5.

Bemerkungen zu einer gewissen Methode, die Gleichung eines durch vier Puncte gehenden Kegelschnitts auszudrücken.

(Von dem Herrn Dr. *Arndt* in Stralsund.)

1.

Sind

1. $y-ax-b=0, \quad y-a_1x-b_1=0, \quad y-a_2x-b_2=0, \quad y-a_3x-b_3=0$

die Gleichungen der auf einander folgenden Seiten eines Vierecks, die sich auch durchkreuzen können, so wird die Gleichung eines durch die vier Spitzen desselben gelegten Kegelschnitts durch

2. $(y-ax-b)(y-a_2x-b_2)+\lambda(y-a_1x-b_1)(y-a_3x-b_3)=0$

ausgedrückt, wo λ eine willkürliche Constante ist. Diese Methode, die Gleichung eines um ein Viereck beschriebenen Kegelschnitts darzustellen, vereinfacht bekanntlich die Beweise einiger, auf andere Art nur umständlicher zu erlangender Theoreme über Linien zweiten Grades. Es ist jedoch nach meiner Meinung die *Möglichkeit* jener Darstellung nicht vollständig nachgewiesen. Es pflegt wie folgt geschlossen zu werden (Vgl. *Magnus* Sammlung von Aufgaben aus der analyt. Geometrie. Thl. 1. S. 147—48. Berlin 1833.): „Dass die Gleichung (2.) eine Linie zweiten Grades ausdrückt, in welcher die vier Durchschnittspuncte der durch die Gleichung (1.) characterisirten Geraden sich befinden, erhellet leicht. Nimmt man nun in dem gegebenen Kegelschnitt noch einen fünften Punct an, so kann λ so bestimmt werden, dass die Coordinaten dieses Puncts der Gleichung (2.) genügen, weil, wenn man jene in diese für x und y setzt, die resultirende Gleichung in Beziehung auf λ vom ersten Grade ist und also für λ einen reellen Werth giebt. Ist λ bestimmt, so drückt die Gleichung (2.) den gegebenen Kegelschnitt wirklich aus, indem durch fünf Puncte *nur eine* Linie zweiten Grades gelegt werden kann."

Für die Ellipse und ungleichseitige Hyperbel, welche durch *nicht weniger* als fünf Puncte bestimmt werden, gelten die Schlüsse vollkommen: nicht für die Parabel und die gleichseitige Hyperbel, welche schon durch *vier*, und für die Kreislinie, welche schon durch *drei* Puncte bestimmt wird.

Bezeichnet man die Gleichung (2.), in entwickelter Form, durch $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$, für welche dann

$$3.\quad \begin{cases} A=l+\lambda, \\ -2B=a+a_2+\lambda(a_1+a_3), \\ C=aa_2+\lambda a_1 a_3, \\ -2D=b+b_2+\lambda(b_1+b_3), \\ 2E=ab_2+a_2 b+\lambda(a_1 b_3+a_3 b_1), \\ F=bb_2+\lambda b_1 b_3 \end{cases}$$

ist, so muss für die Parabel $B^2-AC=0$, für die gleichseitige Hyperbel $A-2B\cos\varphi+C=0$, und für den Kreis $C=A$ und $B=A\cos\varphi$ sein, indem φ den Coordinatenwinkel bezeichnet.

Die Gleichung $B_2-AC=0$ wird nach (3.) in Beziehung auf λ vom zweiten Grade sein und kann unter Umständen zwei imaginäre Wurzeln haben. Dann ist nachzuweisen, dass dieser Fall nur eintritt, wenn durch die vier Puncte überhaupt keine Parabel gelegt werden kann. Die Gleichung $A-2B\cos\varphi+C=0$ wird in Beziehung auf λ zwar vom ersten Grade sein, allein es könnte λ unendlich werden. Soll endlich durch die vier Puncte ein Kreis gehen, so muss λ den beiden Gleichungen $C=A$ und $B=A\cos\varphi$ genügen, und man gelangt zu einer Relation zwischen den Grössen a, a_1, etc., b, b_1, etc., von welchen nachzuweisen ist, dass sie die Bedingungsgleichung für den Umstand ausdrückt, dass die vier Puncte in einer Kreislinie liegen.

