## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik
**Verlag:** de Gruyter
**Jahr:** 1847
**Kollektion:** Mathematica
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN243919689_0035
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0035

**LOG Id:** LOG_0006
**LOG Titel:** Untersuchungen über die analytischen Facultäten.
**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

# 3.

# Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg i. Br.)

(Fortsetzung von No. 1., 7., 11. und 17. Band XXXIII.)

## VI.

### §. 33.

Die Facultäten lassen sich auch noch mit Vortheil zum Ausdruck *bestimmter Integrale* benutzen. Um dies zu zeigen, wollen wir von den Facultäten direct ausgehen, obgleich dies gerade nicht nöthig ist. Es lässt sich nämlich unmittelbar von den *unbestimmten* Integralen zu den *bestimmten* übergehen. Auch in diesem Falle werden die Facultäten ihre Brauchbarkeit bewähren, wie sich im Folgenden zeigen wird, und wie es auch bekannt ist. Nach dem Vorgange von *Euler* hat man bei hierher gehörigen Entwicklungen Zuflucht zu den unendlichen Factorenfolgen genommen; dies ist nach den bisher hier angestellten Untersuchungen nicht nöthig. Da nämlich gezeigt wurde, dass die Facultäten mit gebrochenen Exponenten sich als unendliche Factorenfolgen, und umgekehrt, darstellen lassen, so ist der Uebergang überflüssig, und sogar ein Umweg; denn es lassen sich sehr kurz alle Sätze von bestimmten Integralen, welche bisher auf die eben bemerkte Art gewonnen wurden, nicht nur viel einfacher auf dem hier angedeuteten directen Wege ableiten, sondern auch auf allgemeinere Formen und Gesetze zurückführen. Schon *Kramp* hat dies angedeutet, aber nicht nachgewiesen. *Legendre* würde gewiss in seinen Untersuchungen über die *Euler*'schen Integrale auf Einfacheres gekommen sein, wenn er die Facultäten einer besondern Vor-Untersuchung unterworfen, und nicht, wie er häufig that, die bestimmten Integrale benutzt hätte, um Eigenschaften der Facultäten daraus abzuleiten. Vielleicht war die von ihm gewählte, weniger geeignete *Bezeichnung* der Facultäten mit ein Hinderniss, dass es nicht geschahe. Aus diesem Grunde scheint auch der Tadel, den *Binet* in seiner Abhandlung über die Eulerschen Integrale (Journ. d. l'éc. polyt. T. XVI, pg. 227.) gegen *Kramp* ausspricht, nicht gerecht. Die Facultäten sind bei diesen Integralen nicht bloss Mittel zum Zweck, sondern in der That die transcendenten Grössen selbst, auf welche die Integrale führen. Sie haben also hier einen doppelten Dienst zu leisten, und zwar in *formeller* und in *materieller* Hinsicht: in *formeller*, indem sie dazu dienen, die Integrale von einer Form auf eine andere zu übertragen, oder die Beziehungen, worin sie zu einander stehen, anzudeuten: in *materieller*, indem sie dienen, den Werth der Integrale selbst darzustellen. Wir wenden uns nun zur Sache.

Soll das Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x$$

dargestellt werden, so ist, wenn man das Binomium $(1-x^q)^n$ entwickelt:

$$\int x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \int (x^{p-1} - n x^{p+q-1} + (n)_2 x^{p+q2-1} - (n)_3 x^{p+3q-1} + \ldots)\partial x.$$

Wird nun, nach der Integration, $x=1$ gesetzt, so ergiebt sich

$$1.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1}{p} - \frac{n}{p+q} + (n)_2 \frac{1}{p+2q} - (n)_3 \frac{1}{p+3q} + \ldots.$$

Diese Gleichung fällt genau mit der (21. §. 32.) zusammen, wenn dort $b=p$, $q=d$ gesetzt wird. Demnach ist

$$2.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^{n|q}}{p^{n+1|q}} = \frac{q^n.1^{n|1}}{p^{n+1|q}}.$$

Dieses Integral lässt sich auf verschiedene Formen bringen und man erhält

$$3.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1^{n|1}}{q(\frac{p}{q})^{n+1|1}} = \frac{1^{n|1}}{p(\frac{p}{q}+1)^{n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}.1^{n|1}}{q.1^{\frac{p}{q}+n|1}}$$

$$= \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p(n+1)^{\frac{p}{q}|1}}.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$4.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^{-q})^n \partial x = \frac{1^{n|1}}{p(\frac{p}{-q}+1)^{n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{-q}|1}.1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{-q}+n|1}} = \frac{1^{\frac{p}{-q}|1}}{p(n+1)^{\frac{p}{-q}|1}}.$$

Stellt man die Gleichung, aus welcher $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x$ abgeleitet wurde, wieder her, multiplicirt mit $x^q$ und integrirt wiederholt zwischen den Grenzen 0 und 1, so ergiebt sich

$$\int_0^1 x^q \partial x \int x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1}{p^{2|q}} - (n)_1 \frac{1}{(p+q)^{2|q}} + (n)_2 \frac{1}{(p+2q)^{2|q}}$$

$$- (n)_3 \frac{1}{(p+3q)^{2|q}} + \ldots,$$

und hieraus, wenn man in (24. §. 32) $r=2$, $q=d$, $b=p$ setzt:

$$5.\quad \int_0^1 x^q \partial x \int x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n.2^{n|1}}{p^{n+2|q}}.$$

Es lässt sich auch folgender Ausdruck aufstellen:

$$6. \quad \int_0^1 x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n . 2^{n|1}}{p^{n+2|q}},$$

wenn man erwägt, dass die Wiederherstellung der ursprünglichen Reihe, aus welcher $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x$ entsprang, der zweiten Integration vorhergehen muss. Auf gleiche Weise erhält man, unter der angegebenen Bedingung:

$$\int_0^1 x^q \partial x \int_0^1 x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n . 3^{n|1}}{p^{n+3|q}}.$$

Fährt man auf diese Weise fort und wiederholt die Integration $r$ mal, nachdem bei jeder spätern Integration die Reihen, aus welchen die vorhergehenden bestimmten Integrale entstanden, wiederhergestellt wurden, so findet sich nach (24. §. 32.) folgende Gleichung:

$$7. \quad \underset{r}{\int_0^1} x^q \partial x \underset{r-1}{\int_0^1} x^q \partial x \underset{r-2}{\int_0^1} x^q \partial x \ldots \underset{3}{\int_0^1} x^q \partial x \underset{2}{\int_0^1} x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{q^n\, r^{n|1}}{p^{n+r|q}}.$$

Hier wurde das Wiederholen der Integration durch Zahlen, welche den Integralzeichen untergeschrieben sind, angedeutet. Man kann die Wiederholung des Integrirens auch dadurch andeuten, dass man das Zeichen nur einmal schreibt, und oben rechts die Zahl anschreibt. Dieses giebt mit Hülfe von (25. §. 32.):

$$8. \quad \int_0^{1\,(r-1)} x^q \partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}\, 1^{r+n-1|1}}{q^r\, 1^{r-1|1}\, 1^{\frac{p}{q}+n+r-1|1}} = \frac{r^{n|1}}{q^r \left(\frac{p}{q}\right)^{n+r|1}}$$

$$= \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}}{q^r\, 1^{r-1|1} (r+n)^{\frac{p}{q}|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{q^{r-1}\, 1^{r-1|1} . p (r+n)^{\frac{p}{q}|1}}.$$

Man sieht leicht, dass die Gleichung (3.) ein besonderer Fall von (8.) ist, und hat zu dem Ende $r = 1$ zu setzen, oder nur eine Integration zu machen. Die Gleichung (7.) oder (8.) gilt noch, wenn $-q$ statt $q$ gesetzt wird.

Ein anderes wichtiges Integral findet sich auf folgende Art. Es ist

$$e^{-x^q} = 1 - x^q + \frac{x^{2q}}{1.2} - \frac{x^{3q}}{1.2.3} + \frac{x^{4q}}{1.2.3.4} - \frac{x^{5q}}{1.2.3.4.5} + \ldots.$$

Ferner ist

$$9. \quad \int x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{x^p}{p} - \frac{x^{p+q}}{p+q} + \frac{x^{p+2q}}{1.2.(p+2q)} - \frac{x^{p+3q}}{1.2.3(p+3q)} + \frac{x^{p+4q}}{1.2.3.4(p+4q)} - \ldots.$$

Nun ist, wenn in (30. §. 33.) $r = 1$, $b = p$, $d = q$ gesetzt wird:

$$10. \quad \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{x^p}{p} - \frac{x^{p+q}}{p+q} + \frac{x^{p+2q}}{1.2(p+2q)} - \frac{x^{p+3q}}{1.2.3(p+3q)} + \ldots,$$

unter der Voraussetzung, dass $x = \infty$ ist. Nimmt man nun das Integral (9.) zwischen den Grenzen 0 und $\infty$, so erhält man

$$11.\quad \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x^q}\, \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Eben so ist

$$12.\quad \int_0^\infty x^{p-1}\, e^{-x^{-q}}\, \partial x = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Ausser diesen beiden Arten von bestimmten Integralen lassen sich auch noch andere auf Facultäten bringen. Behandelt man z. B. das Integral

$$\int x^{m-1} (\lg x)^n\, \partial x$$

nach der allgemeinen Reductionsformel

$$\int XZ\partial x = X\int Z\partial x - \int(\partial X \int Z\partial x),$$

und nimmt das Integral zwischen den Grenzen 0 und 1, so findet sich

$$13.\quad \int_0^1 x^{m-1} (\lg x)^n\, \partial x = (-1)^n\, \frac{1^{n|1}}{m^{n+1}}.$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$14.\quad \int_0^1 x^{m-1} \left(\frac{1}{\lg x}\right)^n \partial x = \frac{1^{n|1}}{m^{n+1}}.$$

## §. 34.

Die Gleichungen im vorigen Paragraph lassen eine Menge Anwendungen zu. Sie sind schon von *Euler* (Integral-Rechnung 1ter und 4ter Theil), von *Legendre* (Exerc. d. calc. intégr. T. I. und II.), von *Plana* (s. d. Journ. 17ter Bd.), von *Binet* (Journ. d. l'écol. polyt. T. XVI.: sur les intégrales définies Euleriennes) u. A. behandelt worden. Eine wiederholte Untersuchung könnte daher überflüssig scheinen, wenn nicht, wie schon bemerkt wurde, die weiter oben gewonnenen Entwicklungen Mittel abgäben, die bekannten Resultate auf eine einfachere und zweckmässigere Weise, und überhaupt allgemeiner durch (wie ich glaube) *neue* Sätze abzuleiten. Die folgenden Untersuchungen haben daher den Zweck, die zwei eben berührten Aufgaben zu lösen. Wir beginnen mit dem ersten Theile der Aufgabe, schliessen zur Erleichterung der Uebersicht unsere Untersuchung an die von *Euler* im 8ten und 9ten Cap. des ersten Theils der Integral-Rechnung behandelten Gegenstände an, und behalten seine Anordnung zur Auffindung der Sätze bei. — Wir gehen hiebei von der vierten Form der in (3. §. 33.) angegebenen Gleichung

$$1.\quad \int_0^1 x^{p-1} (1-x^q)^n\, \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1} . 1^{n|1}}{p . 1^{\frac{p}{q}+n|1}}$$

aus. Wird hierin $n = -\frac{1}{2}$, $p = 1$, $q = 2$ gesetzt, so ist nach (25. u. 26. §. 13.):

$$2.\quad \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(-x^2)}} = 1^{\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Wird in (1.) $q = 2$, $n = -\frac{1}{2}$, $p = 2n+1$ und dann $p = 2n$ gesetzt, so erhält man

$$3.\quad \int_0^1 \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1^{n+\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(2n+1).1^{n|1}} = \frac{1^{\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}.1^{n|2}}{2^{n|2}} = \frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots.2n}.\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$4.\quad \int_0^1 \frac{x^{2n-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1^{n|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{2n.1^{n-\frac{1}{2}|1}} = \frac{2^{n-1|2}}{1^{n|2}} = \frac{2.4.6\ldots.(2n-2)}{1.3.5\ldots.(2n-1)}.$$

Setzt man in (4.) $n+1$ statt $n$ und verbindet (3. und 4.) mit einander, so wird

$$5.\quad \int_0^1 \frac{x^{2n}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2(2n+1)}.$$

Diese Gleichungen sind in (§. 330—332.) von *Eulers* Integralrechnung entwickelt. No. 2. wurde als bekannt vorausgesetzt und (3. und 4.) wurden aus der Analogie geschlossen.

