4.

Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\cdot\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1\ldots4}\Delta u^{IV}_x + \text{etc.}$$

(Par *C. J. Malmstén*, profess. des math. à Upsala.)

Il est connu, que *Stirling*, dans son ouvrage „*Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione serierum*" résolut, il y a plus d'un siècle, une multitude de problèmes très importants pour la théorie des séries infinies en général, et particulièrement pour les expressions de très grands nombres, qui se présentent si fréquemment dans le calcul des Probabilités, et dont il serait presque impossible de trouver directement les valeurs numériques. Parmi toutes ces formules il y en a une, qui a toujours attirée l'attention particulière des Geomètres, et qui est specialement connue sous le nom de *formule de Stirling*; savoir celle, qui sert à calculer par approximation le logarithme du produit d'un grand nombre de facteurs croissants en progression arithmétique. Cette série offre une singularité bien remarquable. Elle procéde selon les puissances négatives d'un nombre supposé très grand, et étant décroissante très rapidement, elle finit nécessairement par devenir divergente, quelque grand que soit le dit nombre.

Quant à la convergence ou la divergence des suites infinies, on sait, que les Analystes d'autrefois y attachaient beaucoup moins d'importance que ceux d'aujourd'hui; ils se servaient même très souvent dans leurs calculs des séries évidemment divergentes. Aujourd'hui bien s'en faut qu'on approuve l'usage de series non convergentes; au contraire on veut qu'elles soient complètement bannies de l'analyse. Mais cette rigueur, juste et raisonnable en elle même, a été mise à une bien dure épreuve par la série de *Stirling*. D'une part divergente, comme elle l'est, elle *devait* en effet être rejetée: d'autre part, parcequ'elle est presqu'indispensable, elle *ne peut point* l'être. Cela étant, à moins de ne pas faire, forcé par la nécessité, une exception extraordinaire et non légitime pour cette série, (ce que quelques uns on effectivement fait), il ne restoit d'autre moyen que d'essayer de la rendre finie, c'est à dire, de chercher son terme complémentaire. On y a aussi réussi: nous rappelerons seulement ce que *Liouville* et *Cauchy* ont fait à ce sujet.

La formule de *Stirling* n'est cependant qu'un cas très particulier d'une formule que *Maclaurin* a proposée le premier, mais qui est ordinairement attribuée à *Euler* et connue sous son nom, savoir la formule

$$1. \quad h\Sigma u = \int u dx - \frac{h}{2}.u + \frac{B_1 h_2}{1.2}u' + \frac{B_2 h^4}{1\ldots4}u''' + \text{etc.},$$

où B_1, B_2, etc. désignent les nombres de *Bernoulli* et u', u'' etc. la première, la seconde etc. dérivée de u. Les nombres B_1, B_2, etc. sont, comme on sait, tels, que dès le quatrième, ils vont toujours en croissant, et finissent par devenir infiniment grands. Ainsi la convergence de la série (1.) n'a pas généralement lieu; au contraire nous l'avons vu être divergente dans le cas particulier de la formule de *Stirling*.

Cela posé, la série (1.) présentant souvent la même singularité que celle de *Stirling*, savoir d'être d'abord rapidement décroissante et de finir par devenir divergente: les géomètres ont regardé comme très important la légitimation générale de son emploi dans le calcul d'approximation. En effet ils ont taché de fixer les limites du reste de la série, quand on arrète le calcul à un terme determiné, c'est à dire de fixer les limites du terme complémentaire. Le premier essai à cet égard, que nous avons eu l'occasion de connaître, est dû à *Erchinger*, et se trouve exposé d'abord par *Ettingshausen* dans son écrit „*Vorlesungen über die höhere Mathematik*" Tom. I. pag. 429. et puis par *Eytelwein* dans son livre „*Grundlehren der höhern Analysis*" Tom. 2. §. 696. Mais son analyse n'est point satisfaisante, puisque l'équation différentielle, à l'aide de laquelle il trouve la valeur du reste, n'a lieu que dans le cas où la série infinie, d'où elle est dérivée, est convergente; ce qui en effet n'a pas généralement lieu.

Un autre calcut très ingenieux du terme complémentaire dans le dévéloppement de $h\Sigma u$ entre des limites données, est dûe à *Poisson*, qui l'a exposé dans un excellent mémoire: *Sur le Calcul numérique des Intégrales définies.* Il est fondé sur l'expression connue

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} f(z)\,dz + \frac{1}{a}\int_{-a}^{+a}\left[S_1^\infty \cos\left(\frac{i\pi(x-2)}{a}\right)\right]f(z)\,dz$$

(qui, comme on le sait, a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites des intégrales) et donne pour résultat la formule suivante:

$$h\Sigma_0^\omega f(x) = \int_0^c f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}h\{f(\psi) - f(0)\} + A_1 h^2\{f'(\psi) - f'(0)\} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(\psi) - f^{(2m-1)}(0)\} + R_m,$$

où

$$\tfrac{1}{2}(2\pi)^{2m} A_m = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \text{etc.}$$
$$R_m = 2(-1)^m . \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \int_0^\psi [S_1^\infty \frac{1}{i^{2m}} \operatorname{Cos} \frac{2i\pi x}{h}] . f^{(2m)}(x)\,dx.$$

En mettant ici $x - x_0$ à la place de x et puis $f(x)$ à la place de $f(x - x_0)$, on obtiendra facilement, si l'on fait $c + x_0 = x_1$,

$$3.\quad \begin{cases} h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}h\{f(x_1) - f(x_0) + A_1 h^2\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \ldots \\ \ldots (-1)^{m-1} A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\} + R'_m, \end{cases}$$

où

$$R'_m = 2.(-1)^m . \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} \int_{x_0}^{x_1} [S_1^\infty \frac{1}{i^{2m}} . \operatorname{Cos} \frac{2i\pi(x - x_0)}{h}] f^{(2m)}(x)\,\partial x.$$

Si l'on désigne par Θ_m la plus grande valeur numérique de $f^{(2m)}(x)$ entre $x = x_0$ et $x = x_1$, on aura, abstraction faite du signe,

$$4.\quad R'_m < h^{2m} A_m \Theta_m (x_1 - x_0),$$

et dans le cas où $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe dans tous cette étendue,

$$5.\quad R'_m < h^{2m} A_m\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0),$$

donc pour ce cas

$$6.\quad \begin{cases} h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}h\{f(x_1) - f(x_0)\} + A_1 h^2\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{m-2} A_{m-1} h^{2m-2}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\} \\ + (-1)^{m-1} . \Theta . 2A_m h^{2m}\{f^{(2m-1)}(x_0)\}, \end{cases}$$

où $0 < \Theta < 1$.

On doit aussi à l'illustre auteur des „*Fundamenta nova thèoriae functionum Ellipticarum*" un excellent mémoire sur ce sujèt, savoir: „*De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae* (Journ. de *M. Crelle* **T. 12.** pag. **263.**), où il démontre que si les deux expressions

$$7.\quad \Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x) \quad \text{et} \quad \Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m+2)}(x)$$

ne changent pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$, et si de plus elles sont toutes les deux du même signe, on a

$$8.\quad \begin{cases} h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\} \\ - \frac{B_2 h^4}{1\ldots 4}\{f''(x_1) - f''(x_0)\} + \ldots + (-1)^m . \frac{B_{m-1} h^{2m-2}}{1.2\ldots 2m-2}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\} \\ \qquad + (-1)^{m+1}.\,\Theta.\frac{B\ \ h^{2m}}{1.2\ldots 2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}, \end{cases}$$

où $0 < \Theta < 1$. Ce résultat de Mr. *Jacobi* ne peut être tiré de la déduction de M. *Poisson* que dans le cas où les dérivées

$$f^{(2m)}(x) \qquad \text{et} \qquad f^{(2m+2)}(x)$$

sont toutes les deux positives ou toutes les deux négatives, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$. Dans la déduction de Mr. *Jacobi* il suffit seulement, que les expressions (7.) soient toutes les deux positives ou toutes les deux négatives depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$; ce qui peut en effet avoir lieu, sans que la condition de Mr. *Poisson* soit satisfaite.

Après cette exposition succincte des recherches antérieures sur ce sujet, il nous sera permis de dire un mot sur le présent mémoire. Nous le diviserons en trois paragraphes. Dans le premier nous nous occuperons de la recherche de quelques relations entre les nombres Bernoulliens, dont nous aurons besoin dans la suite: dans le second nous developpevons les théorèmes et les formules générales, qui touchent de plus près à la formule remarquable, qui se trouve à la tête de ce mémoire: enfin dans le troisième nous ferons quelques applications importantes du dernier de ces théorèmes.

Nous n'ignorons pas que la formule d'*Euler* est ordinairement présentée sous la forme (1.); mais non-obstant nous en avons préféré pour notre disquisition la forme

$$9.\qquad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1\ldots 4}\Delta^{IV}_x + \text{etc.}$$

Au premier coup-d'oeil on trouvera cela peut-être de très peu d'importance; mais la forme n'est pas tout à fait sans conséquences dans les applications. En effet la formule (1.), étant prise dans sa plus grande généralité, on ne peut parler d'un terme complémentaire, $h\Sigma u$ étant absolument indéterminé. Il faut donc ou fixer le terme Σu, en le considérant comme une sommation entre des limites certaines (ce qui est le cas ordinaire), ou il faut le prendre pour une fonction déterminée de x, d'où l'on puisse ensuite déduire u et ses dérivées. Mais le procédé ordinaire a souvent des inconvenients par rapport à la continuité; ainsi p. ex. le dévéloppement de $\log \Gamma(x+1)$ qu'on trouve de cette manière, n'est rigoureusement demontré que pour les valeurs *entières* de x. Nous avons donc préféré de considérer Σu comme une fonction déterminée de x; et pour faire voir cela plus clairement, nous avons donné à la série, dont il s'agit la forme (9.).