Bei der speciellen Erörterung dieser Umstände wird sich zugleich die Bestimmung der Lage der vier Puncte ergeben, damit ein bestimmter Kegelschnitt durch sie hindurchgehen könne; so wie das merkwürdige Resultat, dass um ein Parallelogramm *keine*, um ein Trapez *eine* und um jedes andere Viereck *zwei* Parabeln gelegt werden können; worauf meines Wissens noch nicht hingewiesen worden ist.

2.

Zuvörderst ist die gegenseitige Lage der vier Puncte, wenn ein bestimmter Kegelschnitt durch sie hindurchgehen soll, festzustellen.

Man nehme zwei Gegenseiten des gegebenen Vierecks (zu welchen auch die Diagonalen gehören) als Coordinatenaxen an, und bezeichne die Abscissen der in der Axe der x liegenden Puncte durch a, a_1, die Ordinaten der in der Axe der y liegenden Puncte durch β, β_1. Substituirt man diese Coordinaten in die Gleichung $Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$, so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$C\alpha^2+2E\alpha+F=0, \qquad C\alpha_1^2+2E\alpha_1+F=0,$$
$$A\beta^2+2D\beta+F=0, \qquad A\beta_1^2+2D\beta_1+F=0,$$

aus welchen sich

$$4. \quad C=\frac{F}{\alpha\alpha_1}, \quad A=\frac{F}{\beta\beta_1}, \quad E=-\frac{F(\alpha+\alpha_1)}{2\alpha\alpha_1}, \quad D=-\frac{F(\beta+\beta_1)}{2\beta\beta_1}$$

ergiebt. Der Kürze wegen wollen wir $F=1$ setzen.

a) Bilden nun die vier Puncte ein *convexes* Viereck (welches keinen einspringenden Winkel hat; jedes andere Viereck soll *concav* genannt werden), so überzeugt man sich durch eine Figur leicht, dass $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, das Product $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$ also negativ ist. In diesem Falle ist B^2-AC positiv für jedes beliebige B, und folglich können um ein convexes Viereck *nur* Hyperbeln, und zwar unendlich viele gelegt werden; wegen der gänzlichen Unbestimmtheit von B. Eine dieser Hyperbeln wird *gleichseitig* sein; nämlich die, für welche $A-2B\cos\varphi+C=0$ oder $B=\frac{A+C}{2\cos\varphi}$ ist. Für $\varphi=90^0$ ist $A+C=0$, d. h. $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0$. Findet diese Relation nicht Statt, so ist die Hyperbel ungleichseitig: findet sie Statt, so sind *alle* durch die vier Puncte gelegten Hyperbeln gleichseitig.

b) Bilden die vier Puncte ein *concaves* Viereck, so haben $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ dasselbe Vorzeichen; das Product $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$ ist positiv und es kann B so bestimmt werden, dass B^2-AC entweder <0, oder >0, oder $=0$ wird.

1) Ist für B ein Werth angenommen, für welchen $B^2-AC<0$ ist, so wird die Curve eine Ellipse sein, wenn $H^2-GI>0$ ist, wo $G=B^2-AC$, $H=BD-AE$, $I=D^2-AF(F=1)$. Man findet I stets positiv, nämlich $I=\left(\frac{\beta-\beta_1}{2\beta\beta_1}\right)^2$, also ist (weil $G<0$) $GI<0$, $H^2-GI>0$, und um ein concaves Viereck können also unendlich viele Ellipsen gelegt werden.

2) Für einen Werth von B, der $B^2-AC>0$ macht, wird im Allgemeinen H^2-GI nicht verschwinden; so dass also um ein concaves Viereck unendlich viele Hyperbeln gelegt werden können.