Der Satz lässt sich leicht verallgemeinern. Aus (1.) erhält man nämlich für $q = 2s$, $n = -\frac{1}{2}$, $p = p+1$ und $p = p+s+1$:

$$\int_0^1 \frac{x^p \partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} \int_0^1 \frac{x^{p+s}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} = \frac{1^{\frac{p+1}{2s}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(p+1).1^{\frac{p+1}{2s}-\frac{1}{2}|1}} . \frac{1^{\frac{p+1}{2s}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(p+s+1).1^{\frac{p+1}{2s}|1}}.$$

Nun ist

$$1^{\frac{p+1}{2s}-\frac{1}{2}|1} = 1^{\frac{p+1}{2s}+\frac{1}{2}|1}.\frac{2s}{p+s+1}.$$

Wird dieser Werth substituirt, so ergiebt sich

$$6.\quad \int_0^1 \frac{x^p \partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} \int_0^1 \frac{x^{p+s}\partial x}{\sqrt{(1-x^{2s})}} = \frac{\pi}{2s(p+1)}.$$

Hierin unterliegt weder $p$ noch $s$ irgend einer Beschränkung. Setzt man in (1.) $p+n$ statt $p$, so wird

$$7.\quad \int_0^1 x^{p-1}(x-x^{q+1})^n \partial x = \frac{1^{\frac{p+n}{q}|1}.1^{n|1}}{(p+n).1^{\frac{p+n}{q}+n|1}}.$$

Wird hierin $n = -\frac{1}{2}$, $y = 1$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1^{p-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(p-\frac{1}{2})1^{p-1|1}} = \frac{3^{p-1|2}\pi}{(2p-1)2^{p-2|2}}.$$

Für $p = p+1$ entsteht hieraus

$$8.\quad \int_0^1 \frac{x^p \partial x}{\sqrt{(x-x^2)}} = \frac{1^{p|2}}{2^{p|2}}\pi = \frac{1.3.5\ldots.(2p-1)}{2.4.6\ldots.2p}.\pi.$$

Dieses Integral wurde von *Euler* (§. 335. u. ff.) in der speciellen Form (8.) entwickelt. Die Gleichung (7.) ist ein viel allgemeineres Integral, weil darin $p$, $q$ und $n$ keiner Beschränkung unterliegen. Die Gleichung lässt sich auch noch allgemeiner stellen, wenn in (1.) $p+rn$ statt $p$ gesetzt wird. Man erhält

$$9.\quad \int_0^1 x^{p-1}(x^r - x^{q+r})^n \partial x = \frac{1^{\frac{p+rn}{q}|1}\, 1^{n|1}}{(p+rn)\, 1^{\frac{p+rn}{q}|1}}.$$

Wird in (1.) $\frac{n}{m}$ statt $n$ eingeführt, so erhält man

$$10.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1} . 1^{\frac{n}{m}|1}}{p . 1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Wird hierin $p+q$ statt $p$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}+1|1} . 1^{\frac{n}{m}|1}}{(p+q) . 1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+1|1}}.$$

Nun ist $1^{\frac{p}{q}+1|1} = 1^{\frac{p}{q}|1}\left(\frac{q+p}{q}\right)$ und $1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+1|1} = 1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}\left(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m}\right)$. Durch Einführung dieser Werthe in die vorstehende Gleichung und mit Rücksicht auf (10.) ergiebt sich

$$11.\quad \int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{mp}{qm+pm+nq} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}} \partial x.$$

Für $n = -m+k$ und $q = m$ folgt hieraus

$$12.\quad \int_0^1 \frac{x^{p+m-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{p}{p+k} \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}}.$$

Für $q = m$ und $-\frac{m-k}{m} = n$ wird aus (1.):

$$13.\quad \int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{1^{\frac{p}{m}|1} . 1^{-\frac{m-k}{m}|1}}{p . 1^{\frac{p+k}{m}-1|1}}.$$

Setzt man hierin $p+hm$ statt $p$, so findet sich

$$\int_0^1 \frac{x^{p+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{1^{\frac{p}{m}+h|1} . 1^{-\frac{m-k}{m}|1}}{(p+hm)\, 1^{\frac{p}{m}+\frac{k}{m}-1+h|1}}.$$

Nun ist $1^{\frac{p}{m}+h|1} = \frac{1^{\frac{p}{m}|1}(p+m)^{h|m}}{m^h}$ und $1^{\frac{p}{m}+\frac{k}{m}-1+h|1} = 1^{\frac{p+k}{m}-1|1} . \frac{(p+k)^{h|m}}{m^h}$. Durch Einführung dieser Werthe in die vorstehende Gleichung ergiebt sich hieraus, mit Rücksicht auf (13.):

$$14. \quad \int_0^1 \frac{x^{p+hm-1}\partial x}{(1-x^n)^{\frac{m-k}{m}}} = \frac{p(p+m)(p+2m)\dots(p+(h-1)m)}{(p+k)(p+k+m)\dots(p+k(+(h-1)m)}\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}}$$

$$= \frac{(p+m)^{h-1|m}}{(p+k)^{h|m}} \cdot \frac{1^{\frac{p}{m}|1}.1^{-\frac{m-k}{m}|1}}{1^{\frac{p+k}{m}-1|1}}.$$

Aus (1.) ergiebt sich ferner für $n = -\frac{k}{m}$ und $p+k$ statt $p$:

$$15. \quad \int_0^1 \frac{x^{p+k-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{\frac{p+k}{m}|1}.1^{-\frac{k}{m}|1}}{(p+k).1^{\frac{p}{m}|1}}.$$

Ferner ist, wenn hierin $p+hm$ statt $p$ gesetzt wird:

$$\int_0^1 \frac{x^{p+k+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}} = \frac{1^{\frac{p+k}{m}+h|1}.1^{-\frac{k}{m}|1}}{(p+k+hm)^{\frac{p}{m}+h|1}} = \frac{(p+k+m)^{h|m}}{(p+k+hm).(p+m)^{h|m}} \cdot \frac{1^{\frac{p+k}{m}|1}\,1^{-\frac{k}{m}|1}}{1^{\frac{p}{m}|1}}.$$

Hieraus ergiebt sich nach (16.):

$$16. \quad \frac{x^{p+k+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}} = \frac{(p+k)^{h|m}}{(p+m)^{h|m}} \int_0^1 \frac{x^{p+k-1}}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}}.$$

Aus der Verbindung von (16.) mit (14.) folgt

$$17. \quad \int_0^1 \frac{x^{p+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}} \int_0^1 \frac{x^{p+k+hm-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}} = \frac{p}{p+hm}\int_0^1 \frac{x^{p-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{m-k}{m}}} \int_0^1 \frac{x^{p+k-1}\partial x}{(1-x^m)^{\frac{k}{m}}}.$$

Die Gleichungen (11., 13., 14. und 17.) hat *Euler* (§. 341—348.) entwickelt. Es sind dies die Integrale, welche er im 8ten Capitel der Integral-Rechnung 1ter Theil untersuchte; mit Ausnahme der zwei:

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\partial x \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^n};$$

welche hier, später in Verbindung mit andern, abgeleitet werden sollen.

## §. 35

Im 9ten Capitel bringt *Euler* Integrale von bestimmter Form auf unendliche Factorenfolgen, und benutzt dieselben, um weitere, für die Integrale geltende Beziehungen daraus abzuleiten. Diese Beziehungen lassen sich durch die in (§. 12. und 13.) aufgestellten Sätze leicht ableiten, da dort der Zusammenhang zwischen unendlichen Factorenfolgen und Facultäten mit gebrochenen Exponenten nachgewiesen ist.

Werden die Facultäten $1^{\frac{1}{2}|1}$ und $1^{-\frac{1}{2}|1}$ nach (20. und 18. §. 13.) entwickelt, so geht der Ausdruck (2. §. 34.) in folgenden über:

$$1. \quad \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\dots}{1.3.3.5.5.7.7.9\dots}.$$

Diese Gleichung giebt *Euler* (§. 356.). Nach (13. §. 34.) ist

$$2.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{m}|1}.1^{\frac{k}{m}-1|1}}{p.1^{\frac{pk}{m}-1|1}}.$$

Werden die Facultäten mit gebrochenen Exponenten nach (14. und 18. §. 13.) entwickelt, so erhält man

$$3.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{m}{p.k}\cdot\frac{2m(p+k)}{(p+m)(k+m)}\cdot\frac{3m(p+k+m)}{(p+2m)(k+2m)}\cdots$$

Eben so ist

$$4.\quad \int_0^1 x^{r-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{1^{\frac{r}{m}|1}.1^{\frac{k}{m}-1|1}}{p.1^{\frac{r+k}{m}-1|1}}$$

$$= \frac{m}{r.k}\cdot\frac{2m(r+k)}{(r+m)(k+m)}\cdot\frac{3m(r+k+m)}{(r+2m)(k+2m)}\cdots$$

Hieraus ergiebt sich das Verhältniss beider Integrale zu einander durch folgende Gleichung:

$$5.\quad \frac{\int_0^1 x^{p-1}(1+x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x}{\int_0^1 x^{r-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x} = \frac{r}{p}\cdot\frac{1^{\frac{p}{m}|1}.1^{\frac{r+k}{m}-1|1}}{1^{\frac{r}{m}|1}.1^{\frac{p+k}{m}-1|1}}$$

$$= \frac{r}{p}\cdot\frac{(p+k)}{(r+k)}\cdot\frac{(r+m)(p+k+m)}{(p+m)(r+k+m)}\cdot\frac{(r+2m)(p+k+2m)}{(p+2m)(r+k+2m)}\cdots$$

Diese Gleichungen findet *Euler* (§. 360 — 364.). Es ist bekanntlich $1^{\frac{p}{m}|1} = \frac{p}{m}1^{\frac{p}{m}-1|1}$. Wird dieser Werth in (2.) eingeführt, so erhält man

$$6.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{k}{m}-1|1}}{m.1^{\frac{p}{m}+\frac{k}{m}-1|1}}.$$

Vertauscht man in diesem Ausdruck die Buchstaben $p$ und $k$, so erhält man

$$7.\quad \int_0^1 x^{k-1}(1-x^m)^{\frac{p-m}{m}}\partial x = \frac{1^{\frac{k}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{m}-1|1}}{m.1^{\frac{k+p}{m}-1|1}}.$$

Aus (6. und 7.) ist

$$8.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{k-m}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{k-1}(1-x^m)^{\frac{p-m}{m}}\partial x.$$

Setzt man in (1. §. 34.) $\frac{n-m}{m}$ statt $n$ und behandelt das Resultat auf die in (6.) angegebene Weise, so ergiebt sich

$$9.\quad \int_0^a x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}-1|1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}-1|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}}{q.1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}-1|1}}.$$

Vertauscht man hier die Grössen $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$, so wird

$$10. \quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\partial x = \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{q}-1|1}}{m.1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}-1|1}}.$$

Die Gleichungen (9. und 10.) führen zu folgender Formel:

$$11. \quad q.\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = m\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\partial x.$$

Diese Gleichungen hat *Euler* (§. 369—374.) behandelt. Die folgenden Paragraphen dieses Capitels sind der Untersuchung des Ausdrucks

$$\frac{1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{k}{m}-1|1}}{1^{\frac{p+k}{m}-1|1}} = \left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+k}{p.k}\cdot\frac{m(p+k+m)}{(p+m)(k+m)}\cdot\frac{2m(p+k+2m)}{(p+2m)(k+2m)}\cdots$$

und den damit zusammenhängenden Ableitungen gewidmet. Da die hierher gehörigen Sätze schon in (§. 13. 43 u. ff.) betrachtet wurden, so verweisen wir dorthin. Die dort gefundenen Sätze lassen sich auch auf Integrale übertragen und man erhält

$$12. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x$$
$$=\int_0^1 x^{q-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{q+r-1}(1-x^m)^{\frac{p}{m}-1}\partial x.$$

Eben so ist

$$13. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x.\int_0^1 x^{p+q+r-1}(1-x^m)^{\frac{s}{m}-1}\partial x$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x.\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^m)^{\frac{s}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+q+s-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x=$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{r}{m}-1}\partial x\int_0^1 x^{p+r-1}(1-x^m)^{\frac{s}{m}-1}\partial x.\int_0^1 x^{p+r+s-1}(1-x^m)^{\frac{q}{m}-1}\partial x=\ldots.$$

u. s. w.

Aus den in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen mitgetheilten Entwicklungen dürfte sich der Beweis für die Einfachheit und Zweckmässigkeit der hier aufgestellten Ableitungsart ergeben. Eben so dürften die Entwicklungen dieses Paragraphs die Behauptung rechtfertigen, dass der Uebergang zu unendlichen Factorenfolgen ein Umweg und also überflüssig ist, da alle Sätze, welche durch die eben angedeutete Methode abgeleitet werden, viel einfacher durch ihre unmittelbare Beziehung, worin sie zu den Facultäten stehen, erlangt werden; wie hier deutlich vorliegt.