Quant à la méthode d'opérer, nous prenons le même point de départ que M. *Jacobi*, savoir la formule connue

$$u_{x+h} = u_x + hu'_x + \frac{h^2}{1.2}u''_x + \dots + \frac{h^r}{1....r}u^{(r)}_x + \int_0^h \frac{(h-z)^r}{1....r} . u^{(r+1)}_{x+z} dz;$$

mais le reste de notre déduction sera tout à fait différente de la sienne. En effet la disquisition de cet illustre analyste fait fort bien connaître que la fonction que nous avons désigné par $\varphi(z)$ (voyez la formule (25.)), conserve toujours le même signe entre $z=0$ et $z=h$; mais elle ne fait pas voir la propriété la plus remarquable de cette fonction, savoir: *qu'elle a entre ces limites son seul maximum ou minimum en* $z = \frac{1}{2}h$, *et qu'elle est parfaitement symétrique de l'un et de l'autre côté de ce point.* Cette propriété est un point essentiel pour notre déduction: c'est par elle que nous sommes parvenu à trouver les limites du terme complémentaire pour le cas même, qui a échappé aux recherches de M. *Jacobi*, c'est à dire pour le cas où les expressions (7.) n'ont pas le même signe.

§. 1.

1) Si dans la formule connue

$$10.\qquad \int_0^\infty \frac{e^{ux}-e^{-ux}}{e^{2\pi x}-1} . dx = \frac{1}{w} - \tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w,$$

on met à la place du membre à droite sa valeur

$$11.\qquad \frac{1}{w} - \tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w = B_1 . \frac{w}{1.2} + B_2 . \frac{w^3}{1....4} + \dots + B_m . \frac{w^{2m-1}}{1....2m} + \text{etc.},$$

(où B_1, B_2, ... B_m, etc. sont les nombres Bernoulliens), on aura, en posant $w = 0$, après avoir differentié $2m-1$ fois par rapport à cette variable:

$$12.\qquad \int_0^\infty \frac{x^{2m-1}dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{B_m}{4m}.$$

Or la formule (10.), multipliée par Cos w, donne

$$13.\qquad 2\int_0^\infty \frac{e^{wx}-e^{-wx}}{e^{2\pi x}-1}\,\text{Cos}\,w . dx = \varphi(w),$$

en supposant pour abréger

$$\varphi(w) = 2\,\text{Cos}\,w\left(\frac{1}{w} - \tfrac{1}{2}\text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w\right) = \frac{2\,\text{Cos}\,w}{w} - \text{Cotang}\,\tfrac{1}{2}w + \text{Sin}\,w;$$

c'est à dire, en vertu de (11.):

$$14.\quad \varphi(w) = B_1 w + \frac{w^3}{1.2.3}\left(\frac{B_2}{2} - \tfrac{1}{2}\right) + \frac{w^5}{1....5}\left(B_3 - \tfrac{2}{3}\right) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{w^{2m-1}}{1.2....(2m-1)}\left(\frac{B_m}{m} + (-1)^{m-1}.\frac{m-1}{m}\right) + \text{etc.}\ldots\ldots$$

Différentions maintenant $2m-1$ fois la formule (13.). Pour cela nous nous servirons de la formule connue

$$15.\quad \frac{d^\mu(e^{ny}\operatorname{Cos} my)}{dy^\mu} = \tfrac{1}{2}\{e^{y(n+m\sqrt{-1})}(n+m\sqrt{-1})^\mu + e^{y(n-m\sqrt{-1})}(n-m\sqrt{-1})^\mu\},$$

qui, toutes les réductions faites, donne pour $w=0$:

$$16.\quad \frac{d^{2m-1}_{(w=0)}\{(e^{wk}-e^{-wk})\operatorname{Cos} w\}}{dw^{2m-1}} = (-1)^{m-1}.\frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Donc on tire de (13.):

$$17.\quad 2\int_0^\infty \frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}.\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{m-1}{m} + (-1)^{m-1}.\frac{B_m}{m}.$$

parcequ'en vertu de (14.) on a

$$\frac{d^{2m-1}_{(w=0)}.\varphi(w)}{dw^{2m-1}} = \frac{B_m}{m} + (-1)^{m-1}.\frac{m-1}{m}.$$

En dévéloppant les puissances sous le signe $\int$ dans (17.), et designant par $(2m-1)_1$, $(2m-1)_3$, etc. le premier, le troisième etc. coëfficient du binome pour l'exposant $2m-1$, nous aurons

$$4\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2\pi x}-1}\{(2m-1)_1 x - (2m-1)_3 x^3 + \ldots\ldots$$
$$+ (-1)^{m-2}(2m-1)_{2m-3}x^{2m-3} + (-1)^{m-1}x^{2m-1}\} = \frac{m-1}{m} + (-1)^{m-1}.\frac{B_m}{m},$$

et delà, à l'aide de (12.), on tire la rélation suivante entre les nombres de *Bernoulli*:

$$18.\quad (2m-1)_1 B_1 - \tfrac{1}{2}(2m-1)_3 B_2 + \tfrac{1}{3}(2m-1)_5 B_3 - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots(-1)^m.\frac{1}{m-1}.(2m-1)_{2m-3}B_{m-1} = \frac{m-1}{m}.$$

2) Mettons dans (10. et 12.) $\frac{1}{2}x$ à la place de x, et dans (10.) $2w$ à la place de w, nous aurons

$$19.\quad \int_0^\infty \frac{x^{2m-1}dx}{e^{\pi x}-1} = \frac{2^{2m-1}B_m}{2m},$$
$$\int_0^\infty \frac{e^{wx}-e^{-wx}}{e^{\pi x}-1}dx = \frac{1}{w} - \operatorname{Cotang} w.$$

La dernière formule, multipliée par $\operatorname{Cos} w$, donne

$$\int_0^\infty \frac{(e^{wx}-e^{-wx})\operatorname{Cos} w}{e^{\pi x}-1}dx = \operatorname{Sin} w + \frac{\operatorname{Cos} w}{w} - \frac{1}{\operatorname{Sin} w},$$

d'où, en posant $w=0$, aprés avoir differentié $2m-1$ fois par rapport à cette variable, on obtiendra en vertu de (16.):

$$(-1)^{m-1}\cdot\int_0^\infty\frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{e^{\pi x}-1}$$
$$=\frac{d^{2m-1}_{(w=0)}\left\{\operatorname{Sin} w+\frac{\operatorname{Cos} w}{w}-\frac{1}{\operatorname{Sin} w}\right\}}{dw^{2m-1}}.$$

Mais comme

$$\operatorname{Sin} w+\frac{\operatorname{Cos} w}{w}=\frac{1}{w}+\frac{w}{1.2}-3.\frac{w^3}{1....4}+5.\frac{w^5}{1....6}-\dots$$
$$\dots+(-1)^{m-1}.(2m-1).\frac{w^{2m-1}}{1....2m}+\text{etc.}\quad\text{et}$$
$$\frac{1}{\operatorname{Sin} w}=\frac{1}{w}+\frac{2(2-1).B_1w}{1.2}+\frac{2(2^3-1)B_2.w^3}{1....4}+\dots+\frac{2(2^{2m-1}-1)B_mw^{2m-1}}{1.2....2m}+\text{etc.},$$

on a

$$\frac{d^{2m-1}_{(w=0)}\left\{\operatorname{Sin} w+\frac{\operatorname{Cos} w}{w}-\frac{1}{\operatorname{Sin} w}\right\}}{dw}=-\frac{1}{2m}\{2(2^{2m-1}-1)B_m+(-1)^m(2m-1)\},$$

d'où enfin on obtient

$$\int_0^\infty\frac{(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}-(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{dx}{e^{\pi x}-1}=(2m-1)+(-1)^m.\frac{2(2^{2m-1}-1)B_m}{2m}.$$

En dévéloppant $(1+x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et $(1-x\sqrt{-1})^{2m-1}$ et fesant les intégrations à l'aide de (19.), on aura

20. $$\frac{(2m-1)_1 2^2B_1}{2}-\frac{(2m-1)_3 2^4B_2}{4}+\dots+(-1)^{m-2}\frac{(2m-1)_{2m-3}2^{2m-2}B_{m-1}}{2m-2}$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{2^{2m}B_m}{2m}=\frac{2m-1}{2m}+(-1)^m.\frac{2(2^{2m-1}-1)B_m}{2m},$$

d'où l'on tire facilement

$$\frac{1}{2m}-1+\frac{(2m-1)_1 2^2B_1}{2}-\frac{(2m-1)_3 2^4.B_2}{4}+\dots+(-1)^m.\frac{(2m-1)_{2m-3}.2^{2m-2}B_{m-1}}{2m-2}$$
$$=(-1)^m.\frac{2.(2^{2m}-1)B_m}{2m}$$

et enfin, en multipliant chaque terme par $\frac{1}{\Gamma(2m)}\cdot\frac{1}{2^{2m}}$,

21. $$\frac{1}{1....2m}\cdot\frac{1}{2^{2m}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1....(2m-1)}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}}+\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1....(2m-2)}\cdot\frac{1}{1^{2m-2}}$$
$$-\frac{B_2}{1....4}\cdot\frac{1}{1....2m-4}\cdot\frac{1}{2^{2m-4}}+\dots+(-1)^m\frac{B_{m-1}}{1....2m-2}\cdot\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}$$
$$=(-1)^m.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{1....2m}.$$

§. II.

