(40) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2 = 0,$$

das Hyperboloid ist also der Schnitt des *Asymptotenkegels* unserer Pseudokugel mit unserem x, y, z, u-Gebiet.

2. Die kontinuierliche Schar der pseudoorthogonalen Substitutionen der $\xi, \eta, \ldots$ liefert für die x, y, z, u die größte kontinuierliche Gruppe von Kollineationen, durch welche unser Hyperboloid in sich übergeht.

3. Mögen neue Gebilde, welche durch eine einzelne lineare Gleichung zwischen den x, y, z, u (bez. durch eine entsprechende homogene Gleichung zwischen den $\xi, \eta, \ldots$) dargestellt werden, schlechtweg *Räume* heißen.

4. Räume, welche das fundamentale Hyperboloid nur in imaginären Punkten schneiden (wie z. B. $u = 0$), werden elliptische Maßbestimmung schlechtweg aufweisen, also endlich ausgedehnt sein. Insofern wird man also unsere Welt als „räumlich geschlossen" bezeichnen dürfen und direkt neben die Einsteinsche Zylinderwelt stellen.

5. Als Grenzfälle treten neben diese Räume solche, welche das Hyperboloid in einem Punkte berühren, z. B. die Räume

$$u = \pm \frac{R}{c}, \text{ oder, was dasselbe ist, } v \mp \omega = 0. \tag{41}$$

Solche Räume mögen kurzweg Tangentialräume genannt werden.

6. Irgend zwei Tangentialräume umgrenzen, bei projektiver Auffassung, ein zusammenhängendes Weltstück, in dessen Inneres das Hyperboloid nicht eindringt und das man nach seiner Gestalt gemäß projektiver Auffassung zweckmäßigerweise als *Doppelkeil* bezeichnen wird. Dieser Doppelkeil ragt von zwei Seiten an das noch immer zweidimensionale Gebiet heran, das den beiden Tangentialräumen gemeinsam ist und das man daher zweckmäßigerweise die *Doppelschneide* (des Keils) nennen dürfte.

7. Man überblickt diese Sachlage am einfachsten, indem man die beiden Tangentialräume der Nr. 5 betrachtet (in welche man vermöge der G_{10} unserer Kollineationen noch jedes andere Paar zweier Tangentialräume auf ∞^4 Weisen überführen kann). Der Doppelkeil umfaßt dann die Punkte, für welche

$$-\frac{R}{c} < u < +\frac{R}{c}, \quad \text{d. h. } -1 < \frac{v}{\omega} < +1. \tag{42}$$

Die Schneide wird durch diejenigen Punkte gebildet, für welche u unbestimmt wird, für die also v und ω gleichzeitig verschwinden (womit x, y, z unendlich werden).

8. Gemäß der Lehre von der projektiven Maßbestimmung gibt jeder solche Doppelkeil nun Anlaß, für irgend zwei seine Schneide enthaltenden elliptischen Räume einen reellen *Pseudowinkel* einzuführen.

9. Ich will der Deutlichkeit halber gleich an das Beispiel (41), (42) anknüpfen. Zwei zugehörige (ihrem ganzen Verlaufe nach dem Doppelkeil angehörige) elliptische Räume werden dann durch Gleichungen:

$$u = u_1, \quad u = u_2 \quad \text{bez.} \quad \frac{v}{\omega} = \frac{v_1}{\omega_1}, \quad \frac{v}{\omega} = \frac{v_2}{\omega_2} \tag{43}$$

gegeben sein (wobei u_1 und u_2 zwischen $\pm \frac{R}{c}$ und $\frac{v_1}{\omega_1}$, $\frac{v_2}{\omega_2}$ zwischen ± 1 liegen). Sie bilden mit den *Flanken* des Doppelkeils, d. h. den beiden Tangentialräumen (42), zwei zueinander inverse Doppelverhältnisse, von denen wir etwa dieses herausgreifen wollen:

$$Dv = \frac{u_1 + R/c}{u_1 - R/c} \cdot \frac{u_2 - R/c}{u_2 + R/c} = \frac{v_1 + \omega_1}{v_1 - \omega_1} \cdot \frac{v_2 - \omega_2}{v_2 + \omega_2}. \tag{44}$$

Als Pseudowinkel der beiden elliptischen Räume (43) *wird man dann den mit irgendeiner reellen Konstanten A multiplizierten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses definieren.*

10. Mit Rücksicht auf die de Sitterschen Entwicklungen wollen wir $A = \frac{R}{2c}$ nehmen und wollen übrigens $u_2 = 0$ setzen, d. h. den Pseudowinkel von $u = 0$ beginnend nehmen. *Wir haben dann,* indem wir bei u_1, v_1, ω_1 noch den Index weglassen, *als Definitionsformel des Pseudowinkels:*

$$(45) \qquad \varphi = \frac{R}{2c} \log \frac{R/c + u}{R/c - u} = \frac{R}{2c} \log \frac{\omega + v}{\omega - v}$$

und sehen deutlich, wie er von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, wenn u von $-\frac{R}{c}$ bis $\frac{R}{c}$ geht, d. h. den ganzen Doppelkeil durchwandert.