## §. 36.

Die in (§. 33.) gefundenen Integrale sollen nun noch näher betrachtet werden. Hebt man zuerst die Integrale (11. und 12.) hervor, und stellt sie durch unendliche Factorenfolgen dar, so erhält man folgende Formeln:

$$1.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{q.2q.3q.4q.5q....}{p(p+q)(p+2q)(p+3q)....},$$

$$2.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^{-q}}\partial x = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{q.2q.3q.4q.5q}{p(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)....}.$$

Hier soll hauptsächlich die Gleichung

$$3.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p}$$

betrachtet werden. Ist $q = 1$, so ergiebt sich

$$4.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\partial x = 1^{p-1|1} = 1.2.3.4\,....\,(p-1) = \frac{1^{p|1}}{p}.$$

Diese Gleichung gilt auch, wenn $p$ eine *gebrochene* Zahl ist. Für $p=1$ wird aus (3.)

$$5.\quad \int_0^\infty e^{-x^q}\partial x = 1^{\frac{1}{q}|1} = \frac{q.2q.3q.4q.5q....}{1.(1+q)(1+2q)(1+3q)....}.$$

Setzt man $x = az$, so wird $\partial x = a\partial z$ und man erhält aus (3.)

$$6.\quad \int_0^\infty z^{p-1}e^{-(az)^q}\partial z = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p.a^p}.$$

In dieser Gleichung kann auch $z$ durch $x$ vertreten werden. Man kann übrigens auch $e^{a^q}$ auf der linken Seite ausstossen. Dann geht (6.) für $z = \frac{x}{a}$ in

$$7.\quad \int_0^\infty z^{p-1}e^{-z^q}\partial z = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{pa^p.e^{a^q}}$$

über. Ist $q = 1$, so wird aus (6.)

$$8.\quad \int_0^\infty z^{p-1}e^{-(az)}\partial z = \frac{1.2.3\,....\,(p-1)}{a^p} = \frac{1^{p-1|1}}{a^p}.$$

Für $p = 1$ wird

$$9.\quad \int_0^\infty e^{-az}\partial z = \frac{1}{a}.$$

Ist in (3.) $p > q$, also $\frac{p}{q}$ ein unächter Bruch, so lässt sich das Integral auf ein einfacheres bringen. Es sei für diesen Fall $\frac{p}{q} = m + \frac{n}{q}$. Dann er-ergiebt sich aus (3.)

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{m+\frac{n}{q}|1}}{mq+n} = \frac{1^{\frac{n}{q}|1}(q+n)^{n\;q}}{(mq+n).q^m}.$$

Nun ist aus (3.)

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{n}{q}|1}}{n}.$$

Wird dieser Werth in die vorstehende Gleichung auf der rechten Seite eingeführt, so entsteht folgende Reductionsformel:

$$10.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{n^{m|q}}{q^m}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^q}\partial x.$$

Diese Gleichung gilt unter der oben genannten Bedingung. Führt man nun den Werth $p = mq + n$ ein, so ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$11.\quad \int_0^\infty x^{mq+n-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{n(n+q)(n+2q)\dots(n+(m-1)q)}{q^m}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^q}\partial x.$$

Ist $p$ ein Vielfaches von $q$ oder $p = mq$, so wird aus (3.)

$$12.\quad \int_0^\infty x^{mq-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1.2.3\dots(m-1)}{q} = \frac{1^{m|1}}{mq}.$$

Das nämliche Resultat würde man erhalten, wenn man in (14.) $n = 0$ setzte und die nöthigen Reductionen machte. Für $n = 1$ wird aus (11.)

$$13.\quad \int_0^\infty x^{mq}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{m|q}}{q^m}\int_0^\infty e^{-x^q}\partial x.$$

Wird $p$ negativ genommen, so entsteht aus (3.):

$$14.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{p+1}} = -\frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{p} = -\frac{q.2q.3q.4q.5q\dots}{p(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)\dots}.$$

Wird nun wie früher $p = mq + n$ gesetzt, so erhält man

$$15.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{mq+n+1}} = -\frac{1^{-\frac{n}{q}|1}\left(1-\frac{n}{q}\right)^{-m|1}}{mq+n} = (-1)^{m+1}\frac{q^m.1^{-\frac{n}{q}|1}}{n^{m+1|q}}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn (14.) benutzt wird:

$$16.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{mq+n+1}} = (-1)^m\frac{q^m}{(n+q)^{m|q}}\int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{n+1}}.$$

Ist $n = 0$ oder $p$ ein Vielfaches von $m$, so wird in Rücksicht auf (15. §. 4.)

$$17.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{mq+1}} = \frac{1^{-m|1}}{-mq} = (-1)^m\frac{\infty}{1^{m|1}.q}.$$

Alle Integrale dieser Art sind unendlich gross. Das Gleiche gilt nicht von Integralen von der Form

$$18.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}}\partial x}{x^{p+1}} = \frac{1^{\frac{-p}{-q}|1}}{-p} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{-p}.$$

Vergleicht man (2. und 14.) mit einander, so erhält man

$$19.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^{-q}}\partial x = -\int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{p+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}}.$$

Eben so ist aus (18. und 3.):

$$20.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = -\int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}}}{x^{p+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}}\partial x}{x^{p+1}}.$$

Bisher wurde vorausgesetzt, dass $1^{\frac{-p}{q}|1} = 1^{\frac{p}{q}|1}$ sei. Dies rechtfertigt sich einerseits aus den Elementen der Algebra, andererseits lässt es sich auch auf folgende Art zeigen. Es ist aus (16. §. 13.)

$$1^{-\frac{p}{q}|1} = \frac{q.2q.3q.4q....}{(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)(-p+4q)....}.$$

Wird die Facultät $1^{\frac{p}{-q}|1}$ nach (14. §. 13.) dargestellt, so ist

$$1^{\frac{p}{-q}|1} = \frac{(-q).2(-q).3(-q).4(-q)....}{(p-q)(p-2q)(p-3q)(p-4q)....} = \frac{(-1)^\infty q.2q.3q.4q....}{(-1)^\alpha(-p+q)(-p+2q)(-p+3q)(-p+4q)....}.$$

Hiernach ist

$$21.\quad 1^{\frac{p}{-q}|1} = 1^{\frac{-p}{q}|1} = 1^{-\frac{p}{q}|1}.$$

Ist $\frac{p}{q}$ ein ächter Bruch und $\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=1$, also $q-p=r$ und $q-r=p$, so ist bekanntlich aus (§. 22.):

$$1^{\frac{p}{q}|1} = 1^{1-\frac{r}{q}|1} = \frac{p}{q}.1^{-\frac{r}{q}|1}.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{1}{q}.1^{-\frac{r}{q}|1}.$$

Ferner ist aus (2.)

$$\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x^{-q}}\partial x = \frac{1^{\frac{r}{-q}|1}}{r}.$$

Diese beiden Gleichungen geben

$$22.\quad q\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = r\int_0^\infty x^{r-1}e^{-x^{-q}}\partial x,$$

oder

$$23.\quad q\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = (q-p)\int_0^\infty x^{q-p-1}e^{-x^{-q}}\partial x.$$

Setzt man in (1.) $mq+p$ statt $p$ und dann $-mp+r$ in (2.), unter der Bedingung, dass $\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=1$ ist, so erhält man folgende zwei Ausdrücke:

$$\int_0^\infty x^{mq+p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}+m|1}}{mq+p} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{mq+p}.\frac{(p+q)^{m|q}}{q^m} = 1^{-\frac{r}{q}|1}\frac{p^{m|q}}{q^{m+1}} \text{ und}$$

$$\int_0^\infty x^{-mq+r-1}e^{-x^{-q}}\partial x = \frac{1^{-\frac{r}{q}+m|1}}{-mq+r} = \frac{1^{-\frac{r}{q}|1}}{-mq+r}\frac{p^{m|q}}{q^m}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich folgende:

$$24.\quad q\int_0^\infty x^{mq+p-1}e^{-x^q}\partial x = (-mq+r)\int_0^\infty x^{-mq+r-1}e^{-x^{-q}}\partial x.$$

Die Gleichungen (22. und 23.) lassen sich leicht aus dieser ableiten. Verbindet man (11.) mit (16.), so erhält man

$$25.\quad \int_0^\infty x^{mq+n-1}e^{-x^q}\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{mq+n-1}}\partial x = (-1)^m \frac{n}{n+qm}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x^q}\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{n+1}}.$$

Specielle Fälle ergeben sich aus den hier aufgestellten Resultaten leicht. Ist z. B. $q=2$, so wird aus (5.)

$$26.\quad \int_0^\infty e^{-xx}\partial x = 1^{\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Für $q=2$, $p=1$ wird aus (14.)

$$27.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^2} = -1^{-\frac{1}{2}|1} = -\sqrt{\pi}.$$

Für $q=2$ ist aus (12., 13. und 16.)

$$28.\quad \int_0^\infty x^{2m-1}e^{-xx}\partial x = \tfrac{1}{2}(1.2.3.4\ldots(m-1)),$$

$$29.\quad \int_0^\infty x^{2m}e^{-xx}\partial x = \frac{1^{m|2}}{2^m}\int_0^\infty e^{-xx}\partial x = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^{m+1}}\sqrt{\pi},$$

$$30.\quad \int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^{2m+2}} = (-1)^m \frac{2^m}{3^{m|2}}\int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^2} = (-1)^{m+1}\frac{2^m\sqrt{\pi}}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

Aus (22. oder 23.) ist für $q=6$ und $p=3$, $p=4$:

$$31.\quad 6\int_0^\infty x^2e^{-x^6}\partial x = 3\int_0^\infty x^2e^{-x^{-6}}\partial x = \sqrt{\pi},$$

$$6\int_0^\infty x^3e^{-x^6}\partial x = 2\int_0^\infty x\,e^{-x^{-6}}\partial x = 1^{-\frac{1}{3}|1}$$

u. s. w. Aus (29. und 30.) wird

$$32.\quad \int_0^\infty x^{2m}e^{-xx}\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^{2m+2}} = (-1)^{m+1}\cdot\frac{\pi}{2(2m+1)}.$$

Hieraus und aus (5. §. 34.) ergiebt sich folgende Beziehung:

$$33.\quad \int_0^1 \frac{x^{2m}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = (-1)^{m+1}\int_0^\infty x^{2m}e^{-xx}\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-xx}\partial x}{x^{2m+2}}$$

Setzt man $\frac{p}{q}$ statt $p$ in (4.), so erhält man

$$\int_0^\infty x^{\frac{p}{q}-1}e^{-x}\partial x = \frac{q.1^{\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Hieraus ergiebt sich, mit Rücksicht auf (3.), folgende Relation:

$$34.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{q}\int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p}\,e^{-x}\partial x}{x}.$$

Wird in (4.) $\frac{p}{q}+1$ statt $p$ gesetzt, so erhält man

$$\int_0^\infty x^{\frac{p}{q}}e^{-x}\partial x = 1^{\frac{p}{q}|1}.$$

Hieraus und aus (3.) ergiebt sich die Relation

$$35.\quad p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p}\,.\,e^{-x}\partial x.$$

## §. 37.

Die im vorigen Paragraph aufgestellten Gleichungen sind noch weiterer Anwendungen fähig. Verbindet man (1.) mit (2.), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^{-q}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1} . 1^{-\frac{p}{q}|1}}{p^2}.$$

Hieraus entsteht, mit Rücksicht auf (21. §. 26.),

$$1. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^{-q}} \partial x = \frac{\pi}{p.q \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Wird in (1. §. 36.) $p-q$ statt $p$ gesetzt, so entsteht hieraus und aus (14.), mit Rücksicht auf (20. §. 26.),

$$2. \quad \int_0^\infty \frac{x^p e^{-x^q}}{x^{q+1}} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}} \partial x = \frac{\pi}{p(q-p) \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Wird in (1. und 2. §. 36.) $-p+q$ statt $p$ gesetzt, so entsteht, in Rücksicht auf (22. §. 26.),

$$3. \quad \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^{-q}}}{x^{p+1}} \partial x \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^q}}{x^{p+1}} \partial x = \frac{\pi}{q(q-p) \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p+q$ statt $p$ gesetzt und das Resultat mit (3.) verbunden, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (23. §. 29.),

$$4. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^q}}{x^{p+1}} \partial x = \frac{\pi}{q^2 \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p-q$ statt $p$ und $p+q$ statt $p$ gesetzt, so findet sich, mit Rücksicht auf (22. §. 26.),

$$5. \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+q+1}} \partial x \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{\pi}{q(p+q) \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p$ statt $p$ und $p+q$ statt $p$ gesetzt, so erhält man, mit Rücksicht auf (25. §. 26.),

$$6. \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q} \partial x}{x^{p+1}} \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x^q} \partial x = -\frac{\pi}{q^2 \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $-p-q$ statt $p$ gesetzt und das Resultat mit (3.) verbunden, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (26. §. 26.),

$$7. \quad \int_0 \frac{e^{-x^q}}{x^{p+q+1}} \partial x \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x = \frac{\pi}{p(p+q) \sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Wird in (3. §. 36.) $p+q$ statt $p$, $-q$ statt $q$, und dann $p-q$ statt $p$ gesetzt, so erhält man, mit Rücksicht auf (27. §. 26.),

$$8. \quad \int_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x^{-q}} \partial x \int_0^\infty \frac{x^p}{x^{q+1}} e^{-x^q} \partial x = \frac{q}{p(p+q)(q-p)} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