Les deux rélations entre les nombres de *Bernoulli*, dont nous aurons besoin dans la suite, ayant été trouvées dans (18. et 21.), nous passons maintenant à ce qu'il y a de plus essentiel dans ce mémoire. Soit u_x une fonction de x qui, avec ses $2m+1$ premieres dérivées, est continue depuis x jusqu'à $x+h$. Faisons pour abréger

$$22.\quad hu'_x - \Delta u_x - H_1 h\ u'_x - H_2 h^2 \Delta u''_x - \ldots$$
$$\ldots - H_{2m-2} h^{2m-2} \Delta u_x^{(2m-2)} - H_{2m-1} h^{2m-1} \Delta u_x^{(2m-1)} = F(x_1 h),$$

où u'_x, u''_x, etc sont les dérivées successives de u_x. En vertu d'un théorème connu nous aurons

$$\Delta u_x = hu'_x + \frac{h^2}{1.2}u''_x + \frac{h^3}{1.2.3}u'''_x + \ldots + \frac{h^{2m}}{1\ldots 2m}u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m}}{1\ldots 2m}.u_{x+z}^{(2m+1)}dz,$$

$$\Delta u'_x = hu''_x + \frac{h^2}{1.2}u'''_x + \ldots + \frac{h^{2m-1}}{1\ldots(2m\text{-}1)}u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m-1}}{1\ldots(2m\text{-}1)}u_x^{(2m+1)}dz,$$

$$\Delta u''_x = hu'''_x + \ldots \frac{h^{2m-2}}{1\ldots(2m\text{-}2)}u_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)^{2m-2}}{1\ldots(2m\text{-}2)}.u_{x+z}^{(2m+1)}dz,$$

. . . .

$$\Delta u_x^{(2m-1)} = hu_x^{(2m)} + \int_0^h \frac{(h-z)}{1}.u_{x+z}^{(2m+1)}dz.$$

Ces valeurs, substituées dans (22.), donnent

$$23.\quad F(x_1 h) = -\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}dz \left\{ \frac{(h-z)^{2m}}{1\ldots 2m} + \frac{H_1 h(h-z)^{2m-1}}{1\ldots 2m-1} + \frac{H_2 h^2 (h-z)^{2m-2}}{1\ldots 2m-2} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{H_{2m-1}h^{2m-1}(h-z)}{1} \right\}$$

où les coëfficients H_1, $H_2 \ldots H_{2m-1}$ sont determinés par

$$24.\quad \left\{ \begin{array}{l} H_1 + \frac{1}{1.2} = 0, \\ H_2 + \frac{H_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0, \\ H_3 + \frac{H_2}{1.2} + \frac{H_1}{1.2.3} + \frac{1}{1\ldots 4} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{2m-2} + \frac{H_{2m-3}}{1.2} + \frac{H_{2m-4}}{1.2.3} + \ldots + \frac{H_1}{1\ldots(2m\text{-}2)} + \frac{1}{1\ldots(2m\text{-}1)} = 0, \\ H_{2m-1} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \ldots + \frac{H_2}{1\ldots(2m\text{-}2)} + \frac{H_1}{1\ldots(2m\text{-}1)} + \frac{1}{1\ldots 2m} = 0. \end{array} \right.$$

2) Considérons en premier lieu le polynome entre les crochets dans (23.) et posons

$$25.\quad \varphi(h-z) = \frac{(h-z)^{2m}}{1\ldots 2m} + \frac{H_1 h(h-z)^{2m-1}}{1\ldots(2m-1)} + \frac{H_2 h^2(h-z)^{2m-2}}{1\ldots(2m-2)} + \frac{H_4 h^4 (h-z)^{2m-4}}{1\ldots(2m-4)} + \ldots + \frac{H_{2m-2} h^{2m-2}(h-z)^2}{1.2} \quad \text{et}$$

$$26.\quad \psi(h-z) = \frac{H_3 h^4 (h-z)^{2m-3}}{(1\ldots 2m-3)} + \frac{H_5 h^5 (h-z)^{2m-5}}{(1\ldots 2m-5)} + \ldots + \frac{H_{2m-1} h^{2m-1}(h-z)}{1},$$

qui au lieu de (23.) donne cette expression plus abrégée:

$$27.\quad F(x,h) = -\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)} dz[\varphi(h-z) + \psi(h-z)].$$

En dévéloppant $\varphi(h-z)+\psi(h-z)$ selon les puissances de z, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\varphi(h-z)+\psi(h-z)\\
= {}& h^{2m}\left\{\frac{1}{1\ldots 2m} + \frac{H_1}{1\ldots 2m-1} + \frac{H_2}{1\ldots 2m-2} + \ldots + \frac{H_{2m-3}}{1.2.3} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{H_{2m-1}}{1}\right\}\\
&-\frac{h^{2m-1}z}{1}\left\{\frac{1}{1\ldots 2m-1} + \frac{H_1}{1\ldots 2m-2} + \frac{H_2}{1\ldots 2m-3} + \ldots + \frac{H_{2m-3}}{1.2} + \frac{H_{2m-2}}{1} + H_{2m-1}\right\}\\
&+\frac{h^{2m-2}z^2}{1.2}\left\{\frac{1}{1\ldots 2m-2} + \frac{H_1}{1\ldots 2m-3} + \frac{H_2}{1\ldots 2m-4} + \ldots + \frac{H_{2m-4}}{1.2} + \frac{H_{2m-3}}{1} + H_{2m-1}\right\}\\
&-\frac{h^{2m-3}z^3}{1.2.3}\left\{\frac{1}{1\ldots 2m-3} + \frac{H_1}{1\ldots 2m-4} + \frac{H_2}{1\ldots 2m-5} + \ldots + \frac{H_{2m-5}}{1.2} + \frac{H_{2m-4}}{1} + H_{2m-3}\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-\frac{h^3 z^{2m-3}}{1\ldots 2m-3}\left\{\frac{1}{1.2.3} + \frac{H_1}{1.2} + \frac{H_2}{1} + H_3\right\}\\
&+\frac{h^2 z^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}\left\{\frac{1}{1.2} + \frac{H_1}{1} + H_2\right\}\\
&-\frac{h z^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}\left\{1 + H_1\right\}\\
&+\frac{z^{2m}}{1\ldots 2m},
\end{aligned}$$

c'est à dire, en fesant attention aux expressions (24.):

$$\varphi(h-z)+\psi(h-z) = \frac{z^{2m}}{1\ldots 2m} + \frac{H_1 h z^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}\,\frac{H_2 h^2 z^{2m-2}}{1\ldots 2m-2} + \ldots + \frac{H_{2m-2}h^{2m-2}z^2}{1.2}$$
$$-\left\{\frac{H_3 h^3 z^{2m-3}}{1\ldots 2m-3} + \frac{H_5 h^5 z^{2m-5}}{1\ldots 2m-5} + \frac{H_7 h^7 z^{2m-7}}{1\ldots 2m-7} + \ldots + \frac{H_{2m-1}h^{2m-1}z}{1}\right\}$$

ou enfin

$$28.\quad \varphi(h-z)+\psi(h-z) = \varphi(z) - \psi(z).$$

En supposant ici $z = \frac{1}{2}h$, on aura

$$\psi(\tfrac{1}{2}h) = -(\tfrac{1}{2}h),$$

donc

$$\psi(\tfrac{1}{2}h) = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs entières de m, à moins que les coëfficients des termes différents dans $\psi(h-z)$ [voy. la formule (26.)] ne soient séparement égaux à zéro, c'est à dire que

$$28\text{a.}\quad H_3 = H_5 = H_7 = \ldots\ldots = H_{2m-1} = 0.$$

Nous aurons donc au lieu de (27. et 28.):

$$29.\quad F(x_1 h) = \int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}\varphi(h-z)\,dz, \quad \text{et}$$

$$30.\quad \varphi(h-z) = \varphi(z).$$

3) Quant aux coëfficients H_1, H_2, H_1 etc., on obtient immédiatement

$$H_1 = -\tfrac{1}{2};$$

par conséquent, à l'aide de (28a) la dernière des relations (24.) peut être présentée la forme

$$31.\quad \frac{H_2}{1\ldots2m-2} + \frac{H_4}{1\ldots2m-4} + \ldots + \frac{H_{2m-4}}{1\ldots4} + \frac{H_{2m-2}}{1.2} + \frac{m-1}{1\ldots2m},$$

d'où, en multipliant par $2\Gamma(2m)$ et supposant généralement

$$32.\quad H_{2r} = (-1)^{r+1}\frac{A_r}{1\ldots2r},$$

on obtiendra la formule

$$(2m-1)_1 A_1 - \tfrac{1}{2}(2m-1)_3 A_2 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{m-2}.(2m-1)^{2m-2}A_{m-2} + (-1)^m.\frac{1}{m-1}(2m-1)_{2m-3}A_{m-1} = \frac{m-1}{m}$$

en vertu de laquelle (comparée à (18.)) il faut être nécessairement

$$A_r = B_r$$

et ensuite

$$33.\quad H_{2r} = (-1)^{r+1}\frac{B_r}{1\ldots2r}$$

en désignant par B_r le $r$ième nombre de *Bernoulli*.

