

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1847

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0035

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0035](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0035)

**LOG Id:** LOG\_0004

**LOG Titel:** Beitrag zur Theorie der Function ... (x) = ... e-vvx-1 dv.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## 1.

## Beitrag zur Theorie der Function

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-v} v^{x-1} dv.$$

(Von Herrn Dr. E. E. Kummer, Professor in Breslau.)

Stellt man sich irgend eine Function  $f(x)$  in eine nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von  $2\pi x$  geordnete Reihe entwickelt vor, so dass

$$f(x) = A + 2A_1 \cos 2\pi x + 2A_2 \cos 4\pi x + 2A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ + 2B_1 \sin 2\pi x + 2B_2 \sin 4\pi x + 2B_3 \sin 6\pi x + \dots$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$  ist, verwandelt sodann  $x$  in  $x + \frac{1}{n}$ ,  $x + \frac{2}{n}$  ....  $x + \frac{n-1}{n}$ , und addirt diese Gleichungen, so fallen alle Glieder der Reihen-Entwicklung mit Ausnahme derer heraus, welche Sinus oder Cosinus von Bogen enthalten, die Vielfache von  $2n\pi x$  sind, und man erhält

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + f\left(x + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right) \\ = n(A + 2A_n \cos 2n\pi x + 2A_{2n} \cos 4n\pi x + 2A_{3n} \cos 6n\pi x + \dots) \\ + n(2B_n \sin 2n\pi x + 2B_{2n} \sin 4n\pi x + 2B_{3n} \sin 6n\pi x + \dots),$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = \frac{1}{n}$ . Setzt man nun weiter

$$F(x) = A + 2A_n \cos 2\pi x + 2A_{2n} \cos 4\pi x + 2A_{3n} \cos 6\pi x + \dots \\ + 2B_n \sin 2\pi x + 2B_{2n} \sin 4\pi x + 2B_{3n} \sin 6\pi x + \dots,$$

so ergibt sich

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{n}\right) + f\left(x + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = nF(nx).$$

Setzt man ferner  $f(x) = l\varphi(x)$  und  $nF(x) = l\Phi(x)$ , so ist

$$\varphi(x) \varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) \varphi\left(x + \frac{2}{n}\right) \dots \varphi\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = \Phi(nx).$$

Man hat also so zwei allgemeine Formen von Gleichungen erhalten, die in der Analysis häufig vorkommen; namentlich in der Theorie der transcendenten Functionen. Die Entwicklung einer Function  $f(x)$  in eine nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von  $2\pi x$  geordnete Reihe führt jedesmal zu einer solchen

Formel, welche aber nur dann von besonderem Interesse ist, wenn die Function  $F(x)$  einen anderweiten einfachen Zusammenhang mit  $f(x)$  hat.

Auf die obige Art lässt sich auch ein leichter Beweis der bekannten Formel für die Function Gamma finden, welche eine sehr einfache, wie ich glaube bisher noch nicht bekannte Reihen-Entwicklung nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von  $2\pi x$  enthält.

Setzt man nemlich

$$l\Gamma(x) = A_0 + 2A_1 \cos 2\pi x + 2A_2 \cos 4\pi x + 2A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ + 2B_1 \sin 2\pi x + 2B_2 \sin 4\pi x + 2B_3 \sin 6\pi x + \dots,$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ , so ergibt sich bekanntlich

$$A_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \cos 2k\pi x \cdot dx, \quad B_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \sin 2k\pi x \cdot dx.$$