So wurden hier aus den Gleichungen des vorigen Paragraphs und aus den Gleichungen (20. bis 27. §. 26) acht Relationen abgeleitet. Benutzt man die Gleichungen (2., 3., 14. und 18. §. 36.), so lassen sich durch Einführung schicklicher Werthe für jede der genannten Formeln in (§. 26.) drei Gleichungen aufstellen, die, wegen der verschiedenen Entstehungsart, auf verschiedene Formen führen, aber im Allgemeinen häufig die nämlichen Resultate geben werden; wie sich dies in (4. und 6.) zeigte. Wendet man diese Bemerkung auf (21. §. 26.) an, so erhält man aus (3. und 14., 14. und 18. §. 36.) folgende Relationen:

$$9. \quad \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}} \partial x = -\frac{\pi}{pq \sin\frac{p}{q}\pi},$$

$$10. \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}}{x^{p+1}} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^{-q}}}{x^{p+1}} \partial x = \frac{\pi}{pq \sin\frac{p}{q}\pi}.$$

In (1., 9. und 10.) ist die Form verschieden, der Inhalt gleich. Man kann endlich auch dadurch noch mehr Mannigfaltigkeit in diese Relationen bringen, dass man bei den Ableitungen das nachstehende Integral benutzt:

$$11. \quad \int_0^\infty x^{tp-1} e^{-x^{tq}} \partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{tp} = \frac{1}{t}\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x^q} \partial x.$$

Eine etwas allgemeinere, hieher gehörige Relation ergiebt sich aus (25. §. 36.), nämlich:

$$12. \quad \int_0^\infty x^{mq+n-1} e^{-x^q} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^q}\partial x}{x^{mq+n-1}} = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{q(n+qm)\sin\frac{n}{q}\pi}.$$

Eine Reihe solcher Relationen lassen sich aus der Gleichung (4. §. 36.) und aus den Gleichungen (20. bis 27. §. 26.) finden. Sie sollen hier bloss zusammengestellt werden, da ihre Ableitung nach der eben angegebenen Methode keine weitere Schwierigkeit hat. Es sind folgende:

$$13. \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p}\, e^{-x}}{x} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi},$$

14. $$\int_0^\infty \sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x} \partial x \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-x} \partial x}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{p\pi}{q \cdot \sin \frac{p}{q} \pi},$$

15. $$\int_0^\infty \frac{x \cdot e^{-x} \partial x}{\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x}}{x} = \frac{q-p}{q} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi},$$

16. $$\int_0^\infty \frac{x \cdot e^{-x} \partial x}{\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x} \partial x = \frac{p(q-p)}{q^2} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi},$$

17. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \partial x}{x \sqrt[q]{x}} \int_0^\infty x \sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x} \partial x = -\frac{p+q}{q} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi},$$

18. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \partial x}{\sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty x \sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x} \partial x = \frac{p(p+q)}{q^2} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi},$$

19. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \partial x}{x \sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x} \partial x = -\frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi},$$

20. $$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \partial x}{x \sqrt[q]{x^p}} \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p} \cdot e^{-x} \partial x}{x} = -\frac{q}{p} \frac{\pi}{\sin \frac{p}{q} \pi}.$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man aus (§. 36. und §. 27.) folgende Relationen:

21. $$\int_0^\infty \frac{x^{2p} e^{-x^{2q}}}{x^{q+1}} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^{2q}} \partial x}{x^{2p+q+1}} = \frac{\pi}{(q^2-4p^2) \cos \frac{p}{q} \pi},$$

22. $$\int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{2q}} \partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x^{2q}} \partial x}{x^{2p+q+1}} = -\frac{\pi}{2q(q+2p) \cos \frac{p}{q} \pi},$$

23. $$\int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{2q}} \partial x \int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{-2q}} \partial x = \frac{\pi}{2q(2p+q) \cos \frac{p}{q} \pi},$$

24. $$\int_0^\infty \frac{x^{2p} e^{-x^{2q}} \partial x}{x^{q+1}} \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^{2q}} \partial x}{x^{2p+1}} = \frac{\pi}{2q(2p-q) \cos \frac{p}{q} \pi};$$

25. $$\int_0^\infty x^{2p+q-1} e^{-x^{2q}} \partial x \int_0^\infty \frac{x^q e^{-x^{2q}} \partial x}{x^{2p+1}} = \frac{\pi}{4q^2 \cos \frac{p}{q} \pi},$$

26. $$\int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p}\, e^{-x} \partial x}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-x} \partial x}{\sqrt[q]{x^p} \sqrt{x}} = \frac{\pi}{\cos \frac{p}{q} \pi},$$

$$27.\quad \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p}.\sqrt{x}\,e^{-x}\partial x \int_0^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{\sqrt[q]{x^p}\sqrt{x}} = \frac{q+2p}{2q}\,\frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi},$$

$$28.\quad \int_0^\infty \frac{\sqrt[q]{x^p}e^{-x}\partial x}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}.e^{-x}\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{q-2p}{2q}\,\frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi},$$

$$29.\quad \int_0^\infty \sqrt[q]{x^p}\sqrt{x}\,e^{-x}\partial x \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,e^{-x}\partial x}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{q^2-4p^2}{4q^2}\,\frac{\pi}{\cos\frac{p}{q}\pi}$$

u. s. w. Auch auf Tangenten lassen sich diese Beziehungen ausdehnen. Sie werden dann etwas zusammengesetzter.

*Legendre* hat das Integral $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x$, welches in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen betrachtet wurde, nicht behandelt, sondern nur bemerkt (Exerc. d. c. calc. intégr. T. I. pg. 300. und 301.), dass man dasselbe auf Facultäten (fonctions $\Gamma$) zurückführen könne. Er bringt es auf die von ihm genannten *Euler*'schen Integrale zweiter Art und stellt es in der speciellen Form $\int_0^\infty e^{-x^q}\partial x$ (5. §. 36.) dar, indem er behauptet, dass es durchaus nichts an seiner Allgemeinheit verliere, wenn es unter dieser speciellen Form betrachtet wird. Es lässt sich nun leicht das Integral $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x$ auf die Form $\int_0^\infty e^{-x^m}\partial x$ bringen, wenn man $\frac{q}{p}$ statt $q$ in (5. §. 36.) setzt. Hiedurch und aus (3. §. 36.) erhält man folgende Reductionsformel:

$$30.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^{\frac{q}{p}}}\partial x = \frac{1}{p}.1^{\frac{p}{q}|1}.$$

Eine zweite Reductionsformel ergiebt sich unmittelbar aus (35. §. 36.), nämlich:

$$31.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{p}\int_0^\infty \sqrt[q]{x^p}\,e^{-x}\partial x;$$

wie denn auch

$$32.\quad \int_0^\infty e^{-x^{\frac{q}{p}}}\partial x = \int_0^\infty e^{-x}\sqrt[q]{x^p}\,\partial x$$

ist. Nun hat *Legendre* weiter folgende Reductionsformel angegeben:

$$33.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \int_0^\infty \frac{q}{p}.e^{-x^{\frac{p}{q}}}\partial x.$$

Sie ist unrichtig, wie sich selbst aus der von ihm angegebenen Reductionsmethode zeigen lässt. Setzt man nämlich $\frac{q}{p}$ statt $q$, $z = x^p$ in $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x$, so ist $x = z^{\frac{1}{p}}$, $\partial x = \frac{1}{p}.z^{\frac{1}{p}-1}\partial z$, $x^{p-1} = z^{1-\frac{1}{p}}$, $x^q = z^{\frac{q}{p}}$ und man erhält

$$34.\quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-z^{\frac{q}{p}}}\partial z.$$

Diese Gleichung stimmt mit (30.), aber nicht mit der von *Legendre* gegebenen (33.) überein. Was *Legendre* behauptet, dass allgemein

$$\int_0^\infty e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)$$

sei, ist insofern richtig, als die vorstehende Gleichung in dieser Form allgemeine Gültigkeit hat, unrichtig aber insofern, als hiedurch und durch seine Reductionsformel das hier in Frage stehende allgemeine Integral nicht repräsentirt wird. Dass das fragliche Integral auf Facultäten zurückgebracht werden kann, hat keinen Zweifel: dass es aber auch besondere Eigenthümlichkeiten darbietet, die Beachtung verdienen, dürfte sich aus den Mittheilungen dieses und des vorhergehenden Paragraps ergeben.

Da *Legendre* eine Facultät, deren Exponent ein ächter positiver Bruch ist, direct nicht bezeichnen kann, so muss er es indirect thun, und sie umformen. Dies geschieht auch in dem vorliegenden Falle. Die Umformung ist

$$1^{\frac{1}{q}|1} = 1^{\frac{1}{q}-1+1|1} = \frac{1}{q}.1^{\frac{1}{q}-1|1} = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right).$$

Das fragliche Integral kann daher nicht mehr in der ursprünglichen Gestalt bleiben, sondern muss in eine andere umgeformt werden. Dies führt zu folgender, von *Legendre* weiter angegebenen Reductions-Formel, die sich aus (14. §. 33.) leicht rechtfertigen lässt, nämlich zu der Formel:

$$35. \quad \int_0^\infty e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{q}\int_0^1 \partial x\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{q}.1^{\frac{1}{q}-1|1} = \frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) = {}^{\frac{1}{q}|1}.$$

Einfacher hätte *Legendre* das Integral auf folgende Weise darstellen können:

$$36. \quad \int_0^\infty e^{-x^q} = \Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right) = 1^{\frac{1}{q}|1}.$$

Eine Reduction dieses Integrals auf ein *Euler*'sches von der zweiten Art, in der ursprünglichen Form, ist

$$37. \quad \int_0^\infty e^{-x^q} = \int_0^1\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{q}}\partial x = 1^{\frac{1}{q}|1}.$$

Die Reduction des allgemeinen Integrals (1. §. 36.), im Sinne *Legendre*'s auf ein *Euler*'sches von der zweiten Art, ist:

$$38. \quad \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x^q}\partial x = \frac{1}{p}\int_0^1\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}}\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}}{p} = \frac{1}{p}\Gamma\left(1+\frac{p}{q}\right).$$

*Legendre* giebt a. a. O. eine Notiz über die Geschichte des fraglichen Integrals, indem er sagt: „Il n'est pas inutile pour l'histoire de la science, „d'observer que l'intégrale $\int\partial x\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$ que l'on trouve §. 28. du mémoire

„d'*Euler,* imprimé dans le tom. XVI. de Novi Comm. Petrop., avait été donné „long-temps auparavant par le même auteur, dans le tom. V. des anciens mé„moires de Petersbourg, pg. 44. C'est donc à cette époque que remonte la „découverte de l'integrale $\int_0^\infty e^{-xx}\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, puisque la simple substitution „$e^{-xx} = z$ suffit pour ramener l'intégrale $\int_0^\infty e^{-xx}\,\partial x$ à la forme $\frac{1}{2}\int_0^1 \partial z (\lg \frac{1}{z})^{-\frac{1}{2}}$."

*Kramp* hat (Anal. d. réfr. pg. 64.) die Gleichungen (3., 4., 12., 13., 19) und specielle Fälle von (28. bis 30. §. 36. und 11. dieses Paragraphs) gegeben.