11. Für die Punkte der Schneide selbst, wo ω und v gleichzeitig verschwinden, wird φ naturgemäß völlig unbestimmt. Man hat damit, für die allgemeine analytische Auffassung, keine andere Singularität vor sich als beim Polarwinkel φ im Nullpunkte eines gewöhnlichen ebenen (Polar-)Koordinatensystems. Nur daß die beiden absoluten Richtungen, welche der Winkelbestimmung (im Sinne der projektiven Theorie) zugrunde liegen, im gewöhnlichen Falle imaginär, bei (45) aber reell sind[16]).

§ 9.

Einführung von Materie und Zeit.

Wir denken uns jetzt unser ds^2 (35) durch vier unabhängige, vorläufig noch beliebige Parameter w (für welche wir gern unsere x, y, z, u nehmen können) ausgedrückt:

$$(46) \qquad ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dw^\mu\, dw^\nu .$$

Da wir wissen, daß dieses ds^2 konstantes Riemannsches Krümmungsmaß hat, können wir die zugehörigen $K_{\mu\nu}$ nach den Entwicklungen von Herglotz[17]) gleich hinschreiben:

$$(47) \qquad K_{\mu\nu} = \frac{3c^2}{R^2} \cdot g_{\mu\nu} .$$

Wir werden also den Einsteinschen Feldgleichungen mit dem λ-Glied

$$(48) \qquad K_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0$$

genügen, indem wir

$$(49) \qquad \lambda = \frac{3c^2}{R^2} \text{ und alle } T_{\mu\nu} = 0$$

setzen, d. h. *überhaupt keine Materie annehmen.* Wir werden auch weiter unten sehen, daß man notwendig zu dieser Annahme geführt wird, wenn

---

[16]) Für die Nr. 8—11 möge der diesen Dingen ferner stehende Leser meine alten Entwicklungen in Bd. 4 der Math. Annalen [siehe Abh. XVI dieser Ausgabe] vergleichen (wo die in Betracht kommenden Beziehungen und Überlegungen mit aller Ausführlichkeit geschildert sind).

[17]) Sächsische Berichte von 1916, S. 202.

man von der Voraussetzung einer die Welt gleichförmig erfüllenden, inkohärenten, bei geeigneter Einführung einer „Zeit“ t „ruhenden“ Materie ausgeht. In der Tat kommt auch de Sitter zu diesem Resultat, nur daß er es etwas anders ausdrückt, wie man an Ort und Stelle nachsehen mag.

Natürlich entfernen wir uns mit dieser Formel (49) durchaus von Einsteins ursprünglicher physikalischer Absicht, welche darauf ausging, sich durch gleichförmige Verteilung der Materie über den Raum hin ein mittleres Weltbild zu verschaffen. Wir setzen uns aber auch überhaupt in mindestens formalen Widerspruch mit einem anderen Grundsatz von Einstein, demzufolge es keine von Null verschiedene Lösung der Gleichungen (48) ohne Annahme von Materie geben soll (vgl. die oben zitierte Note Einsteins vom März 1918). Dieser Grundsatz ist bei Einstein ursprünglich ohne Zweifel aus physikalischen Überlegungen erwachsen, er ist aber an sich rein mathematischer Natur, er wird also (worauf mich Einstein gelegentlich einer Korrespondenz selbst aufmerksam machte) durch die bloße Existenz unseres ds^2 (46) widerlegt. Allerdings kann man bemerken, daß die g_{ik} dieses ds^2 (man führe die Rechnung etwa für die x, y, z, u aus) entlang dem fundamentalen Hyperboloid unendlich werden, was als ein Äquivalent für das Nichtvorhandensein von Materie an den nichtsingulären Stellen der Welt angesehen werden kann.