4) Ayant trouvé les valeurs de tous les coëfficients H, il nous reste à donner une relation entre eux, dont nous aurons besoin tout à l'heure et qui se trouvera facilement à l'aide de (30.). En effet cette formule donne immédiatement

$$33\text{a.}\quad \int_0^h \varphi(z)\,dz = 2\int_0^{\frac{1}{2}h}\varphi(z)\,dz,$$

d'où, en fesant les intégrations, on aura, après avoir divisé par h^{2m+1}:

$$\frac{1}{1\ldots 2m+1} + \frac{H_1}{1\ldots 2m} + \frac{H_2}{1\ldots 2m-1} + \ldots + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}$$

$$= \frac{1}{1\ldots 2m-1}\cdot\frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1\ldots 2m}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1\ldots 2m-1}\cdot\frac{1}{2^{2m-2}} + \ldots + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2}$$

et ensuite en vertu des rélations (24.), attention faite à (28a.):

$$34.\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1\ldots 2m+1}\cdot\frac{1}{2^{2m}} + \frac{H_1}{1\ldots 2m}\cdot\frac{1}{2^{2m-1}} + \frac{H_2}{1\ldots 2m-1}\cdot\frac{1}{2^{2m-2}} \\ &\quad + \frac{H_4}{1\ldots(2m-1)}\cdot\frac{1}{2^{2m-4}} + \ldots + \frac{H_{2m-2}}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^2} \end{aligned}\right\} = -H_{2m}.$$

5) Nous nous occuperont maintenant de quelques propriétés remarquables de la fonction $\varphi(z)$, et nous démontrérons en premier lieu:

Qu'elle ne change pas de signe entre $z = 0$ *et* $z = h$, *et qu'elle est positive dans cette étendue, si* m *est un nombre pair, et négative si* m *est un nombre impair.*

Pour cela nous observerons, qu'en vertu de la valeur de $H_1 = -\frac{1}{2}$, l'expression

$$z + H_1 h$$

est *negative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$. En multipliant par $h^{-4}dh$ et intégrant entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\int_h^\infty (zh^{-4} + H_1 h^{-3})\,dh = \frac{zh^{-3}}{3} + \frac{H_1 h^{-2}}{2}.$$

Cela étant *negatif* entre les mêmes limites de z, il faut nécessairement que l'expression

$$\frac{z}{3} + \frac{H_1 h}{2}$$

et par conséquent

$$\int_z^{\frac{1}{2}h} \left(\frac{z}{3} + \frac{H_1 h}{2}\right) dz = -\left(\frac{z^2}{1.2.3} + \frac{H_1 hz}{1.2} + H_2 h^2\right)$$

le soit aussi; d'où, en multipliant par $-z$, nous aurons l'expression

$$35.\quad \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{H_1 hz^2}{1.2} + H_2 h^2 z,$$

qui est *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$. Multiplions (35.) par $h^{-6}dh$ et intégrons entre $h = h$ et $h = \infty$, nous aurons

$$\frac{z^3 h^{-5}}{1.2.3.5} + \frac{H_1 h^{-4} z^2}{1.2.4} + \frac{H_2 h^{-3} z}{3}.$$

Cela, et par conséquent aussi

$$\frac{z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1 hz^2}{1.2.4} + \frac{H_2 h^2 z}{4}$$

doit être *positif* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, et également encore

$$\int_z^{\frac{1}{2}h}\left(\frac{z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_1 h z^2}{1.2.4} + \frac{H_2 h^2 z}{3}\right)dz = -\left(\frac{z^4}{1 \dots 5} + \frac{H_1 h z^3}{1 \dots 4} + \frac{H_2 h^2 z^2}{1 \dots 3} + H_4 h^4\right),$$

d'où, en multipliant par $-z$, il suit que

$$36. \quad \frac{z^5}{1 \dots 5} + \frac{H_1 h z^4}{1 \dots 4} + \frac{H_2 h^2 z^3}{1 \dots 3} + H_4 h^4 z$$

doit être négatif depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{1}{2}h$. En multipliant cette expression par $h^{-8}dh$ et intégrant entre $h = h$ et $h = \infty$, l'intégrale, multipliée par h^7, donne

$$\frac{z^5}{1 \dots 5.7} + \frac{H_1 h z^4}{1 \dots 4.6} + \frac{H_2 h^2 z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_4 h^4 z}{3},$$

et cela doit être *negatif* entre les mêmes limites de z; ce qui aura lieu encore pour

$$\int_z^{\frac{1}{2}h}\left(\frac{z^5}{1 \dots 5.7} + \frac{H_1 h z^4}{1 \dots 4.6} + \frac{H_2 h^2 z^3}{1.2.3.5} + \frac{H_4 h^4 z}{3}\right)dz =$$

$$-\left[\frac{z^6}{1 \dots 7} + \frac{H_1 h z^5}{1 \dots 6} + \frac{H_2 h^2 z^4}{1 \dots 5} + \frac{H_4 h^4 z^2}{1.2.3} + H_6 h^6\right],$$

et par conséquent, en multipliant par $-z$, l'expression

$$\frac{z}{1 \dots 7} + \frac{H_1 h z^6}{1 \dots 6} + \frac{H_2 h^2 z^5}{1 \dots 5} + \frac{H_4 h^4 z^3}{1.2.3} + H_6 h^6 z$$

doit être *positive* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$. Par cette formule et par un procédé tout analogue on trouvera aisément que

$$\frac{z^9}{1 \dots 9} + \frac{H_1 h z^8}{1 \dots 8} + \frac{H_2 h^2 z^7}{1 \dots 7} + \frac{H_4 h^4 z^5}{1 \dots 5} + \frac{H_6 h^6 z^3}{1 \dots 3} + H_8 h^8 z$$

est négatif entre les mêmes limites de z. Cela étant, pour faire voir ce qui a lieu en général, il suffira de démontrer que, si l'expression

$$37. \quad \frac{z^{2m-3}}{1 \dots (2m-3)} + \frac{H_1 h z^{2m-4}}{1 \dots (2m-4)} + \frac{H_2 h^2 z^{2m-5}}{1 \dots (2m-5)} + \frac{H_4 h^4 z^{2m-7}}{1 \dots (2m-7)} + \dots$$

$$\dots + \frac{H_{2m-6} h^{2m-6} z^3}{1.2.3} + H_{2m-4} h^{2m-4} z$$

est toujours *positive* ou toujours *négative* entre $z = 0$ et $z = \frac{1}{2}h$, celle

$$38. \quad \frac{z^{2m-1}}{1 \dots (2m-1)} + \frac{H_1 h z^{2m-2}}{1 \dots (2m-2)} + \frac{H_2 h^2 z^{2m-3}}{1 \dots 2m-3} + \frac{H_4 h^4 z^{2m-5}}{1 \dots 2m-5} + \dots$$

$$\dots + \frac{H_{2m-4} h^{2m-4} z^3}{1.2.3} + H_{2m-2} h^{2m-2} z$$

sera toujours *négative* au toujours *positive* entre les mêmes limites de z.

En effèt, multiplions (37.) par $h^{-2m}dh$, et intégrons entre $h=h$ et $h=\infty$; il faut que l'intégrale

$$\frac{z^{2m-3}}{1\ldots2m-3}\cdot\frac{h^{-2m+1}}{2m-1}+\frac{H_1z^{2m-4}}{1\ldots2m-4}\cdot\frac{h^{-2m+2}}{2m-2}+\ldots+\frac{H_{2m-6}z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{-5}}{5}+\frac{H_{2m-4}.z}{1}\cdot\frac{h^{-3}}{3}$$

et par conséquent l'expression

$$\frac{z^{2m-3}}{1\ldots2m-3}\cdot\frac{1}{2m-1}+\frac{H_1z^{2m-4}}{1\ldots2m-4}\cdot\frac{h}{2m-2}+\frac{H_2z^{2m-5}}{1\ldots2m-5}\cdot\frac{h^2}{2m-3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{H_{2m-6}z^3}{1.2.3}\cdot\frac{h^{2m-6}}{5}+\frac{H_{2m-4}.z}{1}\cdot\frac{h^{m-4}}{3}$$

soit *positive* ou *négative* entre $z=0$ et $z=\frac{1}{2}h$. Multipliant la dernière expression par dz et intégrant entre $z=z$ et $z=\frac{1}{2}h$, l'intégrale

$$-\left\{\frac{2^{2m-2}}{1\ldots2m-1}+\frac{H_1hz^{2m-3}}{1\ldots2m-2}+\frac{H_2h^2z^{2m-4}}{1\ldots2m-3}+\frac{H_4h^4z^{2m-6}}{1\ldots2m-5}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{H_{2m-4}h^{2m-4}z^2}{1.2.3}+H_{2m-2}\right\}$$

doit aussi être toujours *positive* ou toujours *négative* entre les mêmes limites de z; d'où, en multipliant par $-z$, il suit que l'expression (38.), qui n'est autre chose que la dérivée $\varphi'(z)$ de $\varphi(z)$, est toujours *négative* ou toujours *positive* entre $z=0$ et $z=\frac{1}{2}h$.

