# 1.

# Beitrag zur Theorie der Function $\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-v}v^{x-1}dv$.

(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer*, Professor in Breslau.)

---

Stellt man sich irgend eine Function $f(x)$ in eine nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $2\pi x$ geordnete Reihe entwickelt vor, so dass

$$f(x) = A + 2A_1\cos 2\pi x + 2A_2\cos 4\pi x + 2A_3\cos 6\pi x + \ldots\ldots$$
$$+ 2B_1\sin 2\pi x + 2B_2\sin 4\pi x + 2B_3\sin 6\pi x + \ldots\ldots$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$ ist, verwandelt sodann $x$ in $x+\frac{1}{n}$, $x+\frac{2}{n}\ldots\ldots x+\frac{n-1}{n}$, und addirt diese Gleichungen, so fallen alle Glieder der Reihen-Entwicklung mit Ausnahme derer heraus, welche Sinus oder Cosinus von Bogen enthalten, die Vielfache von $2n\pi x$ sind, und man erhält

$$f(x)+f(x+\tfrac{1}{n})+f(x+\tfrac{2}{n})+\ldots\ldots+f(x+\tfrac{n-1}{n})$$
$$= n(A + 2A_n\cos 2n\pi x + 2A_{2n}\cos 4n\pi x + 2A_{3n}\cos 6n\pi x + \ldots\ldots)$$
$$+ n(2B_n\sin 2n\pi x + 2B_{2n}\sin 4n\pi x + 2B_{3n}\sin 6n\pi x + \ldots\ldots),$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=\frac{1}{n}$. Setzt man nun weiter

$$F(x) = A + 2A_n\cos 2\pi x + 2A_{2n}\cos 4\pi x + 2A_{3n}\cos 6\pi x + \ldots\ldots$$
$$+ 2B_n\sin 2\pi x + 2B_{2n}\sin 4\pi x + 2B_{3n}\sin 6\pi x + \ldots\ldots,$$

so ergiebt sich

$$f(x)+f(x+\tfrac{1}{n})+f(x+\tfrac{2}{n})+\ldots\ldots+f(x+\tfrac{n-1}{n}) = nF(nx).$$

Setzt man ferner $f(x)=l\varphi(x)$ und $nF(x)=l\Phi(x)$, so ist

$$\varphi(x)\varphi(x+\tfrac{1}{n})\varphi(x+\tfrac{2}{n})\ldots\ldots\varphi(x+\tfrac{n-1}{n}) = \Phi(nx).$$

Man hat also so zwei allgemeine Formen von Gleichungen erhalten, die in der Analysis häufig vorkommen; namentlich in der Theorie der transcendenten Functionen. Die Entwickelung einer Function $f(x)$ in eine nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von $2\pi x$ geordnete Reihe führt jedesmal zu einer solchen

Formel, welche aber nur dann von besonderem Interesse ist, wenn die Function $F(x)$ einen anderweiten einfachen Zusammenhang mit $f(x)$ hat.

Auf die obige Art lässt sich auch ein leichter Beweis der bekannten Formel für die Function Gamma finden, welche eine sehr einfache, wie ich glaube bisher noch nicht bekannte Reihen-Entwicklung nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $2\pi x$ enthält.

Setzt man nemlich

$$\begin{aligned} l\Gamma(x) = A_0 &+ 2A_1 \cos 2\pi x + 2A_2 \cos 4\pi x + 2A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ &+ 2B_1 \sin 2\pi x + 2B_2 \sin 4\pi x + 2B_3 \sin 6\pi x + \dots, \end{aligned}$$

in den Grenzen $x = 0$ bis $x = 1$, so ergiebt sich bekanntlich

$$A_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \cos.2k\pi x.dx, \qquad B_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \sin.2k\pi x.dx.$$

Die Coefficienten $A_k$ lassen sich leicht bestimmen, ohne dass man der Ausdrücke durch bestimmte Integrale bedarf; nämlich vermittelst der Grund-Eigenschaft der Function Gamma:

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(1-x) = l(2\pi) - l(2\sin\pi x).$$

Setzt man in dieser Formel für $l\Gamma(x)$ und $l\Gamma(1-x)$ ihre Reihen-Entwickelungen, und auch für $l(2\sin\pi x)$ die bekannte Reihe

$$-l(2\sin\pi x) = \cos 2\pi x + \tfrac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \tfrac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \dots,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} &2A_0 + 4A_1 \cos 2\pi x + 4A_2 \cos 4\pi x + 4A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ &= l(2\pi) + \cos 2\pi x + \tfrac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \tfrac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \dots, \end{aligned}$$

in den Grenzen $x = 0$ bis $x = 1$; und da nun nach bekannten Sätzen beide Entwickelungen identisch sein müssen, so findet sich

$$A_0 = \tfrac{1}{2}l(2\pi) \qquad \text{und} \qquad A_k = \frac{1}{4k}.$$

Um weiter die Coefficienten $B_k$ zu bestimmen, setzen wir in dem Ausdrucke

$$B_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \sin.2k\pi x.dx$$

statt $l\Gamma(x)$ den bekannten, oder wenigstens aus bekannten leicht zu entwickelnden Ausdruck durch ein bestimmtes Integral:

$$l\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1\right) \frac{dz}{l(z)} \qquad (x > 0).$$

Dieser giebt

$$B_k = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1\right) \frac{\sin 2k\pi x\, dz\, dx}{l(z)}.$$

Wird nun die Integration in Beziehung auf $x$ ausgeführt, so erhält man

$$\int_0^1 \sin.2k\pi x.dx = 0, \qquad \int_0^1 x\sin.2k\pi x.dx = \frac{-1}{2k\pi},$$
$$\int_0^1 z^{x-1}\sin.2k\pi x.dx = \frac{(1-z)2k\pi}{z(l(z)^2+4k^2\pi^2)},$$

also

$$B_k = \int_0^1 \left(\frac{-2k\pi}{z(l(z)^2+4k^2\pi^2)} + \frac{1}{2k\pi}\right)\frac{dz}{l(z)},$$

oder, wenn $z = e^{-2k\pi t}$ gesetzt wird:

$$B_k = \frac{1}{2k\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - e^{-2k\pi t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Hieraus folgt:

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty (e^{-2\pi t} - e^{-2k\pi t})\frac{dt}{t},$$

und da bekanntlich

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-kt})\frac{dt}{t} = l(k),$$

so ist

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi}l(k).$$

Es bleibt jetzt nur noch $B_1$ zu suchen; zu welchem Zwecke das Integral

$$\int_0^\infty \left(e^{-t} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t} = C = 0{,}577\ 215\ 664\ 9$$

dient, welches die bekannte Constante des Integral-Logarithmen giebt. Dieses, mit dem Ausdrucke des $B_1$ verbunden, giebt

$$B_1 - \frac{1}{2\pi}C = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} + e^{-t} - e^{-2\pi t}\right)\frac{dt}{t},$$

also

$$B_1 - \frac{1}{2\pi}C = \frac{1}{2\pi}l(2\pi) - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\frac{dt}{t}.$$

Dieses letzte Integral hat aber den Werth Null, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man $t$ in $\frac{1}{t}$ verwandelt, wodurch es ungeändert bleibt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt. Also ist endlich

$$B_1 = \frac{1}{2\pi}C + \frac{1}{2\pi}l(2\pi).$$

Da jetzt alle Coefficienten der Reihen-Entwickelung für $l\Gamma(x)$ gefunden sind, so können wir dieselbe folgendermaassen darstellen:

$$l\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}l(2\pi) + \tfrac{1}{2}(\cos 2\pi x) + \tfrac{1}{4}(\cos 4\pi x) + \tfrac{1}{6}(\cos 6\pi x) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{\pi}(C + l(3\pi))\,(\sin 2\pi x + \tfrac{1}{2}(\sin 4\pi x) + \tfrac{1}{3}(\sin 6\pi x) + \ldots)$$
$$+ \frac{1}{\pi}(l(1)\sin 2\pi x + \tfrac{1}{2}(l(2))\sin 4\pi x + \tfrac{1}{3}(l(3))\sin 6\pi x + \ldots),$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$. Anstatt der beiden ersten Reihen kann man auch die bekannten Summenausdrücke derselben setzen und erhält

$$l\Gamma(x)-\tfrac{1}{2}l(2\pi)+\tfrac{1}{2}l(2\sin\pi x)-(C+l(2\pi))(1-2x)$$
$$=\frac{1}{\pi}(l(1)\sin 2\pi x+\tfrac{1}{2}l(2)\sin 4\pi x+\tfrac{1}{3}l(3)\sin 6\pi x+\ldots.),$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=1$.

Aus dieser Reihen-Entwickelung findet sich nun die erwähnte Hauptformel für die Function Gamma durch Verwandlung des $x$ in $x+\frac{1}{n}$, $x+\frac{2}{n}$, .... $x+\frac{n-1}{n}$, und durch Addition dieser Gleichungen. Diese Operation giebt

$$l\Gamma(x)+l\Gamma(x+\tfrac{1}{n})+l\Gamma(x+\tfrac{2}{n})+\ldots.+l\Gamma(x+\tfrac{n-1}{n})$$
$$=\tfrac{1}{2}nl(2\pi)+\tfrac{1}{2}n(\frac{\cos 2n\pi x}{n}+\frac{\cos 4n\pi x}{2n}+\frac{\cos 6n\pi x}{6n}+\ldots.)$$
$$+\frac{n}{\pi}(C+l(2\pi))(\frac{\sin 2n\pi x}{n}+\frac{\sin 4n\pi x}{2n}+\frac{\sin 6n\pi x}{6n}+\ldots.)$$
$$+\frac{n}{\pi}(\frac{l(n)}{n}\sin 2n\pi x+\frac{l(2n)}{2n}\sin 4n\pi x+\frac{l(3n)}{3n}\sin 6n\pi x+\ldots.),$$

in den Grenzen $x=0$ bis $x=\frac{1}{n}$. Subtrahirt man hiervon $l\Gamma(nx)$, so bleibt

$$l\Gamma(x)+l\Gamma(x+\tfrac{1}{n})+l\Gamma(x+\tfrac{2}{n})+\ldots.+l\Gamma(x+\tfrac{n-1}{n})-l\Gamma(nx)$$
$$=\tfrac{1}{2}(n-1)l(2\pi)+\frac{l(n)}{\pi}(\sin 2n\pi x+\tfrac{1}{2}(\sin 4n\pi x)+\tfrac{1}{3}(6n\pi x)+\ldots.);$$

und wenn für diese Reihe wieder der bekannte Summen-Ausdruck gesetzt wird, so erhält man

$$l\Gamma(x)+l\Gamma(x+\tfrac{1}{n})+l\Gamma(x+\tfrac{2}{n})+\ldots.+l\Gamma(x+\tfrac{n-1}{n})-l\Gamma(nx)$$
$$=\tfrac{1}{2}(n-1)l(2\pi)+\tfrac{1}{2}(1-2nx)l(n).$$

Geht man endlich von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man die gesuchte Formel

$$\Gamma(x)\Gamma(x+\tfrac{1}{n})\Gamma(x+\tfrac{2}{n})\ldots.\Gamma(x+\tfrac{n-1}{n})=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}.n^{\frac{1}{2}(1-2nx)}\Gamma(nx).$$

Nach der oben ausgeführten Herleitung dieser Formel ist deren Gültigkeit zwar nur in den Grenzen $x=0$ bis $x=\frac{1}{n}$ bewiesen: es ist aber damit zugleich die Allgemeingültigkeit gegeben, da vermöge der Fundamental-Eigenschaft $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ die Formel bei der Verwandlung des $x$ in $x+\frac{1}{n}$ ungeändert bleibt.