Handeln wir jetzt von der geeigneten Einführung einer „Zeit“ t (die wir dann als w^{IV} wählen). Den Ausgangspunkt muß gemäß Einsteinscher Auffassung die Bemerkung bilden, daß die Welt, die wir suchen, als *statisches* System soll aufgefaßt werden können, d. h. daß ds^2 unverändert bleiben soll, wenn man, unter Festhaltung von w^I, w^{II}, w^{III}, das $w^{IV} = t$ um eine beliebige Konstante vermehrt. Es soll also die eingliedrige Gruppe:

$$(50)\qquad \bar{w}^I = w^{II}, \quad \bar{w}^I = w^{II}, \quad \bar{v}^{III} = w^{III}, \quad u^{IV} = w^{IV} + C$$

in der zehngliedrigen Gruppe, durch welche unser ds^2 in sich übergeht, enthalten sein. Es genügen einige geometrische Schlüsse, um einzusehen, daß eine solche eingliedrige Gruppe gleichbedeutend mit einer fortgesetzten Drehung unserer pseudoelliptischen Welt um eine festliegende, zweidimensionale Achse sein muß, daß t *darum* (nach geeigneter Wahl der Zeiteinheit) *bis auf eine additive Konstante mit dem Pseudowinkel eines Doppelkeils, wie er durch* (45) *definiert ist, übereinstimmen muß.* Wir haben also, wenn wir unter $v = 0$, $\omega = 0$ in früherer Weise irgendzwei Tangentialräume des fundamentalen Hyperboloids verstehen und auf die additive Konstante keinen Wert legen:

$$(51)\qquad t = \frac{R}{2c} \log \frac{\omega + v}{\omega - v}$$

zu nehmen. Nun gibt es solcher Paare von Tangentialräumen ∞^6. *Wir haben danach ∞^6 Weisen, gemäß* (51) *ein t einzuführen,* — im Gegensatz zur Zylinderwelt, wo das t bis auf eine additive Konstante völlig festgelegt war, im Gegensatz auch zur speziellen Relativitätstheorie (der Lorentzgruppe), wo das t (immer nach Festlegung der Zeiteinheit und des Anfangspunktes) noch drei willkürliche Parameter enthält.

Konstatieren wir zunächst, daß wir mit (51) genau zu dem ds^2 kommen, welches de Sitter seiner Hypothese B zugrunde legt. Unter Benutzung räumlicher Polarkoordinaten schreibt nämlich de Sitter (sofern ich gleich die von mir sonst gebrauchten Buchstaben verwenden, auch das ds^2 mit dem früher verabredeten Vorzeichen nehmen darf):

$$(52)\qquad -ds^2 = \frac{R^2}{c^2}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\cdot d\varphi^2 + \sin^2\vartheta \sin^2\varphi\cdot d\psi^2) - \cos^2\vartheta\cdot dt^2$$

und dieses ds^2 entsteht aus dem in (35) an die Spitze gestellten:

$$-ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - dv^2 + d\omega^2,$$

wenn ich, unter Einhaltung der Bedingung (34):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2 = \frac{R^2}{c^2}$$

einfach ansetze:

$$(53)\qquad \begin{cases} \xi = \frac{R}{c}\sin\vartheta\cos\varphi, & \eta = \frac{R}{c}\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi, \\ \zeta = \frac{R}{c}\sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi, & v = \frac{R}{c}\cos\vartheta\,\mathfrak{Sin}\,\frac{ct}{R}, \\ \omega = \frac{R}{c}\cos\vartheta\,\mathfrak{Cof}\,\frac{ct}{R}. \end{cases}$$

Hier sollen $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ in gewöhnlicher Weise hyperbolische Funktionen bedeuten. Es wird dann:

$$54)\qquad \mathfrak{Tang}\,\frac{ct}{R} = \frac{v}{\omega},$$

was in der Tat mit Formel (51) übereinstimmt.

Ich werde das Stück unserer pseudoelliptischen Welt, welches gemäß (53) durchlaufen wird, wenn man ϑ, φ, ψ innerhalb der üblichen Grenzen, t aber von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen läßt, eine *de Sittersche Welt* nennen. Gemäß (54) durchläuft $\frac{v}{\omega}$ dabei nur die Werte von -1 bis $+1$. Offenbar ist diese de Sittersche Welt nichts anderes, als der *Doppelkeil* der vorigen Paragraphen. Seine beiden „Flanken", $v - \omega = 0$ und $v + \omega = 0$, erscheinen als unendlich ferne Zukunft, bez. unendlich ferne Vergangenheit. Seine Kante aber (die für die allgemeine Auffassung der pseudoelliptischen Welt aus lauter gewöhnlichen Punkten besteht) erscheint als etwas Singuläres, nämlich als Ort solcher Weltpunkte, für welche t den Wert $^0/_0$ annimmt. —