Die Coefficienten  $A_k$  lassen sich leicht bestimmen, ohne dass man der Ausdrücke durch bestimmte Integrale bedarf; nämlich vermittelt der Grundeigenschaft der Function Gamma:

$$l\Gamma(x) + l\Gamma(1-x) = l(2\pi) - l(2 \sin \pi x).$$

Setzt man in dieser Formel für  $l\Gamma(x)$  und  $l\Gamma(1-x)$  ihre Reihen-Entwicklungen, und auch für  $l(2 \sin \pi x)$  die bekannte Reihe

$$- l(2 \sin \pi x) = \cos 2\pi x + \frac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \frac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \dots,$$

so erhält man

$$2A_0 + 4A_1 \cos 2\pi x + 4A_2 \cos 4\pi x + 4A_3 \cos 6\pi x + \dots \\ = l(2\pi) + \cos 2\pi x + \frac{1}{2}(\cos 4\pi x) + \frac{1}{3}(\cos 6\pi x) + \dots,$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ ; und da nun nach bekannten Sätzen beide Entwicklungen identisch sein müssen, so findet sich

$$A_0 = \frac{1}{2}l(2\pi) \quad \text{und} \quad A_k = \frac{1}{4k}.$$

Um weiter die Coefficienten  $B_k$  zu bestimmen, setzen wir in dem Ausdrücke

$$B_k = \int_0^1 l\Gamma(x) \sin 2k\pi x \cdot dx$$

statt  $l\Gamma(x)$  den bekannten, oder wenigstens aus bekannten leicht zu entwickelnden Ausdruck durch ein bestimmtes Integral:

$$l\Gamma(x) = \int_0^1 \left( \frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1 \right) \frac{dz}{l(z)} \quad (x > 0).$$

Dieser giebt

$$B_k = \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1-z^{x-1}}{1-z} - x + 1 \right) \frac{\sin 2k\pi x dz dx}{l(z)}.$$

Wird nun die Integration in Beziehung auf  $x$  ausgeführt, so erhält man

$$\int_0^1 \sin. 2k\pi x. dx = 0, \quad \int_0^1 x \sin. 2k\pi x. dx = \frac{-1}{2k\pi},$$

$$\int_0^1 z^{x-1} \sin. 2k\pi x. dx = \frac{(1-z) 2k\pi}{z(l(z)^2 + 4k^2\pi^2)},$$

also

$$B_k = \int_0^1 \left( \frac{-2k\pi}{z(l(z)^2 + 4k^2\pi^2)} + \frac{1}{2k\pi} \right) \frac{dz}{l(z)},$$

oder, wenn  $z = e^{-2k\pi t}$  gesetzt wird:

$$B_k = \frac{1}{2k\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t^2} - e^{-2k\pi t} \right) \frac{dt}{t}.$$

Hieraus folgt:

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (e^{-2\pi t} - e^{-2k\pi t}) \frac{dt}{t},$$

und da bekanntlich

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-kt}) \frac{dt}{t} = l(k),$$

so ist

$$kB_k - B_1 = \frac{1}{2\pi} l(k).$$

Es bleibt jetzt nur noch  $B_1$  zu suchen; zu welchem Zwecke das Integral

$$\int_0^\infty (e^{-t} - \frac{1}{1+t}) \frac{dt}{t} = C = 0,577\ 215\ 664\ 9$$

dient, welches die bekannte Constante des Integral-Logarithmen giebt. Dieses, mit dem Ausdrücke des  $B_1$  verbunden, giebt

$$B_1 - \frac{1}{2\pi} C = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} + e^{-t} - e^{-2\pi t} \right) \frac{dt}{t},$$

also

$$B_1 - \frac{1}{2\pi} C = \frac{1}{2\pi} l(2\pi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t} \right) \frac{dt}{t}.$$

Dieses letzte Integral hat aber den Werth Null, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man  $t$  in  $\frac{1}{t}$  verwandelt, wodurch es ungeändert bleibt, aber das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt. Also ist endlich

$$B_1 = \frac{1}{2\pi} C + \frac{1}{2\pi} l(2\pi).$$

Da jetzt alle Coefficienten der Reihen-Entwicklung für  $l\Gamma(x)$  gefunden sind, so können wir dieselbe folgendermaassen darstellen:

$$l\Gamma(x) = \frac{1}{2}l(2\pi) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi x) + \frac{1}{4}(\cos 4\pi x) + \frac{1}{6}(\cos 6\pi x) + \dots$$