## §. 38.

Es lässt sich nun das Integral (3. §. 33.) einer näheren Betrachtung unterwerfen und es lassen sich leicht allgemeinere Relationen für Integrale dieser Art finden. Dabei ergeben sich vier Formen, die in folgendem Ausdruck begriffen sind:

$$\int_0^1 x^{p \pm tq - 1}\,\partial x (1 - x^q)^{\frac{n}{m} \pm r}.$$

Hier sind $t$ und $r$ ganze Zahlen. Auch $p$ und $n$ können negativ genommen werden. Die besondern Fälle werden sich leicht aus den allgemeinen Gleichungen ableiten lassen. Der Fall, wenn $t$ und $r$ positiv sind, soll zuerst betrachtet werden. Man erhält sofort aus (1. §. 30.)

$$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}+t|1} . 1^{\frac{n}{m}+r|1}}{(p+tq)1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+t+r|1}}.$$

Trennt man die Facultäten, so ergiebt sich

$$1. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{1}{p+tq} \cdot \frac{(m+n)^{r|m}(q+p)^{t|q} . q^r . m^t}{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}} . 1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Es lässt sich in diese Gleichung das Integral nach (3. §. 33.) einführen. Dies giebt folgende Reductionsformel:

$$2. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{(n+m)^{r|m}(p+q)^{t|q} q^r . m^t}{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}} \cdot \frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{n}{m})^{r|1} . 1+\frac{p}{q})^{t|1}}{(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{r+t|1}} \cdot \frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Wird hierin $r = t$ gesetzt, so erhält man

$$3.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = \frac{(n+m)^{t|m}(p+q)^{t|q}q^t.m^t}{(pm+qn+qm)^{2t|qm}}\cdot\frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$

$$= \frac{(n+m)^{t|m}(p+q)^{t|q}q^t m^t}{(pm+qn+qm)^{2t|qm}}\cdot\frac{1}{p+tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Werden hier $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$ vertauscht, so ergiebt sich

$$4.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t}\partial x = \frac{(p+q)^{t|q}(n+m)^{t|m}m^t.q^t}{(qn+pm+qm)^{2t|mq}}\cdot\frac{n}{n+tm}\cdot\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= \frac{(p+q)^{t|q}(n+m)^{t|m}m^t.q^t}{(qn+pm+qm)^{2t|mq}}\cdot\frac{1}{n+tm}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (3. und 4.) findet sich folgende bemerkenswerthe allgemeine Beziehung:

$$5.\quad (p+tq)\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = (n+tm)\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t}\partial x.$$

Setzt man $t=0$, so ergiebt sich ferner

$$6.\quad p\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x = n\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x.$$

Die Gleichung (6.), welche hier als ein specieller Fall einer allgemeinen erscheint, kann auch auf eine ganz einfache Weise aus (3. §. 33.) abgeleitet werden. Aus (3. und 4.) folgt ferner nachstehende Relation:

$$7.\quad \frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= \frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}+t}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Allgemeiner werden diese Relationen, wenn man in (2.) $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$ vertauscht. Dann ist aus (1. und 2.)

$$8.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x = \frac{(p+q)^{r|q}(n+m)^{t|m}m^r.q^t}{(nq+mp+mq)^{r+t|mq}}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{p}{q})^{r|1}(1+\frac{n}{m})^{t|1}}{(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{q})^{r+t|1}}\cdot\frac{1}{n+tm}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (1. und 8.) folgt nun

$$9.\quad \frac{p+tq}{(m+n)^{r|m}(q+p)^{r|q}q^r.m^t}\cdot\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x$$

$$= \frac{n+tm}{(p+q)^{r|q}(n+m)^{t|m}m^r.q^t}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x.$$

Aus (2. und 8.) folgt

$$10.\quad \frac{n(p+q)^{r|h}(n+m)^{t|m}m^r q^t}{n+tm}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$=\frac{p(n+m)^{r|m}(p+q)^{t|q}q^r m^t}{p+tq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}+r}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Setzt man $-t$ statt $t$ und $-r$ statt $r$ in (1. und 2.), so ergiebt sich in Rücksicht auf (§. 4.):

$$11.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x=\frac{(pm+qn)^{r+t|-qm}}{n^{r|-m}p^{t|-q}q^r m^t}\cdot\frac{p}{p-tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$

$$=\frac{\left(\frac{p}{q}+\frac{n}{m}\right)^{r+t|-1}}{\left(\frac{n}{m}\right)^{r|-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{t|-1}}\cdot\frac{1}{p-tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Werden hierin $\frac{p}{q}$ und $\frac{n}{m}$ vertauscht, so findet sich

$$12.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x=\frac{(nq+pm)^{r+t|-qm}}{p^{r|-q}n^{t|-m}m^r.q^t}\cdot\frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$=\frac{\left(\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r+t|-1}}{\left(\frac{p}{q}\right)^{r|-1}\left(\frac{n}{m}\right)^{t|-1}}\cdot\frac{1}{n-tm}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (11. und 12.) ergeben sich folgende Relationen:

$$13.\quad (p-tq)n^{r|-m}p^{t|-q}q^r m^t\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x$$

$$=(n-tm).p^{r|-q}n^{t|-m}.m^r.q^t\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x,$$

$$14.\quad \frac{n}{(n-tm)p^{r|-q}n^{t|-m}m^r q^t}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$=\frac{p}{(p-tq)n^{r|-m}p^{t|-q}q^r.m^t}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Für $r=t$ entsteht hieraus

$$15.\quad (p-tq)\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x=(n-tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-t}\partial x,$$

$$16.\quad \frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$

$$=\frac{p}{p-tq}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-t}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Wird $-r$ statt $r$ gesetzt, so ergiebt sich aus (1., 2. und 8.)

$$17. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$

$$= \frac{p}{p+tq} \cdot \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{-r+t|qm}.q^r} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}p}{p+tq} \cdot \frac{m^t(p+q)^{t|q}}{n(m-n)^{r-1|m}.q^r(pm+qn+qm)^{t-r|qm}} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{1}{p+tq} \cdot \frac{(1+\frac{p}{q})^{t|1}}{(\frac{n}{m})^{r|-1}(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{-r+t|1}} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}},$$

$$18. \quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x$$

$$= \frac{n}{n+tm} \cdot \frac{(n+m)^{t|m}q^t}{m^r p^{r|-q}(mp+mq+nq)^{-r+t|q}} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}.n}{n+tm} \cdot \frac{q^t(n+m)^{t|m}}{m^r p(q-p)^{r-1|q}(mp+qn+qm)^{-r+t|qm}} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{n}{m})^{t|1}}{(\frac{p}{q})^{r|-1}(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{q})^{-r+t|1}} \cdot \frac{1}{n+tm} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (17. und 18.) folgt

$$19. \quad (p+tq)\frac{n^{r|-m}q^r}{(p+q)^{t|q}m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x$$

$$= \frac{(n+tm).p^{r|-q}m^r}{(n+m)^{t|m}q^t}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x,$$

$$20. \quad \frac{p}{p+tq} \cdot \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{n^{r|-m}q^r}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{n}{n+tm} \cdot \frac{(n+m)^{t|m}.q^t}{p^{r|-q}m^r}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x.$$

Setzt man hierin $r=t$, so ergeben sich keine so einfachen Relationen, als diejenigen, welche in (5. und 6., 15. und 16.) erlangt wurden. Für $r=1$ und $t=0$ ist aus (19.)

$$21. \quad q\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\,\partial x = m\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\,\partial x.$$

Wird $-t$ statt $t$ in (1., 2. und 8.) gesetzt, so erhält man

$$22. \quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x$$

$$= \frac{p}{p-tq} \cdot \frac{(m+n)^{r|m}q^r}{p^{t|-q}m^t(pm+nq+qm)^{r-t|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{n}{m})^{r|1}}{(\frac{p}{q})^{t|-1}(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{r-t|1}} \cdot \frac{1}{p-tq} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}},$$

$$23.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x$$
$$= \frac{n}{n-tm}\cdot\frac{(p+q)^{r|q}.m^r}{n^{t|-m}\,q^t(nq+mp+mq)^{r-t|mq}}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x.$$

Aus (22. und 23.) ergiebt sich

$$24.\quad \frac{(p-tq)p^{t|-q}m^t}{(m+n)^{r|m}q^r}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{(n-tm).n^{t|-m}q^t}{(p+q)^{r|q}m^r}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x,$$

$$25.\quad \frac{n}{n-tm}\cdot\frac{(p+q)^{r|q}m^r}{n^{t|-m}q^t}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x.\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$\frac{p}{p-tq}\cdot\frac{(m+n)^{r|m}.q^r}{p^{t|-q}m^t}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Man ersieht leicht den Zusammenhang der hier aufgestellten allgemeinen Gleichungen. Jede von ihnen dient, die übrigen daraus abzuleiten. Die Entwicklung jedes einzelnen Falles hat jedoch ihre besondern Eigenthümlichkeit. Bringt man (2. und 17.) in Verbindung, so erhält man

$$26.\quad \frac{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}}{(m+n)^{r|m}q^r}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{t-r|qm}.q^r\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}.$$

Aus (2. und 22.) entsteht

$$27.\quad \frac{(p+tq)(pm+qn+qm)^{r+t|qm}}{(q+p)^{t|q}m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= (p-tq).p^{t|-q}m^t(pm+rq+qn)^{r-t|qm}\times\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}.$$

Aus (17. und 22.) ergiebt sich

$$28.\quad \frac{(p+tq)n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{t-r|qm}}{(p+q)^{t|q}m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x$$
$$= \frac{(p-tq).p^{t|-q}m^t(pm+nq+qm)^{r-t|qm}}{(m+n)^{r|m}.q^r}\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x.$$

Aus (17. und 23.) erhält man

$$29.\quad \frac{(p+tq)n^{r|-m}(pm+qn+qm)^{-r+t|qm}.q^r}{(p+q)^{t|q}m^t}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x$$
$$= \frac{(n-tm)n^{t|-m}(pm+qn+qm)^{r-t|qm}.q^t}{(p+q)^{r|q}m^r}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x$$

u. s. w. Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn $r=t$ gesetzt wird. Aus (29.) folgt in diesem Falle

$$30.\quad (p+tq)\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x = (n-tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+t}\partial x.$$

Alle diese Gleichungen gelten noch immer, wenn $p$ oder $n$ negativ gesetzt wird. So erhält man aus (2.)

$$31. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{(m-n)^{r|m}(p+q)^{t|q}q^r m^t}{(pm-qn+qm)^{r+t|qm}} \cdot \frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\partial x \quad \text{u. s. w.}$$

Man sieht, welche Mannigfaltigkeit in der Anwendung die hier entwickelten allgemeinen Gleichungen zulassen, und zu welchen bemerkenswerthen Resultaten sie führen. Man kann auch die Grössen $t$ und $r$ vertauschen. Aus (2.) ergiebt sich in diesem Falle

$$32. \quad \int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = \frac{(m+n)^{t|m}(p+q)^{r|q}q^t.m^r}{(pm+qn+qm)^{r+t|qm}} \cdot \frac{p}{p+rq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$
$$\doteq \frac{(1+\frac{n}{m})^{t|1}(1+\frac{p}{q})^{r|1}}{(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{r+t|1}} \cdot \frac{1}{p+rq} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Hieraus und aus (8.) findet sich

$$33. \quad (p+rq)\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = (n+tm)\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\partial x,$$

$$34. \quad \frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$= \frac{p}{p+rq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Werden in (11.) $r$ und $t$ vertauscht, so erhält man

$$35. \quad \int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\partial x = \frac{(pm+qn)^{t+r|-qm}}{n^{t|-m}p^{r|-q}q^t.m^r} \cdot \frac{p}{p-rq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$
$$= \frac{\left(\frac{p}{q}+\frac{n}{m}\right)^{t+r|-1}}{\left(\frac{n}{m}\right)^{t|-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{r|-1}} \cdot \frac{1}{p-rq} \cdot \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Hieraus und aus (12.) ergiebt sich

$$36. \quad (p-rq)\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\partial x = (n-tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x,$$

$$37. \quad \frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x$$
$$= \frac{p}{p-rq}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\partial x.\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Werden in (17.) $t$ und $r$ vertauscht, so erhält man

$$38.\quad \int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\,\partial x$$

$$= \frac{p}{p-rq}\cdot\frac{(p+q)^{r|q}\,m^r}{q^r\,.\,n^{t|-m}\,(pm+qn+qm)^{-t+r|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{p}{q})^{r|1}}{(\frac{n}{m})^{t|-1}(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{-t+r|1}}\cdot\frac{1}{p+rq}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Hieraus und aus (**23.**) folgt

$$39.\quad (p+rq)\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\,\partial x = (n+tm)\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\,\partial x,$$

$$40.\quad \frac{n}{n-tm}\int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-t}\,\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x$$

$$= \frac{p}{p+rq}\int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+r}\,\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Werden in (**22.**) $t$ und $r$ vertauscht, so erhält man

$$41.\quad \int_0^1 x^{p+rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\,\partial x$$

$$= \frac{p}{p-rq}\cdot\frac{(m+n)^{t|m}\,q^t}{p^{r|-q}\,m^r\,(pm+qn+qm)^{t-r|qm}}\int_8^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(1+\frac{n}{m})^{t|1}}{(\frac{p}{q})^{r|-1}\,(1+\frac{p}{q}+\frac{n}{m})^{t-r|1}}\cdot\frac{1}{p-rq}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{\frac{p}{q}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Hieraus und aus (**18.**) ergiebt sich

$$42.\quad (p-rq)\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\,\partial x = (n+tm)\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x,$$

$$43.\quad \frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{p-rq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+t}\,\partial x\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\,\partial x$$

$$= \frac{p}{p-rq}\int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-r}\,\partial x\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Auch in diesen Formeln können $p$ und $n$ negativ sein.

Die in diesem Paragraph entwickelten Gleichungen enthalten bemerkenswerthe Gesetze, und zeigen, dass diese Integrale eine besondere Art symmetrischer Functionen sind, in welchen die Grössen $\frac{p}{q}$, $t$ und $\frac{n}{m}$, $r$ theils einzeln, theils insgesammt, nach den angegebenen Relationen vertauscht werden können.