Ich habe diese Verhältnisse schon an der oben genannten Stelle des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung berührt (Vortrag vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vom 11. Juni 1918). Um die paradoxen Beziehungen, welche für die physikalische Auffassung vorliegen, klar als solche hervortreten zu lassen, habe ich mich damals folgendermaßen geäußert: „Zwei Astronomen, die, beide in einer de Sitterschen Welt lebend, mit verschiedenen de Sitterschen Uhren ausgestattet wären, würden sich hinsichtlich der Realität oder Imaginäritat irgendwelcher Weltereignisse in sehr interessanter Weise unterhalten können". Gemeint ist, daß die Doppelkeile, welche aus der pseudoelliptischen Welt durch verschiedene Paare von Tangentialräumen der fundamentalen Hyperboloide ausgeschnitten werden, immer nur Stücke gemein haben, mit anderen Stücken übereinander hinausgreifen. —

Im übrigen kann, wer will, sich über die Einzelheiten der de Sitterschen Welt leicht genauer orientieren. Die Welt reicht nur in den beiden Punkten: $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $v \mp \omega = 0$ an das fundamentale Hyperboloid heran. Alle Weltlinien sind solche Kegelschnitte, welche das Hyperboloid in diesen beiden Punkten berühren (deren Ebene also die eindimensionale Achse $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ enthalten). Es gibt nur noch eine kontinuierliche G_4, welche die de Sittersche Welt in sich transformiert, entsprechend der Substitution $\bar{t} = t + C$ verbunden mit der kontinuierlichen G_3 der unimodularen orthogonalen Substitutionen von ξ, η, ζ. Hierbei ist $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ invariant, die Gruppe der de Sitterschen Welt ist also nicht mehr transitiv. Die „Achse" $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und die „Schneide" $v = 0$, $\omega = 0$ sind invariante Gebilde.

Zum Schluß überzeugen wir uns noch, daß die Dichte ϱ der ruhenden, inkohärenten Materie, welche die de Sittersche Welt gleichförmig erfüllen soll, in der Tat notwendigerweise $= 0$ gesetzt werden muß. Bleiben wir nämlich bei unseren „statischen" Koordinaten. Wir haben dann für alle anderen Indexkombinationen μ, ν:

$$\lambda g_{\mu\nu} = \frac{3c^2}{R^2} g_{\mu\nu}$$

und nur für $\mu = 4$, $\nu = 4$:

$$\lambda g_{44} = \frac{3c^2}{R^2} g_{44} + \varkappa c^2 \varrho,$$

woraus eindeutig

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2}, \qquad \varrho = 0$$

folgt, wie wir in Formel (49) bereits angenommen hatten. —

Alle diese Resultate sind in voller Übereinstimmung mit de Sitters eigenen Angaben. Sie widersprechen aber dem Einwande, den Einstein in seiner Mitteilung vom März 1918 gegen de Sitter erhob und den dann Weyl in seinem Buche[18]), sowie neuerdings in einem besonderen Aufsatz in der Physikalischen Zeitschrift[19]) durch ausführliche Rechnungen gestützt hat. Beide Autoren finden, daß entlang der Schneide des Doppelkeils (ich bleibe der Kürze halber in meiner Ausdrucksweise) Materie vorhanden sein müsse. Ich habe die Richtigkeit der Weylschen Rechnungen nicht nachgeprüft, schließe mich aber gern der Auffassung an, die mir Einstein brieflich aussprach, daß die Verschiedenheit der beiderseitigen Resultate in der Verschiedenheit der benutzten Koordinaten begründet sein muß. Was ich, unter Verwendung der ξ, η, ζ, v, ω, als einzelnen Punkt der Schneide bezeichne, ist bei Benutzung der ϑ, φ, ψ, t (wegen des unbestimmt bleibenden Wertes von t) ein einfach ausgedehntes Gebiet. Es sollte nicht schwierig sein, hierüber volle Aufklärung zu schaffen.

Mein abschließendes Votum über die de Sitterschen Angaben aber ist, daß mathematisch — jedenfalls bis auf diesen einen noch nicht völlig geklärten Punkt [den ich gern in allgemeiner Weise erläutert sehen möchte] – alles in Ordnung ist, man aber zu physikalischen Folgerungen geführt wird, welche unserer gewöhnlichen Denkweise und jedenfalls den Absichten, welche Einstein bei Einführung der räumlich geschlossenen Welt verfolgte, widersprechen.

---

18) Raum, Zeit, Materie. S. 225.
19) 1919, Nr. II (vom 15. Januar 1919)

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.