Par ce qui précède il est sûr que

$\varphi'(z)$, *fonction entière du* $(2m-1)$*ième degré, est positif dans l'étendue indiquée, si* m *est un nombre pair, et négatif si* m *est un nombre impair.*

De là il suit immédiatement que l'expression

$$\int_0^z\varphi'(z)dz=\varphi(z),$$

qui ne change pas de signe entre $z=0$ *et* $z=\frac{1}{2}h$, *est positive dans cette étendue, si* m *est un nombre pair, et négative si* m *est un nombre impair.*

Cela étant, il suffira de se rappéler de la relation trouvée ci-dessus:

$$39.\qquad \varphi(z)=\varphi(h-z),$$

pour avoir démontré ce dont il s'agissait, savoir que la fonction

$\varphi(z)$, *qui ne change pas de signe entre* $z=0$ *et* $z=\frac{1}{2}h$, *est positive dans cette étendue si* m *est un nombre pair, et négative si* m *est un nombre impair.*

6) En différentiant (39.) par rapport de z, on aura

$$\varphi'(z) = -\varphi'(h-z),$$

ce qui exige nécessairement que

$$\varphi'(z) \text{ soit zéro} \qquad \text{pour} \qquad z = \tfrac{1}{2}h.$$

Donc la fonction $\varphi'(z)$ qui, en vertu de ce qui précède, conserve toujours le même signe entre $z=0$ et $z=\frac{1}{2}h$, s'évanouit pour $z=\frac{1}{2}h$; elle passe dans ce point du positif au négatif (m étant impair), et conserve ensuite le même signe depuis $z=\frac{1}{2}h$ jusqu'à $z=h$. Il suit de là que la fonction primitive $\varphi(z)$ va toujours en augmentant (si m est pair) depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{2}h$, et décroit où augmente après, continuellement jusqu'à $z=h$; c'est à dire que

$\varphi(z)$ a entre $z=0$ et $z=h$ un seul maximum pour $z=\frac{1}{2}h$, si m est pair, et un seul minimum pour la même valeur de z, si m est impair.

7) Nous réprenons maintenant la formule (22.) qui peut être présentée sous la forme

$$40. \quad hu'_x = \Delta u_x - \tfrac{1}{2}h\Delta u'_x + \frac{B_1h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \frac{B_2h^4}{1....4}\Delta u^{IV}_x + \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m B_{m-1}h^{2m-2}}{1....(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)} + R,$$

où

$$41. \quad R = -\int_0^h k_{x+z}^{(2m+1)}\varphi(z)dz.$$

Or $\varphi(z)$ conserve le même signe entre les limites de l'intégrale; donc on a

$$R = -u_{x+\bar{h}}^{(2m+1)}\int_0^h\varphi(z)dz,$$

c'est à dire, en vertu de (33a. et 34.):

$$R = H_{2m}h^{2m+1}u_{x+\bar{h}}^{(2m+1)} = \frac{(-1)^{m+1}.B_mh^{m+1}}{1.2....2m}.u_{x+\bar{h}}^{(2m+1)}.$$

Donc

Théorème I. *Soit u_x une fonction quelconque de x qui, ainsi que ses $2m+1$ premières dérivées, est continue entre x et $x+h$: la valeur de R (40.) sera*

$$R = \frac{(-1)^{m+1}B_mh^{2m+1}}{1....2m},$$

multiplié par une valeur intermédiaire de la $(2m+1)^{me}$ dérivée, et on aura

$$43. \quad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u'_x + \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}\Delta u_x^{(2m-2)} + \frac{(-1)^{m+1} B_m h^{2m+1}}{1\dots 2m} u_{x+\Theta h}^{(2m+1)}$$

Ce théorème est absolument général et suppose seulement la continuité de la fonction u_x et celle des ses dérivées nommées.

8) En fesant dans (40.) $x = x_1$ et ensuite $x = x_0$ on aura par soustraction:

$$44. \quad h(u'_{x_0} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\left\{\Delta u'_{x_1} \quad \Delta u'_{x_0}\right\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\right\} - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}\left\{\Delta u_{x_1}^{(1m-2)} - \Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\right\} - \int_0^h \varphi(z)\,dz\left\{u_{x_1+z}^{(2m+1)} - u_{x_0+z}^{(2m+1)}\right\}.$$

De là, puisque $\varphi(z)$ conserve le même signe entre les limites de l'intégrale, on obtient comme ci-dessus:

$$45. \quad h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\left\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\right\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\right\} - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}\left\{\Delta u_{x_1}^{(2m-2)} - \Delta u_{x_0}^{(2m-2)}\right\} + \frac{(-1)^{m+1} B_m h^{2m+1}}{1\dots 2m}\left\{u_{x_1+\Theta h}^{(2m+1)} - u_{x_0+\Theta h}^{(2m+1)}\right\},$$

où Θ est une quantité positive et < 1. Supposons ici

$$46. \quad u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \Sigma_{x_0}^{x_1} f(x+z),$$

d'où

$$\Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,$$

et en général

$$\Delta u_{x_1}^{(r)} - \Delta u_{x_0}^{(r)} = f_{(x_1)}^{(r-1)} - f_{(x_0)}^{(r-1)}:$$

nous aurons la formule

$$47. \quad h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left\{f(x_1) - f(x_0)\right\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{f'(x_1) - f'(x_0)\right\} - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)\ B_{m-1} h^{2m-2}}{1\dots(2m-2)}\left\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\right\} + \frac{(-1)^{m+1} B_m h^{2m+1}}{1\dots 2m}\Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+\Theta h),$$

qui n'exige pas nécessairement que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de h.

Dans le cas $x_1 - x_0 = nh$, en désignant par M_m la plus grande valeur numérique de $f_{(x)}^{(2m)}$ depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$, nous aurons, abstraction faite du signe,

$$\Sigma_{x_0}^{x_1} f^{(2m)}(x+\Theta h) < \frac{x_1 - x_0}{h}.M_m,$$

et partant

$$48.\quad h\Sigma_{x_0}^{x_1}f(x)=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\,dx-\frac{h}{2}\Big\{f(x_1)-f(x_0)\Big\}+\frac{B_1h^2}{1.2}\Big\{f'(x_1)-f'(x_0)\Big\}-\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^mB_{m-1}h^{2m-2}}{1\ldots.(2m-2)}\Big\{f^{(2m-3)}(x_1)-f^{(2m-3)}(x_0)\Big\}\pm\Theta.\frac{B_m\,h^{2m}}{1\ldots.2m}(x_1-x_0)M_m.$$

Cette formule offre une autre expression des limites du reste que celle de M. *Poisson* [Voyez la formule (4.)].

9) Nous supposerons maintenant dans (40.) que $u_{z+2}^{(2m+1)}$ ne change pas de signe entre $z=0$ et $z=h$. Alors nous aurons

$$R=-\varphi(\Theta h)\Delta u_x^{2m)}.$$

Comme $\varphi(z)$ conserve le même signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, de sorte que sa plus grande valeur numérique est $\varphi(\frac{1}{2}h)$, et sa moindre valeur zéro, nous aurons

$$R=-\Theta\varphi(\tfrac{1}{2}h).\Delta u_x^{(2m)},$$

où $0<\Theta<1$. Quant à $\varphi(\frac{1}{2}h)$, on en obtiendra facilement la valeur à l'aide de (21. §. 1.), savoir la valeur

$$49.\quad \varphi(\tfrac{1}{2}h)=(-1)^m.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_m\,h^{2m}}{1\ldots.2m},$$

d'où enfin

$$50.\quad R=(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_mh^{2m}}{1\ldots.2m}.\Delta u_x^{(2m)}.$$

Nous aurons donc le théorème suivant:

Théorème II. Soit u_x *une fonction quelconque de* x, *continue, ainsi que ses* $2m+1$ *premières dérivées, depuis* x *jusqu'à* $x+h$; *soit de plus la* $(2m+1)^{me}$ *dérivée toujours du même signe entre ces limites: la valeur de* R (40.) *sera*

$$R=(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_m\,h^{2m}}{1\ldots.2m}\Delta u_x^{(2m)};$$

c'est à dire nous aurons:

$$51.\quad hu'_x=\Delta u_x-\frac{h}{2}\Delta u'_x+\frac{B_1h^2}{1.2}\Delta u''_x-\frac{B_2h^4}{1\ldots.4}\Delta u^{IV}_x+\ldots.$$
$$\ldots+\frac{(-1)^mB_{m-1}h^{2m-2}}{1\ldots.(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)}+(-1)^{m+1}.\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_m\,h^{2m}}{1\ldots.2m}.\Delta u_x^{(2m)}.$$

Pareillement, en supposant dans (44.) que

$$u_{x_1+z}^{(2m+1)}-u_{x+z}^{(2m+1)}$$

conserve toujours le même signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, on en tire facilement l'expression

$$52.\quad h(u'_{x_1} - u'_{x_0}) = \Delta u_{x_1} - \Delta u_{x_0} - \frac{h}{2}\left\{\Delta u'_{x_1} - \Delta u'_{x_0}\right\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{\Delta u''_{x_1} - \Delta u''_{x_0}\right\} - \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1\ldots(2m-2)}\left\{\Delta u^{(2m-2)}_{x_1} - \Delta^{(2m-2)}_{x_0}\right\} + (-1)^{m+1}.\,\Theta.\,\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1\ldots2m}\left\{\Delta u^{(2m)}_{x_1} - \Delta u^{(2m)}_{x_0}\right\},$$

d'où, en fesant

$$u'_{x_1+z} - u'_{x_0+z} = \Sigma^{x_1}_{x_0} f(x+z),$$

on obtient

$$53.\quad h\Sigma^{x_1}_{x_0} f(x) = \int^{x_1}_{x_0} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left\{f(x_1) - f(x_0)\right\}$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\left\{f'(x_1) - f'(x_0)\right\} - \frac{B_2 h^4}{1\ldots4}\left\{f'''(x_1) - f'''(x_0)\right\} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1} h^{2m-2}}{1\ldots(2m-2)}\cdot\left\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\right\}$$
$$+ (-1)^{m+1}.\,\Theta.\,\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1\ldots2m}\left\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\right\}.$$

Cette formule suppose que $\Sigma^{x_1}_{x_0} f(x+z)$ conserve son signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$. En la comparant avec la formule (6.), que donnent les méthodes connues, on trouvera facilement:

1) Que notre formule a des limites plus reserrées pour son terme complémentaire;

2) Qu'elle n'exige pas nécessairement que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de h. Il faut seulement que dans ce cas le membre à droite de (53.) ne donne qu'une valeur particulière de $h\Sigma^{x_1}_{x_0} f(x)$; d'où, pour en avoir la valeur générale, il faut la compléter par

$$54.\quad w(x_1) - w(x_0),$$

$w(x)$ étant une fonction périodique quelconque, telle que

$$w(x+h) - w(x) = 0.$$

La formule (6.), au contraire exige nécessairement que $x_1 - x_0$ soit un multiple exact de h.