$$+ \frac{1}{\pi}(C + l(3\pi)) (\sin 2\pi x + \frac{1}{2}(\sin 4\pi x) + \frac{1}{3}(\sin 6\pi x) + \dots)$$

$$+ \frac{1}{\pi}(l(1) \sin 2\pi x + \frac{1}{2}l(2) \sin 4\pi x + \frac{1}{3}l(3) \sin 6\pi x + \dots)$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ . Anstatt der beiden ersten Reihen kann man auch die bekannten Summenausdrücke derselben setzen und erhält

$$\begin{aligned} l\Gamma(x) - \frac{1}{2}l(2\pi) + \frac{1}{2}l(2\sin \pi x) - (C + l(2\pi))(1 - 2x) \\ = \frac{1}{\pi}(l(1) \sin 2\pi x + \frac{1}{2}l(2) \sin 4\pi x + \frac{1}{3}l(3) \sin 6\pi x + \dots), \end{aligned}$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = 1$ .

Aus dieser Reihen-Entwicklung findet sich nun die erwähnte Hauptformel für die Function Gamma durch Verwandlung des  $x$  in  $x + \frac{1}{n}$ ,  $x + \frac{2}{n}$ , ...,  $x + \frac{n-1}{n}$ , und durch Addition dieser Gleichungen. Diese Operation giebt

$$\begin{aligned} l\Gamma(x) + l\Gamma(x + \frac{1}{n}) + l\Gamma(x + \frac{2}{n}) + \dots + l\Gamma(x + \frac{n-1}{n}) \\ = \frac{1}{2}nl(2\pi) + \frac{1}{2}n(\frac{\cos 2n\pi x}{n} + \frac{\cos 4n\pi x}{2n} + \frac{\cos 6n\pi x}{6n} + \dots) \\ + \frac{n}{\pi}(C + l(2\pi))(\frac{\sin 2n\pi x}{n} + \frac{\sin 4n\pi x}{2n} + \frac{\sin 6n\pi x}{6n} + \dots) \\ + \frac{n}{\pi}(\frac{l(n)}{n} \sin 2n\pi x + \frac{l(2n)}{2n} \sin 4n\pi x + \frac{l(3n)}{3n} \sin 6n\pi x + \dots), \end{aligned}$$

in den Grenzen  $x = 0$  bis  $x = \frac{1}{n}$ . Subtrahirt man hiervon  $l\Gamma(nx)$ , so bleibt

$$\begin{aligned} l\Gamma(x) + l\Gamma(x + \frac{1}{n}) + l\Gamma(x + \frac{2}{n}) + \dots + l\Gamma(x + \frac{n-1}{n}) - l\Gamma(nx) \\ = \frac{1}{2}(n-1)l(2\pi) + \frac{l(n)}{\pi}(\sin 2n\pi x + \frac{1}{2}(\sin 4n\pi x) + \frac{1}{3}(\sin 6n\pi x) + \dots); \end{aligned}$$

und wenn für diese Reihe wieder der bekannte Summen-Ausdruck gesetzt wird, so erhält man

$$\begin{aligned} l\Gamma(x) + l\Gamma(x + \frac{1}{n}) + l\Gamma(x + \frac{2}{n}) + \dots + l\Gamma(x + \frac{n-1}{n}) - l\Gamma(nx) \\ = \frac{1}{2}(n-1)l(2\pi) + \frac{1}{2}(1 - 2nx)l(n). \end{aligned}$$

Geht man endlich von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man die gesuchte Formel

$$\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{n})\Gamma(x + \frac{2}{n}) \dots \Gamma(x + \frac{n-1}{n}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cdot n^{\frac{1}{2}(1-2nx)} \Gamma(nx).$$

Nach der oben ausgeführten Herleitung dieser Formel ist deren Gültigkeit zwar nur in den Grenzen  $x=0$  bis  $x=\frac{1}{n}$  bewiesen: es ist aber damit zugleich die Allgemeingültigkeit gegeben, da vermöge der Fundamental-Eigenschaft  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  die Formel bei der Verwandlung des  $x$  in  $x + \frac{1}{n}$  ungeändert bleibt.