## §. 39.

Es lassen sich noch andere allgemeine und nicht minder bemerkenswerthe Relationen für die bisher betrachteten Integrale finden. Aus (**3.** §. **33.**) ist

$$1.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x = \frac{1}{p}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{n|1}}{1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Wird in (1.) $nq+q$ statt $p$ und $\frac{p}{q}-1$ statt $n$ gesetzt, so erhält man

$$\int_0^1 x^{nq+q-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}-1}\,\partial x = \frac{1^{n+1|1}.1^{\frac{p}{q}-1|1}}{(n+1)q.1^{n+\frac{p}{q}|1}} = \frac{1^{n|1}.1^{\frac{p}{q}-1|1}}{q.1^{n+\frac{p}{q}|1}}.$$

Nun ist $1^{\frac{p}{q}-1|1} = \frac{q}{p}.1^{\frac{p}{q}|1}$. Wird dieser Werth in die vorstehende Gleichung gesetzt, so ergiebt sich

$$2.\quad \int_0^1 x^{nq+q-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}-1}\,\partial x = \frac{1^{n|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{p.1^{n+\frac{p}{q}|1}}.$$

Aus (1. und 2.) ergiebt sich folgende Relation:

$$3.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x = \int_0^1 x^{(n+1)q-1}(1-x^q)^{\frac{p}{q}-1}\,\partial x.$$

Hier kann $n$ eine ganze, gebrochene positive, oder gebrochene negative Zahl sein. Ist $n$ eine ganze negative Zahl, so wird der Werth des Integrals nach (§. 4.) unendlich gross.

Wird in (1.) $p+nq$ statt $p$ und $-\frac{p}{q}$ statt $n$ gesetzt, so erhält man

$$4.\quad \int_0^1 x^{p+nq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}+n|1}.1^{-\frac{p}{q}|1}}{(p+nq).1^{n|1}}.$$

Werden (1. und 4.) verbunden, so erhält man die Gleichung

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x \int_0^1 x^{p+nq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,\partial x = \frac{1}{p+nq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{-\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Nun ist

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{-\frac{p}{q}|1}}{p}.$$

Durch Einführung dieses Werths in obige Gleichung ergiebt sich folgende sehr allgemeine Relation:

$$5.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\,\partial x \int_0^1 x^{p+nq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,\partial x$$
$$= \frac{1}{p+nq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\,\partial x.$$

In diesem Ausdruck kann $n$ jeden Werth haben, also eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein. Setzt man hierin ferner $p+tq$ statt $p$ und $\frac{n}{m}+r$ statt $n$, so erhält man

$$6.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+rq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t}\partial x$$

$$= \frac{1}{p+tq+\frac{nq}{m}+rq}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t} = \frac{1^{\frac{p}{q}+t}.1^{-\frac{p}{q}-t}}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}+rq)}.$$

Aus (17. §. 38.) ergiebt sich für $\frac{n}{m}=-\frac{p}{q}$ und $r=t$, wenn die nöthigen Reductionen gemacht werden:

$$7.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t} = \frac{p}{p+tq}\cdot\frac{(p+q)^{t|q}}{(-p)^{t|-q}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x$$

$$= (-1)^t\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x.$$

Demnach geht (6.) in

$$8.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+rq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t}\partial x$$

$$= (-1)^t\frac{1}{p+tq+\frac{nq}{m}+rq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x$$

über. Das Doppel-Integral in (8.) kann auf folgende Weise eine Abänderung erleiden. Es ist

$$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{1}{p+tq}\cdot 1^{\frac{p}{q}+t|1}.1^{\frac{n}{m}+r|1}$$

$$\int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+qr-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = \frac{1}{p+tq+\frac{nq}{m}+qr}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}+t+\frac{n}{m}+r|1}.1^{-\frac{n}{m}-r|1}}{1^{\frac{p}{q}+t}}.$$

Die Verbindung beider Gleichungen führt zu folgender:

$$9.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+qr-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x$$

$$= \frac{1^{\frac{n}{m}+r|1}.1^{-\frac{n}{m}-r|1}}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}+qr)} = \frac{n+rm}{(p+tq)(p+tq+\frac{n}{m}q+qr)}\int_0^1 x^{n+rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}.$$

Da nun aus (7.) die Gleichung

$$10.\quad \int_0^1 x^{n+rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = (-1)^r\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x$$

folgt, so erhält man aus (9. und 10.)

$$11.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}+qr-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n+rm)}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}+qr)}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

Auf ganz gleiche Weise erhält man die Gleichungen

$$12.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{p}{q}-t}\partial x$$
$$= \frac{1^{\frac{p}{q}+t|1}\,1^{-\frac{p}{q}-t|1}}{(p+tq)(n+rm+\frac{pm}{q}+tm)} = \frac{1}{n+rm+\frac{pm}{q}+tm}\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}-t}\partial x,$$

$$13.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{p}{q}-t}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^t}{(n+rm+\frac{pm}{q}+tm)}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x,$$

$$14.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x$$
$$= \frac{1}{(p+tq)(n+rm+\frac{mp}{q}+tm)}\,.\,1^{\frac{n}{m}+r|1}\,1^{-\frac{n}{m}-r|1}\partial x$$
$$= \frac{(n+rm)}{(p+tq)(n+rm+\frac{mp}{q}+tm)}\int_0^1 x^{n+mr-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x,$$

$$15.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n+rm)}{(p+tq)(n+rm+\frac{mp}{q}+tm)}\,.\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

In allen diesen Gleichungen kann auch $-t$ statt $t$, oder $-r$ statt $r$ gesetzt werden. Dies bestätigt sich dadurch, dass man die nämlichen Resultate findet, wenn die angegebenen Substitutionen in den nicht entwickelten Gleichungen und dann die nöthigen Entwicklungen gemacht werden. Dies giebt folgende Ausdrücke:

$$16.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{p-tq+\frac{nq}{m}+rq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}+t}\partial x$$
$$= \frac{1}{p-tq+\frac{nq}{m}+rq}\int_0^1 x^{p-tq}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}+t}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^t 1}{p-tq+\frac{nq}{m}+rq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x,$$

17. $$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x \int_0^1 x^{p+tq+\frac{nq}{m}-rq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{n-rm}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}-qr)} \int_0^1 x^{n-rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n-rm)}{(p+tq)(p+tq+\frac{nq}{m}-qr)} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x,$$

18. $$\int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x \int_0^1 x^{n+rm+\frac{mp}{q}-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{p}{q}+t}\partial x$$
$$= \frac{1}{n+rm+\frac{pm}{q}-tm} \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}+t}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^t.1}{n+rm+\frac{pm}{q}-tm} \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{p}{q}}\partial x,$$

19. $$\int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x \int_0^1 x^{n-rm+\frac{mp}{q}+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{n-rm}{(p+tq)(n-rm+\frac{mp}{q}+tm)} \int_0^1 x^{n-rm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x$$
$$= \frac{(-1)^r(n-rm)}{(p+tq)(n-rm+\frac{mp}{q}+tm)} \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

Setzt man in (1.) $p+nk$, so erhält man

20. $$\int_0^1 x^{p-1}(x^k-x^{k+q})^n\partial x = \frac{1^{\frac{p+nk}{q}|1}\,1^{n|1}}{(p+nk)\,1^{\frac{p+nk}{q}+n|1}}.$$

Wird in dieser Gleichung $p=sm$, $q=m$, $n=\frac{n}{m}$ und $km$ statt $k$ gesetzt, so geht sie in folgende über:

21. $$\int_0^1 x^{sm-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(m+nk)^{s|m}}{(sm+nk)(m+(k+1)n)^{s|m}}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}k|1}\,1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{(k+1)\frac{n}{m}|1}}.$$

Da nun $\dfrac{1^{\frac{n}{m}k|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{nk\,1^{\frac{n}{m}(k+1)|1}} = \int_0^1(1-x^m)^{\frac{n}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x$ ist, so erhält man aus (21.) auch

22. $$\int_0^1 x^{sm-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(m+nk)^{s|m}nk}{(sm+nk)(m+(k+1)n)^{s|m}}\int_0^1\frac{(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\partial x}{x}.$$

Setzt man in (21. und 22.) $-n$ statt $n$, so wird

$$23.\quad \int_0^1 x^{sm-1}(x^{km}-x^{(k+1)m})^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(m+nk)^{s|m}}{(sm+nk)(m+(k+1)n)^{s|m}}\cdot\frac{1^{-\frac{nk}{m}}\,1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-(k+1)\frac{n}{m}|1}}$$
$$= -\frac{(m-nk)^{s|m}\,nk}{(sm-nk)(m-(k+1)n)^{s|m}}\int_0^1\frac{\partial x}{x(x^{km}-x^{km+m})^{\frac{n}{m}}}.$$

## §. 40.

Aus den in den beiden vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen lassen sich leicht noch viele andere ableiten. Setzt man $t=r$, $-n$ statt $n$, $\frac{n}{m}$ statt $\frac{p}{q}$, so wird aus (2. §. 38.)

$$1.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{(m-n)^{t|m}(m+n)^{t|m}}{m^{2t}.\,1^{2t|1}}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$
$$= \frac{(m^2-n^2)(2^2m^2-n^2)(3^2m^2-n^2)\ldots(t^2m^2-n^2)}{m.2m.3m\ldots(2t-1)m.2tm}\;\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Aus (11. §. 38.) wird

$$2.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-t}\,\partial x = 0.$$

Diese Gleichung gilt für $t=0$. In diesem Falle ist nach (1. §. 39.)

$$3.\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{n}.$$

Aus (17. und 22. §. 38.) ist unter den nämlichen Voraussetzungen:

$$4.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-t}\,\partial x = (-1)^t\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x,$$
$$5.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+t}\,\partial x = (-1)^t\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Aus (4. und 5.) ergiebt sich folgende bemerkenswerthe Relation:

$$6.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-t}\,\partial x = \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+t}\,\partial x.$$

Aus (4. und 5.) ist, wenn $t$ eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet:

$$7.\quad \int_0^1 x^{n+2tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-2t}\,\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x,$$
$$8.\quad \int_0^1 x^{n-2tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+2t}\,\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x,$$
$$9.\quad \int_0^1 x^{n+(2t+1)m-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-2t-1}\,\partial x = -\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x,$$
$$10.\quad \int_0^1 x^{n-(2t+1)m-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-2t-1}\,\partial x = -\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Wird $t=0$ gesetzt, so entsteht aus (1. oder 2. und 17. §. 38.)

$$11. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{(n+m)^{r|m}.q^r}{(pm+qn+qm)^{r|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{p.1^{\frac{p}{m}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(n+m)^{r|m}q^r}{(pm+qn+qm)^{r|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x,$$

$$12. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\partial x = \frac{(pm+nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|-m}} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{p}{q}|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(pm+nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|-m}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x.$$

Für $t=0$ und $-n$ statt $n$ entsteht aus (**11.** und **12.**)

$$13. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\partial x = \frac{(-n+m)^{r|m}.q^r}{(pm-qn+qm)^{r|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{p.1^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(-n+m)^{r|m}q^r}{(pm-qn+qm)^{r|qm}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\partial x,$$

$$14. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = (-1)^r\frac{(pm-nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|+m}} \cdot \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{p.1^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}}$$

$$= (-1)^r\frac{(pm-nq)^{r|-qm}}{q^r n^{r|m}}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\partial x.$$

Aus (**13.** und **14.**) entsteht, wenn $\frac{n}{m}$ statt $\frac{p}{q}$ gesetzt wird:

$$15. \quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}+r} = \frac{(-n+m)^{r|m}}{1^{r|1}m^r}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x$$

$$= \frac{(-n+m)^{r|m}}{m^{r|m}} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{n},$$

$$16. \quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}-r}\partial x = 0.$$

Diese Gleichung gilt, so lange $r > 0$ ist.