3) La déduction de la formule (6.) suppose que $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$: pour notre formule (53.) il suffit que

$$55.\quad \Sigma^{x_1}_{x_0} f^{(2m)}(x+z)$$

ne change pas de signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$. En effèt, dans le cas où $x_1 - x_0$ est un multiple exact de h, il est évident que cela a toujours lieu, si $f^{(2m)}(x)$ conserve le même signe depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_1$; mais il peut aussi avoir lieu sans cela.

10. En ajoutant à (51.) l'expression

$$0 = (-1)^{m+1}\left\{\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}.\Delta u_x^{(2m)} - \frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\Delta u_x^{(2m)}\right\},$$

on aura

$$56.\quad hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}.\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}.\Delta u''_x - \dots$$
$$\dots + (-1)^{m+1}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\Delta u_x^{(2m)} + (-1)^{m+1}.\left\{\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}.\Delta u_x^{(2m)},$$

et pareillement on tirera de (53.):

$$57.\quad h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\}$$
$$+ \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f''(x_1) - f''(x_0)\} - \frac{B_2 h^4}{1....4}\{f^{IV}(x_1) - f^{IV}(x_0)\} + \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^{m+1}B_m h^{2m}}{1....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}$$
$$+ (-1)^{m+1}\left\{\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}.\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}.$$

Cette formule fait voir, que si dans le calcul de

$$h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x)$$

on s'arrète à un certain terme du développement, la valeur du reste sera moindre que celle du dernier terme; ce qui est précisement la proposition de M. *Poisson*.

11. En mettant dans (43.) $m+1$ à la place de m, et en comparant le résultat avec (56.), on aura

$$58.\quad \frac{B_{m+1}h^{2m+2}}{1....(2m+2)}.u_{x+\Theta z}^{(2m+3)} = -\left\{\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1\right\}\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}\,dz.$$

parceque

$$\Delta u_x^{(2m)} = \int_0^h u_{x+z}^{(2m+1)}\,dz.$$

Donc, si les dérivées

$$59.\quad u_{x+z}^{(2m+1)} \quad \text{et} \quad u_{x+z}^{(2m+1)}$$

ne changent pas de signe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = h$ et qu'elles ont toutes les deux *le même signe*, il faut que

$$60.\quad \Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - 1$$

soit négatif et ne surpasse pas numériquement 1. On pourra donc supposer:

$$\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}-1=-\Theta_1$$

Θ_1 étant un nombre entre 0 et 1. Si au contraire les expressions (59.) ne changent pas de signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, et qu'elles ont des signes *contraires*, il faut que (60.) soit une quantité positive, qui ne surpasse pas $\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}}$. Donc on pourra poser

$$\Theta.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}-1=\Theta_2.\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}},$$

Θ_2 étant un nombre entre 0 et 1. Cela étant, il résulte de la formule (56.) le théorème suivant:

Théorème III. Soit u_{x+z} *une fonction quelconque de* x *qui, ainsi que ses* $2m+3$ *premières dérivées, est continue depuis* $z=0$ *jusqu'à* $z=h$; *supposons de plus que la* $(2m+1)^{me}$ *et la* $(2m+3)^{me}$ *dérivée ne changent pas de signe entre ces limites. Cela posé, si les dérivées*

$$u_{x+z}^{(2m+1)} \quad \text{et} \quad u_{x+z}^{(2m+3)}$$

ont des signes contraires, nous aurons

$$61.\quad hu'_x=\Delta u_x-\frac{h}{2}\Delta u'_x+\frac{B_1h^2}{1.2}\Delta u''_x-\ldots.$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}B_mh^{2m}}{1\ldots.2m}\Delta u_x^{(2m)}+(-1)^{m+1}.\Theta_2.\frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}}.\frac{B_mh^{2m}}{1\ldots.2m}\Delta u_x^{(2m)},$$

et si elles ont les mêmes signes, nous aurons

$$62.\quad hu'_x=\Delta u_x-\frac{h}{2}\Delta u'_x+\frac{B_1h^2}{1.2}\Delta u''_x-\ldots.$$
$$+\frac{(-1)^mB_{m-1}h^{2m-2}}{1\ldots.(2m-2)}.\Delta u_x^{(2m-2)}+(-1)^{m+1}.\Theta_3.\frac{B_mh^{2m}}{1\ldots.2m}\Delta u_x^{2m},$$

Θ_2 *et* Θ_3 *étant des nombres entre* 0 *et* 1.

Mettons dans (47.) $m+1$ à la place de m, comparons à (57.) le résultat, rappélons nous que

$$f^{(2m-1)}(x_1)-f^{(2m-1)}(x_0)=\int_0^h\Sigma_{x_0}^{x_1}f^{(2m)}(x+z)dz,$$

et supposons le cas où

$$63.\quad \Sigma_{x_0}^{x_1}f^{(2m)}(x+z) \quad \text{et} \quad \Sigma_{x_0}^{x_1}f^{(2m+2)}(x+z)$$

ne changent pas de signe depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$, *ces expressions* (63.) *étant du même signe*, nous obtiendrons facilement les formules suivantes:

$$64.\quad h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0)\} - \dots$$
$$\dots + (-1)^m \frac{B_{m-1} h^{2m-2}}{1.2....(2m-2)}\{f^{(2m-3)}(x_1) - f^{(2m-3)}(x_0)\}$$
$$+ (-1)^{m+1}.\,\Theta.\,\frac{B_m h^{2m}}{1.2....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\},$$

et si les expressions (63.) ont des signes contraires:

$$65.\quad h\Sigma_{x_0}^{x_1} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\{f(x_1) - f(x_0)\} + \frac{B_1 h^2}{1.2}\{f'(x_1) - f'(x_0) - \dots$$
$$\dots + (-1)^m \frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}$$
$$+ (-1)^{m+1}.\,\Theta.\,\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m h^{2m}}{1....2m}\{f^{(2m-1)}(x_1) - f^{(2m-1)}(x_0)\}.$$

La formule (64.) est précisement celle qui a été proposée par M. *Jacobi*; la dernière (je crois) ne peut être trouvée par les méthodes usitées.

§. III.

Nous ferons maintenant quelques applications du dernier des théorèmes proposés.

Première Application. Développement de Log $\Gamma(x)$.

En multipliant par dx la formule connue

$$\frac{d.\mathrm{Log}\,\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty dz\left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right),$$

et en intégrant par rapport à x, à partir de $x = 1$, on obtiendra

$$66.\quad \mathrm{Log}\,\Gamma(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{z}\left((x-1) - \frac{1-e^{-(x-1)z}}{1-e^{-z}}\right).$$

Supposons dans (62.) $h = 1$, on aura

$$67.\quad u'_x = \int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{z}\left((x-1) - \frac{1-e^{-(x-1)z}}{1-e^{-z}}\right) = \mathrm{Log}\,\Gamma(x),$$

d'où

$$u''_x = \int_0^\infty dz\left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right)$$

et en général, r étant > 2:

$$u_x^{(r)} = (-1)^r \int_0^\infty \frac{z^{r-z}.e^{-xz}}{1-e^{-z}}\,dz.$$

Cette supposition satisfera évidemment les conditions du théorème III.

A cause de

$$\Delta u_x = \int_0^h u'_{x+y}\, dy,$$

on aura pour le cas en question:

$$\Delta u_x = \int_0^h \operatorname{Log} \Gamma(x+y)\, dy$$

et en fesant $x + y = y_1 + 1$:

$$\Delta u_x = \int_0^1 \operatorname{Log} \Gamma(y_1+1)\, dy_1 + \int_1^x \operatorname{Log} \Gamma(y_1+1)\, dy_1 - \int_0^{x-1} \operatorname{Log} \Gamma(y_1+1)\, dy_1$$
$$= \int_0^1 \operatorname{Log} \Gamma(y_1+1)\, dy_1 + \int_1^x [\operatorname{Log} \Gamma(y_1+1) - \operatorname{Log} \Gamma(y_1)]\, dy,$$

c'est à dire:

$$\Delta u_x = \int_0^1 \operatorname{Log} \Gamma(y_1+1)\, dy_1 + \int_1^x \operatorname{Log} y_1\, dy_1;$$

d'où enfin, en vertu de la formule donnée par M. *Raabe,* savoir par la formule

$$\int_0^1 \operatorname{Log} \Gamma(y_1+1)\, dy_1 = \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi - 1,$$

on aura

$$\Delta u_x = \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi + x \operatorname{Log} x - x,$$

partant

$$\Delta u'_x = \operatorname{Log} x,$$

et en général, r étant > 1,

$$\Delta u_x^{(r)} = (-1)^r . \frac{\Gamma(r-1)}{x^{r-1}}.$$

Pour ces valeurs de u'_x, Δu_x, $\Delta u'_x$ etc., le théorème III. donne

$$\operatorname{Log} \Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi + (x - \tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} x - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_4}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1} B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\Theta}{x^{2m-1}},$$

ou, en y ajoutant $\operatorname{Log} x$:

68. $$\operatorname{Log} \Gamma(x+1) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\operatorname{Log} x - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5} - \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}} + \frac{(-1)^{m+1} B_m}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\Theta}{x^{2m-1}},$$

Θ étant un nombre entre 0 et 1. Cette formule a généralement lieu, quelle que soit la valeur positive de x. Ce n'est pas ainsi pour les résultats, que les méthodes ordinaires donnent pour le dévéloppement de $\operatorname{Log} \Gamma(x+1)$. Leur point de départ est ordinairement la formule

$$\operatorname{Log} \Gamma(x+1) = \operatorname{Log} 1 + \operatorname{Log} 2 + \dots + \operatorname{Log} x,$$

qui n'est rigoureusement le dévéloppement de $\operatorname{Log} \Gamma(x+1)$ que pour des valeurs entières de x. Quant aux analyses, qui ne sont pas sujettes à cette restriction (p. e. celle de M. *Cauchy* et celle de M. *Liouville*), elles n'ont lieu que pour ce dévéloppement en particulier, et n'ont point de rélation avec la formule sommatoire générale.

En posant, pour abréger:

$$M(x)=\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5}-\dots$$
$$\dots+\frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^{2m-3}}+\frac{(-1)^{m+1}B_m}{(2m-1).2m}\cdot\frac{\Theta}{x^{2m-1}},$$

on tirera de (68.), pour une valeur quelconque de $x>-1$, l'expression

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{M(x)};$$

et elle donnera successivement les relations suivantes:

$$\Gamma(x+1)>\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x},$$
$$\Gamma(x+1)<\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}},$$
$$\Gamma(x+1)>\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}},$$
$$\Gamma(x+1)<\sqrt{(2\pi x)}.x^x.e^{-x}.e^{\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x}}.e^{-\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{x^3}}.e^{\frac{B_3}{5.6}\cdot\frac{1}{x^5}}$$

etc.

Ces mêmes relations ont été dejà trouvées par M. *Raabe* pour des valeurs entières quelconques de x. Ce Geomètre finit son mémoire (Journ. de M. *Crelle* tom. XXV. pag. 159.) par les mots: „Sans doute elles subsistent „encore pour des valeurs fractionnaires et même incommensurables; mais je „n'ai pu réussir jusqu'à présent à démontrer cela rigoureusement."

Deuxième Application. Supposons dans (62.) $h=1$ et

$$69.\qquad u'_x=\text{Log.}\left\{\frac{\Gamma(a+x)}{\Gamma(b+x).\Gamma(a+x-b)}\right\},$$

où $a>b$; nous aurons facilement, en vertu de (66.):

$$u''_x=-\int_0^\infty dz\left[\frac{e^{-z}}{z}+\frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\left(e^{-az}-e^{-bz}-e^{-(a-b)z}\right)\right],$$

et généralement, si $r>2$:

$$u^{(r)}_x=(-1)^r\int_0^\infty\frac{z^{r-2}e^{-xz}}{1-e^{-z}}\left(e^{-bz}+e^{-(a-b)z}-e^{-az}\right)dz.$$

Cette expression satisfera évidemment les conditions du théorème III., d'où l'on conclut qu'en s'arrêtant dans le dévéloppement de (69.) à un certain terme, la valeur du reste ne sera pas moindre que celle du terme suivant. Ce dévéloppement s'obtiendra sans difficulté à l'aide de la formule (68.) et on aura:

$$\text{Log}\left\{\frac{\Gamma(a+x+1)}{\Gamma(b+x+1).\Gamma(a+x+1-b)}\right\} = -\tfrac{1}{2}\text{Log }2\pi + (a+x+\tfrac{1}{2})\text{Log}(a+x)$$
$$-(b+x+\tfrac{1}{2})\text{ Lg}(b+x) - (a+x-b+\tfrac{1}{2})\text{ Lg}(a+x-b) - x$$
$$+\frac{B_1}{1.2}q_1(x)\ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}q^{2m-2}(x) + \frac{(-1)^{m+1}\Theta.B_m}{(2m-1).2m}.q^{2m-1}(x),$$

où, pour abréger, on a posé:

$$q_r(x) = \frac{1}{(a+x)^r} - \frac{1}{(b+x)^r} - \frac{1}{(a+x-b)^r}.$$

Supposons $x = 0$; en écrivant q_r au lieu de $q_r(0)$ et fesons

$$N(q) = \frac{B_1}{1.2}\cdot q_1 - \frac{B_2}{2.4}q_3 + \ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}\cdot q_{2m-3} + \frac{(-1)^m.\Theta B_m}{(2m-1)2m}q_{2m-1},$$

nous aurons

$$\text{Log}\left\{\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)}\right\} = -\tfrac{1}{2}\text{Log }2\pi + (a+\tfrac{1}{2})\text{Log }a - (b+\tfrac{1}{2})\text{Log }b$$
$$-(a-b+\tfrac{1}{2})\text{Log}(a-b) + N(q),$$

et partant

$$70. \qquad \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)} = \sqrt{\left(\frac{a}{2\pi b(a-b)}\right)}\cdot\frac{a^a.e^{N(q)}}{b^b.(a-b)^{a-b}}.$$

Comme a et b sont des nombres entiers, cette formule donne la valeur du coëfficient du $(b+1)^{\text{me}}$ terme du dévéloppement de $(m+n)^a$.

Si $a = 2r$ et $b = r$, on obtiendra la valeur du coëfficient du terme moyen du développement de $(m+n)^{2r}$. En désignant ce coëfficient par F, on aura

$$F = \frac{2^{2r}}{\sqrt{(\pi r)}}.e^{-P(r)},$$

où

$$P(r) = \frac{2^2-1}{2}\cdot\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{2^4-1}{2^3}\cdot\frac{B_2}{3.4}\cdot\frac{1}{r^3} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m.\frac{2^{2m-2}-1}{2^{2m-3}}\cdot\frac{B_{m-1}}{(2m-3)(2m-1)}\cdot\frac{1}{r^{2m-3}}$$
$$+(-1)^{m+1}.\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m-1).2m}\cdot\frac{\Theta}{r^{2m-1}}.$$

Désignons par T le plus grand terme du développement de

$$(m+n)^{rm+rn},$$

on sait que ce terme est le $(m+1)^{\text{me}}$, c'est à dire que

$$T = Am^{rm}.n^{rn}.$$

Mais le coëfficient A s'obtiendra par (70.) en fesant $a = rm + rn$ et $b = rn$; donc, toutes les réductions faites, on aura:

$$71. \quad T = \sqrt{\left(\frac{m+n}{2rmn.\pi}\right)} . e^Q (m+n)^{rm+rn},$$

en posant, pour abréger:

$$Q = \frac{B_1}{1.2} v_1 - \frac{B_2}{3.4} v_2 + \ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)} v_{2m-3} + (-1)^{m+1} . \frac{\Theta . B_m}{(2m-1).2m} . v_{2m-1},$$

et généralement:

$$v_k = \frac{1}{r^k}\left\{\frac{1}{(m+n)^k} - \frac{1}{m^k} - \frac{1}{n^k}\right\}.$$

La formule (71.) donnera immédiatement

$$\frac{T}{(m+n)^{rm+rn}} = \sqrt{\left(\frac{m+n}{2rmn.\pi}\right)} . e^Q;$$

ce qui est l'expression du rapport du plus grand terme T du développement de $(m+n)^{rm+rn}$ à $(m+n)^{rm+rn}$. Avec la même facilité, comme nous avons obtenu la formule (70.), ayant pris pour point de départ la formule

$$u'_x = \text{Log}\left\{\frac{\Gamma(b+x).\Gamma(a+x-b)}{\Gamma(c+x).\Gamma(a+x-c)}\right\},$$

nous aurions aussi trouvé

$$\frac{\Gamma(b+1).\Gamma(a-b+1)}{\Gamma(c+1).\Gamma(a-c+1)} = \sqrt{\left(\frac{b(a-b)}{c(a-c)}\right)} . \frac{b^b.(a-b)^{a-b}}{c^c.(a-c)^{a-c}} . e^{N(p)},$$

en posant

$$N(p) = \frac{B_1}{1.2} . p_1 - \frac{B_2}{3.4} . p_3 + \ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)} p_{2m-3} + \frac{(-1)^{m+1}\Theta . B_m}{(2m-1).2m} p_{2m-1},$$

et généralement

$$p_k = \frac{1}{b^k} + \frac{1}{(a-b)^k} - \frac{1}{c^k} - \frac{1}{(a-c)^k}.$$

Si a, b, c sont des nombres entiers, la formule (72.) donnera l'expression du rapport entre le $(c+1)^{me}$ et le $(b+1)^{me}$ terme du développement de $(m+n)^a$, savoir:

$$\sqrt{\left(\frac{b(a-b)}{c(a-c)}\right)} . \frac{b^b(a-b)^{a-b}}{c^c(a-c)^{a-c}} . \frac{n^{c-b}}{m^{c-b}} . e^{N(p)}.$$

Les expressions, que nous venons de trouver, sont d'une grande importance pour le calcul des probabilités, et ont été proposée par *Laplace*. Mais cet illustre analyste n'a pas remarqué que les séries dont il s'agit, sont divergentes, et que leur emploi n'est pas légitimé, à moins que les limites des termes complémentaires ne soient pas determinées. C'est ce qui peut toujours être effectué à l'aide de nos formules.