Wird $r=0$ gesetzt, so entsteht aus (**1.** oder **2.** und **11. §. 38.**)

$$17. \quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm+qn+qm)^{t|qm}} \cdot \frac{p}{p+tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x$$

$$= \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm+qn+qm)^{t|qm}}\,\frac{1}{p+tq}\,\frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}},$$

$$18.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(pm+qn)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\cdot\frac{1}{p-tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(pm+qn)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\cdot\frac{1}{p-tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,.\,1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}}.$$

Die Gleichungen (17. und 18.) gehen, wenn $-n$ statt $n$ gesetzt wird, in folgende über:

$$19.\quad \int_0^1 x^{p+tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm-qn+qm)^{t|qm}}\cdot\frac{p}{p+tq}\cdot\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(p+q)^{t|q}m^t}{(pm-qn+qm)^{t|qm}}\cdot\frac{1}{p+tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}},$$

$$20.\quad \int_0^1 x^{p-tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(pm-qm)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\cdot\frac{p}{p-tq}\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(pm-qm)^{t|-qm}}{p^{t|-q}m^t}\cdot\frac{1}{p+tq}\cdot\frac{1^{\frac{p}{q}|1}\,1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}-\frac{n}{m}|1}}.$$

Aus (19. und 20.) erhält man für $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$:

$$21.\quad \int_0^1 x^{n+tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(n+m)^{t|m}}{m^{t|m}}\cdot\frac{n}{n+tm}\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x$$

$$= \frac{(n+m)^{t|m}}{m^{t|m}}\,\frac{1}{n+tm}\,.\,1^{\frac{n}{m}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}|1}.$$

$$22.\quad \int_0^1 x^{n-tm-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = 0.$$

Diese Gleichung gilt für $t>0$. Setzt man $p=0$ und dann $p=1$, so erhält man aus (17. und 19.)

$$23.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{m^{t|m}}{tq(n+m)^{t|m}} = \frac{m.2m.3m\ldots.tm}{tq(n+m)(n+2m)\ldots.(n+tm)},$$

$$24.\quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(q+1)^{t|q}m^t}{(1+tq)(m+qn+mq)^{t|qm}}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,.\,1^{\frac{1}{q}|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{q}|1}}$$

$$= \frac{(q+1)^{t|q}m^t}{(1+tq)(m+qn+mq)^{t|qm}}\int_0^1(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x,$$

$$25.\quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{m^{t|m}}{tq(m-n)^{t|m}} = \frac{m.2m.3m\ldots.tm}{tq(-n+m)(-n+2m)\ldots.(-n+tm)},$$

$$26. \quad \int_0^1 x^{tq}(1-x_q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x = \frac{(1+q)^{t|q}m^t}{(1+tq)\,(m-qn+mq^{t|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{1}{q}|1}\;1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{q}|1}}$$

$$\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{(1+tq)\,(m-qn+mq)^{t|qm}} \cdot \int_0^1 \frac{\partial x}{(1-x^q)^{\frac{n}{m}}}.$$

Für $p = 0$ und $p = 1$ wird aus (1. §. 38.)

$$27. \quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{(m+n)^{r|m}m^{t|m}}{tq\,(m+n)^{r+t|m}},$$

$$28. \quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{(m+n)^{r|m}(1+q)^{t|q}.q^r.m^t}{(1+tq)\,(m+qn+qm)^{r+t|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\;1^{\frac{1}{q}|1}}{1^{\frac{1}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(m+n)^{r|m}(1+q)^{t|q}q^r m^t}{(1+tq)\,(m+qn+qm)^{r+t|qm}} \int_0^1 (1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Wird in (17. §. 38.) $p = 0$ und $p = 1$ gesetzt, so ergiebt sich

$$29. \quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x = \frac{m^{t|m}}{tq.n^{r|-m}.(m+n)^{-r+t|m}}$$

$$= (-1)^{r-1}\frac{m^{t|m}}{tq.n(m-n)^{r|m}(m+n)^{-r+t|m}},$$

$$30. \quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-r}\,\partial x = \frac{1}{1+tq}\,\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|-m}(m+qn+qm)^{-r+t}.q^r} \cdot \frac{1^{\frac{1}{q}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{1}{q}+\frac{n}{m}|1}}$$

$$= \frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|-m}(m+qn+qm)^{-r+t|qm}qr} \int_0^1 (1-x^q)^{\frac{n}{m}}\,\partial x.$$

Aus (27. bis 30.) wird, wenn man $-n$ statt $n$ setzt:

$$31. \quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{1}{tq}\,\frac{(m-n)^{r|m}m^{t|m}}{(m-n)^{r+t|m}},$$

$$32. \quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}+r}\,\partial x = \frac{1}{1+tq}\cdot\frac{(m-n)^{r|m}(1+q)^{t|q}q^r m^t}{(m-qn+qm)^{r+t|qm}},$$

$$33. \quad \int_0^1 x^{tq-1}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x = (-1)^r\frac{1}{tq}\,\frac{m^{t|m}}{n^{r|m}(m-n)^{t-r|m}},$$

$$34. \quad \int_0^1 x^{tq}(1-x^q)^{-\frac{n}{m}-r}\,\partial x = (-1)^r\frac{1}{1+tq}\,\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|m}q^r(m-qn+qm)^{-r+t|qm}} \cdot \frac{1^{\frac{1}{q}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{1}{q}-\frac{n}{m}|1}}$$

$$= (-1)^r\frac{1}{1+tq}\,\frac{(1+q)^{t|q}m^t}{n^{r|m}q^r(m-qn+qm)^{-r+t|qm}} \int_0^1 (1-x^q)^{-\frac{n}{m}}\,\partial x \quad \text{u. s. w.}$$

Geht man auf noch speciellere Fälle über, so erhält man aus (23., 24., 27. und 28.), wenn $q = 2$ und $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$35. \quad \int_0^1 x^{2t-1}\partial x\sqrt{(1-x^2)} = \frac{2^{t-1|2}}{3^{t|2}},$$

$$36.\quad \int_0^1 x^{2t}\partial x\sqrt{(1-x^2)} = \frac{3^{t-1|2}}{4^{t|2}}\cdot\tfrac{1}{4}\pi,$$

$$37.\quad \int_0^1 x^{2t-1}\partial x(1-x^2)^{\frac{1}{2}+r} = \frac{3^{r|2}.2^{t-1|2}}{3^{r+t|2}} = \frac{2^{t-1|2}}{(2r+1)^{t|2}},$$

$$38.\quad \int_0^1 x^{2t}\partial x(1-x^2)^{\frac{1}{2}+r} = \frac{3^{r|2}.3^{t-1|2}}{3^{r+t|2}}\cdot\tfrac{1}{4}\pi.$$

Aus (**25.**, **26.**, **29.** und **30.**) ist für die nämlichen Werthe:

$$39.\quad \int_0^1 \frac{x^{2t-1}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2^{t-1|2}}{1^{t|2}} = \frac{2.4.6....(2t-2)}{1.3.5....(2t-1)},$$

$$40.\quad \int_0^1 \frac{x^{2t}\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{3^{t-1|2}}{2^{t|2}}\,\tfrac{1}{2}\pi,$$

$$41.\quad \int_0^1 x^{2t-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-r}\partial x = (-1)^{r-1}\frac{2^{t|2}}{2t.1^{r-1|2}.3^{t-r|2}},$$

$$42.\quad \int_0^1 x^{2t}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-r}\partial x = (-1)^{r-1}\frac{3^{t-1|2}}{1^{r-1|2}.4^{t-r|2}}\,\tfrac{1}{4}\pi.$$

Aus (**31.** und **32.**) ergiebt sich für $q=2$ und $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$:

$$43.\quad \int_0^1 x^{2t-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+r}\partial x = \frac{1^{r|2}.2^{t-1|2}}{1^{r+t|2}},$$

$$44.\quad \int_0^1 x^{2t}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+r}\partial x = \frac{1^{t|2}.1^{r|2}.\pi}{1^{r+t|1}.2^{r+t+1}}.$$

Diese Ableitungen lassen sich leicht weiter fortsetzen. Specielle Fälle von den in (**35.**, **36.**, **37.**, **38.**) gegebenen Formeln hat *Euler* (Integr.-Rechnung 1ter Thl. §. **340.** u. ff.) aufgestellt, ohne jedoch das Gesetz, welches diese Fälle zunächst umschliesst, anzugeben. Er hat eine zurücklaufende Bildungsweise entwickelt.

Es sollen jetzt noch einige besondere Fälle zusammengestellt werden, aus welchen sich die Kürze und Bequemlichkeit der gegebenen Ableitungsmethode verdeutlichen wird.

Aus (**6.** und **21.** §. **38.**) ist

$$45.\quad p\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x = n\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}}\partial x,$$

$$46.\quad q\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = m\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}-1}\partial x.$$

Für $q=m$ wird hieraus

$$47.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{p}{m}-1}\partial x.$$

Für $p=n$ wird aus (**45.**)

$$48.\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{\frac{n}{q}}\partial x.$$

Aus (**30.** §. **38.**) erhält man für $t=1$:

49. $(p+q)\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^q)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \int_0^1 x^{n-m-1}(1-x^m)^{\frac{p}{q}+1}\partial x.$

Setzt man in dem Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{1}{p}\cdot\frac{1^{\frac{p}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{p}{m}+\frac{n}{m}-1|1}}$$

die Facultät $1^{\frac{p}{m}|1} = \frac{p}{m}.1^{\frac{p}{m}-1|1}$, so ergiebt sich nach (§. 13., 43. und 46.)

50. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{1}{m}\cdot\frac{1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{p+n}{m}-1|1}} = F\left(\frac{n}{m},\ \frac{p}{m}\right)$ u. s. w.

Die hier zusammengestellten Fälle sind, wie man sieht, sehr speciell. Die Gleichung (46.) ist von *Euler* (Integr.-Rechnung 1ter Thl. §. 369.) angegeben. Die Gleichungen (47. und 50.) hat auch *Legendre* (Exerc. de calc. intégr. Tom. I. Sect. II. Pg. 222. et 279.) behandelt; die Gleichung (50.) hat er insbesondere mit vieler Mühe gefunden. Dabei ist diese Gleichung nur ein besonderer Fall von (46.).

Ausser dem in (2.) angegebenen Integral führt auch $\int_0^1 \frac{(1-x^m)^{\frac{n}{m}-r}\partial x}{x^{n+tm+1}}$ auf 0, wenn $t < 0$ ist.

Aus (21. und 23. §. 39.) ergiebt sich für $k = 1$:

51. $\int_0^1 x^{sm-1}(x^m-x^{2m})^{\frac{n}{m}}\partial x = \frac{(m+n)^{s|m}}{(sm+n)(m+2n)^{s|m}}\cdot\frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{2n}{m}|1}},$

52. $\int_0^1 \frac{x^{sm-1}\partial x}{(x^m-x^{2m})^{\frac{n}{m}}} = \frac{(m-n)^{s|m}}{(sm-n)(m-2n)^{s|m}}\cdot\frac{1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{2n}{m}|1}}.$

Wird in (20. §. 39.) $p = sq$, $k = 2q$, $n = -\frac{1}{2}$ gesetzt, so erhält man

53. $\int_0^1 \frac{x^{sq-1}\partial x}{\sqrt{(x^{2q}-x^{3q})}} = \frac{2^{s-1|2}}{(s-1)q.1^{s-1|2}} = \frac{2.4.6\ldots.2(s-1)}{(s-1)q.1.3.5\ldots.(2s-3)}$

u. s. w. Specielle Fälle ergeben sich hieraus leicht.

## §. 41.

Das Integral $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x$ lässt sich wie folgt umformen und zu weitern Anwendungen benutzen. Setzt man nämlich

$$x = \frac{1}{\sqrt[q]{(1-z^q)}},$$

so wird

$$1-x^q = 1-\frac{1}{1+z^q} = \frac{z^q}{1+z^q}.$$

Nun ist

$$\partial x = \partial \frac{1}{\sqrt[q]{(1-x^q)}} = -\frac{z^{q-1}\partial z}{(1+z^q)^{\frac{1}{q}+1}}.$$

Werden die vorstehenden Ausdrücke in das Integral eingeführt, so erhält man, wenn man die Grenzen des umgeformten Integrals so bestimmt, dass dadurch die nämlichen Resultate beibehalten werden:

$$1.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x = -\int_0^1 \frac{z^{q(n+1)-1}\partial z}{(1+z^q)^{n+\frac{p}{q}+1}},$$

oder

$$2.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)\,\partial x = \int_0^1 \frac{z^{q(n+1)-1}\partial z}{(1+z^q)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Da unter der angegebenen Bedingung in dem Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen $x$ statt $z$ geschrieben werden kann, so lässt sich diese Gleichung auch so ausdrücken:

$$3.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x = \frac{x^{qu+q-1}\partial x}{(1+x^q)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Die Umformung dieses Integrals kann nun auch nach folgender allgemeineren Methode ausgeführt werden. Man setze

$$x = \frac{1}{(z^q-k+1)^{\frac{1}{q}}},$$

so ist

$$1 - x^q = \frac{z^q-k}{z^q-k+1} \quad \text{und} \quad x^{p-1} = \frac{1}{(z^q-k+1)^{\frac{p-1}{q}}},$$

$$\partial x = -\frac{z^{q-1}\partial z}{(z^q-k+1)^{1+\frac{1}{q}}}.$$

Werden diese Werthe eingeführt, so erhält man

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x = -\int_1 \frac{1}{(z^q-k+1)^{\frac{p-1}{q}}}\cdot\frac{(z^q-k)^n}{(z^q-k+1)^n}\cdot\frac{z^{q-1}\partial z}{(z^q-k+1)^{1+\frac{1}{q}}}.$$

Die Grenzen, zwischen welchen das Integral rechts genommen werden muss, um dem ursprünglichen zu genügen, sind $\infty$ und $\sqrt[q]{z}$. Man erhält daher

$$4.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x = -\int_\infty^{k^{\frac{1}{q}}} \frac{z^{q-1}(z^q-k)^n\partial z}{(z^q-k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}},$$

oder, da rechts $x$ statt $z$ geschrieben werden kann,

$$5.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x = \int_{k^{\frac{1}{q}}}^\infty \frac{x^{q-1}(x^q-k)^n\partial x}{(x^q-k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Wird hierin $-k$ statt $k$ gesetzt, so ergiebt sich

$$6. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \int_{-k^{\frac{1}{q}}}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q+k)^n \partial x}{(x^q+k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}}.$$

Die Gleichung (3.) ist ein besonderer Fall von (5.) oder (6.). Setzt man nämlich in (5.) oder (6.) $n=0$, so ergiebt sich (3.). Geht man auf den Werth des Integrals selbst zurück, so ist aus (5. und 6.)

$$7. \quad \int_{k^{\frac{1}{q}}}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q-k)^n \partial x}{(z^q-k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \int_{-k^{\frac{1}{q}}}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q+k)^n \partial x}{(x^q+k+1)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}\, 1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Da $k$ willkürlich ist, so ergiebt sich für $k=0$ und $k=1$:

$$8. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \int_0^{\infty} \frac{x^{qn+q-1}\partial x}{(1+x^q)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \frac{(x^q-1)^n \partial x}{x^{qn+p+1}},$$

$$= \int_{-1}^{\infty} \frac{x^{q-1}(x^q+1)^n \partial x}{(x^q+2)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}\, 1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Es können auf diese Ausdrücke alle die Resultate angewendet werden, welche im Vorhergehenden gefunden wurden; wobei denn die Entwicklungen in unendliche Factorenfolgen nicht ausgeschlossen sind.