Troisième Application. En posant suivant M. *Legendre*:

$$\frac{d.\mathrm{Lg}\,\Gamma(x)}{dx} = \int_0^\infty dz \left(\frac{e^{-z}}{z} - \frac{e^{-xz}}{1-e^{-z}}\right) = Z'(x),$$

et fésant dans (62.) $h = 1$ et

$$73. \quad u'_x = Z'(n+1-x) - Z'(n+x) = -\int_0^\infty \frac{dz}{1-e^{-z}}(e^{-(n+1-x)z} - e^{-(n+x)z}),$$

nous aurons généralement:

$$u_x^{(r)} = -\int_0^\infty \frac{z^{r-1}\,dz}{1-e^{-z}} e^{-(n+1-x)z} + (-1)^r . e^{-(n+x)z}),$$

d'où l'on voit que les conditions du théorème III. sont satisfaites. De plus la formule (73.) donne

$$\Delta u_x = \int_0^1 u'_{x+y}\,dy = \mathrm{Log}\,\frac{n-x}{n+x},$$

et généralement

$$\Delta u_x^{(r)} = (-1)^r \Gamma(r) . b_r,$$

en fesant, pour abréger:

$$74. \quad b_r = \frac{1}{(x+n)^r} - \frac{1}{(x-n)^r}.$$

Par ces valeurs de u'_x, Δu_x, $\Delta u'_x$, etc. et à l'aide de la formule connue

$$75. \quad Z'(1+a) = \frac{1}{a} + Z'(a)$$

on tirera immédiatement de (62.):

$$76. \quad Z'(n-x) - Z'(n+x) = \mathrm{Log}\,\frac{n-x}{n+x} - \frac{x}{n^2-x^2} + \frac{B_1}{2} b_2 - \frac{B_2}{4} b_4 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^m \frac{B_{m-1}}{2m-2} b_{2m-2} + (-1)^{m+1} . \frac{B_m}{2m} . \Theta . b_{2m},$$

b_r étant déterminé par (74.). La formule (76.) subsiste pour toutes les valeurs positives ou négatives de x, numériquement inférieures à n.

Soit k un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur n'est pas supérieure à n; x étant tel que

$$k > x > k-1,$$

on aura en vertu de (75.):

$$Z'(n-x) = \overset{i=k-1}{\underset{i=k}{S}} \frac{1}{i-x} + Z'(k-x),$$

$$Z'(n+x) = \overset{i=k-1}{\underset{i=k}{S}} \frac{1}{i+x} + \overset{i=k-1}{\underset{i=(k-1)}{S}} \frac{1}{i+x} + Z'(1-(k-x))$$

$$= \frac{1}{x} + \overset{i=k-1}{\underset{i=k}{S}} \frac{1}{i+x} - \overset{i=k-1}{\underset{i=(k-1)}{S}} \frac{2x}{i^2-x^2} + Z'(1-(k-x)),$$

d'où, en soustrayant:

$$Z'(n-x) - Z'(n+x) = Z'(k-x) - Z'(1-(k-x)) - \frac{1}{x} - \overset{i=k-1}{\underset{i=1}{S}} . \frac{2x}{i^2-x^2}.$$

En substituant cette valeur dans (76.), et en se rappélant que $k > x > k-1$, et de plus que

$$Z'(k-x) - Z'(1-(k-x)) = -\varpi \operatorname{Cotang}(k-x)\pi = \varpi \operatorname{Cotang} \varpi x,$$

on aura

$$77. \quad \varpi \operatorname{Cotang} \varpi x = \operatorname{Log} \frac{n-x}{n+x} + \frac{1}{x} - \frac{x}{n^2-x^2} - \overset{i=n-1}{\underset{i=1}{S}} \frac{2x}{i^2-x^2}$$

$$+ \frac{B_1}{2}.b_2 + \frac{B_2}{4} b_4 + \ldots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{2m-2} b_{2m-2} + \frac{(-1)^{m+1} B_m}{2m}.\Theta.b_{2m},$$

où b_r est donné par (74.). Cette formule a lieu pour toutes les valeurs (positives ou négatives) non entières de x, et non pas supérieures à n. Dans le cas où

x est un nombre entier $< n$,

les deux membres de (77.) deviennent infinis; mais on démontrera facilement, que si x converge vers un membre entier μ, le rapport des deux membres convergera vers l'unité. Donc, généralement la formule (77.) subsistera pour toutes les valeurs positives et négatives de $x < n$.

De cette formule générale, qui (je crois) n'a pas été proposée jusqu'ici, on tirera, en fesant $n = \infty$, la formule connue

$$\varpi \operatorname{Cotang} \varpi x = \frac{1}{x} - \overset{i=\infty}{\underset{i=1}{S}} \frac{2x}{i^2-x^2}.$$

Quatrième Application. En fesant dans (62.) $h = 1$ et

$$u'_x = \operatorname{Log}\left(\frac{\Gamma(x-y).\Gamma(x+y)}{[\Gamma(x)]^2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}dz}{1-e^{-z}}(e^{yz} + e^{-yz} - 2)$$

$$(x > y),$$

les conditions du théorème III. sont satisfaites. Il suit delà que si dans le développement on s'arrète à un certain terme, la valeur du reste sera inférieure à celle du terme suivant. Donc, en fesant $x =$ un nombre entier n, on tirera de (68.):

$$78.\quad \text{Log}\left(\frac{\Gamma(n-y).\Gamma(n+y)}{[\Gamma(n)]}\right) = (n-\tfrac{1}{2})\,\text{Log}\,(1-\tfrac{y^2}{n^2}) - y\,\text{Log}\,\frac{n-y}{n+y} + L,$$

en posant pour abréger:

$$L = \frac{B_1}{1.2}a_1 - \frac{B_2}{3.4}a_3 + \dots + \frac{(-1)^m B_{m-1}}{(2m-3)(2m-2)}a_{2m-2} + \frac{(-1)^{m+1}B_m}{(2m-1).2m}.\Theta.a_{2m-1},$$

et généralement

$$a_r = \frac{1}{(n+y)^r} + \frac{1}{(n-y)^r} - \frac{2}{n^r}.$$

La formule (78.) subsiste pour toutes les valeurs positives ou nègatives de x, inférieures à n.

Soit k un nombre entier positif ou négatif, dont la valeur numérique n'est pas supérieure à n, et soit y tel que

$$k > y > k-1,$$

on aura en vertu d'une propriété connue de la fonction Γ:

$$\text{Log}\,\Gamma(n-y) = \text{Log}\,\Gamma(k-y) + \tfrac{1}{2}\mathop{S}_{i=1}^{i=n-1}\text{Log}(i-y)^2,$$

$$\text{Log}\,\Gamma(n-y) = \text{Log}\,\Gamma(1-(k-y)) + \tfrac{1}{2}\text{Log}\,y^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathop{S}_{i=k}^{i=n-1}\text{Log}(i+y)^2 + \tfrac{1}{2}\mathop{S}_{i=1}^{i=n-1}\text{Log}(i^2-y^2)^2$$

et partant

$$\text{Log}\,\Gamma(n-y).\Gamma(n+y) = \text{Log}\,\Gamma(k-y).\text{Log}\,\Gamma(1-(k-y)) + \tfrac{1}{2}\text{Log}\,y^2$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathop{S}_{i=1}^{i=n-1}\text{Log}\,(i^2-y^2)^2.$$

En substituant cette valeur dans (78.) et en se rappelant que

$$\Gamma(k-y).\Gamma(1-(k-y)) = \frac{\pi}{\text{Sin}\,(k-y)\pi},$$

on obtiendra

$$\tfrac{1}{2}\text{Log}\,\frac{\pi^2}{\text{Sin}^2(k-y)\pi} = 2\,\text{Log}\,n - \tfrac{1}{2}\text{Log}\,y^2 - \tfrac{1}{2}\mathop{S}_{i=1}^{i=n-1}\text{Log}\,(i^2-y^2)^2 \dots$$
$$\dots + (n-\tfrac{1}{2})\,\text{Log}\,(1-\tfrac{y^2}{n^2}) - y\,\text{Log}\,\frac{n-y}{n+y} + L,$$

d'où

$$\mathrm{Sin}^2 \pi y = \pi^2 y^2 (1-y^2)^2.(1-\frac{y^2}{4})^2 \ldots (1-\frac{y^2}{(n-1)^2})^2 \cdot \frac{e^{-L}}{(1-\frac{y^2}{n^2})^{2n-1}} \cdot \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^{2y},$$

et enfin

$$\mathrm{Sin}\ \pi y = \pi y (1-y^2)(1-\frac{y^2}{4}) \ldots (1-\frac{y^2}{(n-1)^2}) \cdot \frac{e^{-L}}{(1-\frac{y^2}{n^2})^{n-\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^{y}:$$

formule qui a lieu pour toutes les valeurs positives ou négatives de y, inférieures à n.

De cette formule remarquable, qui (je crois) n'a pas été encore proposé, on tirera immédiatement, en fesant $n = \infty$, la formule connue

$$\mathrm{Sin}\ \pi y = \pi y (1-y^2)(1-\frac{y^2}{4})(1-\frac{y^2}{9})(1-\frac{y^2}{16}) \ldots$$

Upsala le 20 Avril 1846.