Wir wenden uns nun zur Ableitung weiterer Gleichungen und legen hiebei folgenden Ausdruck aus (8.) zum Grunde:

$$9. \quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n \partial x = \int_0^{\infty} \frac{x^{qn+q-1}\partial x}{(1-x^q)^{n+\frac{p}{q}+1}} = \int_0^{\infty} \frac{(x^q-1)^n \partial x}{x^{qn+p-1}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}\, 1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}.$$

Wird hierin $q=m$, $p=n$ und $-\frac{n}{m}$ statt $n$ gesetzt, so erhält man

$$10. \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-n-1}\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{\partial x}{x(x^m-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}{n}.$$

Diese Gleichung geht in Rücksicht auf (21. §. 26.) in

$$11. \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-n-1}\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{\partial x}{x(x^m-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{m \sin\frac{n}{m}\pi}$$

über. Setzt man in (9.) $q=m$, $\frac{n-m}{m}$ statt $n$ und $-n$ statt $p$, so erhält man

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{(x^m-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x} = \frac{1^{-\frac{n}{m}+1|1}\, 1^{\frac{n}{m}-1|1}}{-n+m}.$$

Nach (22. §. 26.) wird hieraus

$$12. \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\partial x}{1+x^m} = \int_1^{\infty} \frac{(x^m-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x} = \frac{\pi}{m \sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (**11.** und **12.**) findet sich

$$13.\quad \int_0^\infty \frac{x^{m-n-1}\partial x}{1+x^m} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{1+x^m} = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$14.\quad \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(\ {}^m-1)^{\frac{n}{m}}} = \int_1^\infty (x^m-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Setzt man in (**9.**) $q=1$, so erhält man

$$15.\quad \int_0^\infty \frac{x^n\partial x}{(1+x)^{n+p+1}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^n\partial x}{x^{n+p+1}} = \frac{1^{p|1}1^{n|1}}{p.1^{p+n|1}} = \frac{1^{p-1|1}1^{n|1}}{1^{p+n|1}}.$$

Wird hierin $n-1$ statt $n$ und $p+1$ statt $p$ gesetzt, so ergiebt sich

$$16.\quad \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^{n+p+1}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^{n+p+1}} = \frac{1^{p|1}.1^{n-1|1}}{1^{p+n|1}}.$$

Wird in beide Formeln $\frac{n}{m}$ statt $n$ und $-\frac{n}{m}$ statt $p$ eingeführt, so ist in Rücksicht auf (**26.** und **20.** §. **26.**)

$$17.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{1+x} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$18.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{1+x} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird aber in (**15.** und **16.**) $-\frac{n}{m}$ statt $n$ und $\frac{n}{m}$ statt $p$ gesetzt, so erhält man

$$19.\quad \int_1^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

$$20.\quad \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}-1}} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Setzt man in (**15.**) $n+1$ statt $n$ und $p-1$ statt $p$, so ist

$$21.\quad \int_0^\infty \frac{x^{n+1}\partial x}{(1+x)^{n+p+1}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n+1}\partial x}{x^{n+p+1}} = \frac{1^{p-1|1}.1^{n+1|1}}{(p-1).1^{p+n|1}}.$$

Wird hierin $-\frac{n}{m}$ statt $n$ und $\frac{n}{m}$ statt $p$ eingeführt, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (**22.** §. **26.**):

$$22.\quad \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{1+x} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{u}{m}+1}\partial x}{x} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (17. bis 22.) ist

$$23.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{1+x}\partial x = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{x} = \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$24.\quad \int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}}\partial x}{1+x} = \int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}(1+x)} = \int_0^\infty \frac{x\,\partial x}{x^{\frac{n}{m}}(1+x)} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{\frac{n}{m}}\partial x}{x}$$

$$= \int_1^\infty \frac{\partial x}{x(x-1)^{\frac{n}{m}+1}} = \int_0^\infty \frac{(x-1)^{-\frac{n}{m}+1}\partial x}{x} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Man sieht, wie mannigfaltig die Ausdrücke sind, welche auf diesem Wege erlangt werden können.

Das Integral, aus welchem die eben gefundenen Gleichungen abgeleitet wurden, nämlich

$$25.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^n\partial x = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}.1^{n|1}}{p.1^{\frac{p}{q}+n|1}}$$

soll nun auf die nämliche Weise, wie so eben, behandelt werden. Es ergiebt sich für $\frac{p}{q}=\frac{n}{m}$ und $-\frac{n}{m}$ statt $n$ aus (25.), mit Rücksicht auf (21. §. 26.):

$$26.\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}\,1^{-\frac{n}{m}|1}}{n} = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird in (25.) $p=m-n$ und $n-m$ statt $n$ gesetzt, so erhält man in Rücksicht auf (22. §. 26.):

$$27.\quad \int_0^1 x^{m-n-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x = \frac{\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Aus (26. und 27.) ist

$$28.\quad \int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{-\frac{n}{m}}\partial x = \int_0^1 x^{m-n-1}(1-x^m)^{\frac{n}{m}-1}\partial x.$$

Wird $q=1$ gesetzt, so geht die Gleichung (25.) in

$$29.\quad \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^n\partial x = \frac{1^{p|1}\,1^{n|1}}{p.1^{p+n|1}} = \frac{1^{p-1|1}\,1^{n|1}}{1^{p+n|1}}$$

über. Je nachdem nun $p$ und $n$ angenommen wird, entstehen aus (29.) folgende Gleichungen:

30. $\int_0^1 x^p(1-x)^n \partial x = \frac{1^{p|1}1^{n|1}}{1^{p+n+1|1}}$,

31. $\int_0^1 x^p(1-x)^{n-1} \partial x = \frac{1^{p|1}1^{n-1|1}}{1^{p+n|1}}$,

32. $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{n-1} \partial x = \frac{1^{p-1|1}1^{n-1|1}}{1^{p+n-1|1}}$,

Nun können in den Gleichungen (**29.** bis **31.**) die Werthe $p$ und $n$ beliebig angenommen werden. Setzt man $\frac{n}{m}$ und $-\frac{n}{m}$ statt $p$, $-\frac{n}{m}$ und $\frac{n}{m}$ statt $n$, so ergeben sich folgende Gleichungen, wenn man auf (**20.** bis **27.** §. **26.**) Rücksicht nimmt:

33. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}} \partial x}{x(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$,

34. $\int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}} \partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}} = -\frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$,

35. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}} \partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \frac{n.\pi}{m \sin \frac{n}{m}\pi}$,

36. $\int_0^1 (\frac{1}{x}-1)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{n}{m} \frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$,

37. $\int_0^1 (\frac{1}{x}-1)\frac{\partial x}{1-x} = \frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$,

38. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}} \partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+1}} = -\frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$.

Aus (**33.** bis **38.**) ergiebt sich folgende Vergleichung:

39. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}} \partial x}{x(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \int_0^1 (\frac{1}{x}-1)\frac{\partial x}{1-x} = \frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$,

40. $\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}} \partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}}} = \int_0^1 (\frac{1}{x}-1)^{\frac{n}{m}} \partial x = \frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$,

41. $\int_0^1 \frac{(1-x)^{\frac{n}{m}} \partial x}{x^{\frac{n}{m}+1}} = \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}} \partial x}{(1-x)^{\frac{n}{m}+1}} = -\frac{\pi}{\sin \frac{n}{m}\pi}$.

Diese Gleichungen lassen sich mit (**23.**, **24.**, **26.**, **27.** und **28.**) vergleichen. Es ergeben sich daraus weitere Relationen zwischen diesen Integralen.

Die Gleichung (**32.**) lässt sich für $p+n=0$ nicht benutzen. Sie dient jedoch, eine weitere Ableitung zu gewinnen. Setzt man nämlich in (**15.**) $n-1$, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^{n+p}} = \frac{1^{p-1|1}\,1^{n-1|1}}{1^{p+n-1|1}}.$$

Werden hier $p$ und $n$ vertauscht, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{p-1}}{x^{n+p}}\partial x = \frac{1^{n-1|1}\,1^{p-1|1}}{1^{n+p-1|1}}.$$

Hieraus und aus (**32.**) ist

$$42.\quad \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\partial x}{(1+x)^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^{n+p}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{p-1}\partial x}{x^{n+p}}$$
$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{n-1}\partial x.$$

Setzt man $n+p=s$, so ist $p=s-n$ und man erhält aus dieser Gleichung

$$43.\quad \int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^s} = \int_0^\infty \frac{x^{s-n-1}\partial x}{(1+x)^s} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n-1}\partial x}{x^s} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{s-n-1}\partial x}{x^s}$$
$$= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{s-n-1}\partial x = \int_0^1 x^{s-n-1}(1-x)^{n-1}\partial x = \frac{1^{n-1|1}\,1^{s-n-1|1}}{1^{s-1|1}}.$$

Wird $n$ und $p$ gleichzeitig um $r$ erhöht oder erniedrigt, so ist

$$44.\quad \int_0^\infty \frac{x^{n\pm r-1}\partial x}{(1+x)^{s\pm 2r}} = \int_0^\infty \frac{x^{p\pm r-1}\partial x}{(1+x)^{s\pm 2r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n\pm r-1}\partial x}{x^{s\pm 2r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{p\pm r-1}}{x^{s\pm 2r}}$$
$$= \int_0^1 x^{p\pm r-1}(1-x)^{n\pm r-1}\partial x = \int_0^1 x^{n\pm r-1}(1-x)^{p\pm r-1} = \frac{1^{n\pm r-1|1}\,.\,1^{p\pm r-1|1}}{1^{s\pm 2r-1|1}}.$$

Hier sind $s$ und $r$ unabhängig von einander und können zweckdienlich angenommen werden. Allgemeiner noch ist folgender Ausdruck:

$$45.\quad \int_0^1 x^{p+r-1}(1-x)^{n+q-1}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{p+r-1}\partial x}{(1+x)^{n+p+q+r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n+p-1}\partial x}{x^{n+p+q+r}}$$
$$= \int_0^1 x^{n+q-1}(1-x)^{p+r-1}\partial x = \int_0^\infty \frac{x^{n+q-1}\partial x}{(1+x)^{n+p+q+r}} = \int_1^\infty \frac{(x-1)^{n+q-1}\partial x}{x^{n+p+q+r}}$$
$$= \frac{1^{p+r-1|1}\,1^{n+q-1|1}}{1^{n+p+q+r-1|1}}.$$

Hier sind vier Grössen von einander unabhängig und können willkürlich angenommen werden. Dieser Ausdruck schliesst die von (**29.**) an entwickelten Gleichungen als besondere Fälle in sich.

Die Gleichung (13.) hat *Euler* (§. 351.), die Gleichungen (26. und 27.) in (§. 352. Integr.-Rechnung 1ter Thl.) entwickelt. Von den in (17. bis 24.) gegebenen Gleichungen hat *Legendre* (Exerc. de calc. intégr. T. II. Pg. 97. etc.) den Fall

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{n}{m}-1}\partial x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

und von den in (42. bis 44.) gegebenen den Fall

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\partial x}{(1+x)^s} = \frac{1^{n-1|1}.1^{s-1|1}}{1^{s-1|1}}$$

entwickelt; letztere auf nicht sehr einfache Weise. Er legt dieser Formel einen hohen Grad von Allgemeinheit bei. Es lässt sich aber, wie sich hier zeigt, eine viel allgemeinere Formel aufstellen.

(Die Fortsetzung folgt.)