3) Die Bedingungsgleichung für die Parabel $B^2-AC=0$ giebt zwei reelle Werthe von B, nämlich $B=\pm\sqrt{\frac{1}{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}$; jedoch entspricht nicht immer jedem derselben eine Parabel, da $H=BD-AE$ verschwinden kann. Man

erhält $H=\frac{1}{2\beta\beta_1}\left(\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha\alpha_1}\mp\frac{\beta+\beta_1}{\sqrt{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}\right)$. Ist die Figur ein Parallelogramm, so wird (wenn man die Diagonalen zu Axen genommen hat) $\alpha+\alpha_1=0$, $\beta+\beta_1=0$ und $H=0$ sein: folglich kann um ein Parallelogramm keine Parabel beschrieben werden. Diesen Fall ausgenommen, kann H für das untere Vorzeichen nicht verschwinden, indem, wenn zwei Gegenseiten, welche Seiten der Figur selbst sind, zu Axen genommen werden, die Grössen α, α_1 und β, β_1 als positiv betrachtet werden dürfen. Endlich ist zu untersuchen, ob H für das obere Vorzeichen verschwinden könne. Die Bedingungsgleichung ist $\frac{\alpha+\alpha_1}{\alpha\alpha_1}=\frac{\beta+\beta_1}{\sqrt{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}$ oder $\frac{(\alpha+\alpha_1)^2}{\alpha\alpha_1}=\frac{(\beta+\beta_1)^2}{\beta\beta_1}$. Diese Gleichung lässt sich auf die Form $(\alpha\beta-\alpha_1\beta_1)\times(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=0$ bringen, also ist entweder $\alpha\beta=\alpha_1\beta_1$, oder $\alpha\beta_1=\alpha_1\beta$. Aber das erste findet nicht Statt, wenn die Coordinaten so unterschieden werden, dass $\alpha_1>\alpha$, $\beta_1>\beta$ ist, und es bleibt nur $\alpha\beta_1=\alpha_1\beta$, oder $\alpha:\alpha_1=\beta:\beta_1$. Diese Bedingung entspricht dem *Paralleltrapez*, und es hat sich also ergeben, dass um ein Paralleltrapez nur *eine* Parabel (für welche B nur den *einen* Werth $-\sqrt{\frac{1}{\alpha\alpha_1\beta\beta_1}}$ hat), um ein Viereck dagegen, in welchem keine zwei Seiten parallel sind, stets *zwei* Parabeln beschrieben werden können.

4) Für die gleichseitige Hyperbel muss $A-2B\cos\varphi+C=0$ ($A+C=0$ für $\varphi=90^0$) sein. Ist φ nicht 90^0, so kann man B so bestimmen, dass die erste Gleichung Statt findet: ist dagegen $\varphi=90^0$, so ist $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0$; und diese Relation kann nie Statt finden, weil $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ dasselbe Vorzeichen haben, so dass also um ein concaves Viereck, in welchem zwei Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, keine gleichseitige Hyperbel gelegt werden kann.

5) Soll endlich eine Kreislinie durch die vier Puncte gehen, so muss $C=A$ und $B=A\cos\varphi$, d. h. $\alpha\alpha_1=\beta\beta_1$, und $B=\frac{1}{\alpha\alpha_1}\cos\varphi$ sein, und die Gleichung der Curve ist

$$y^2+2xy\cos\varphi+x^2-(\beta+\beta_1)y-(\alpha+\alpha_1)x+\alpha\alpha_1=0.$$

Sind t und u die Coordinaten des Mittelpuncts, so ist bekanntlich $Au+Bt+D=0$ und $Bu+Ct+E=0$, d. h.

$$u+t\cos\varphi=\tfrac{1}{2}(\beta+\beta_1),$$
$$t+u\cos\varphi=\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha_1).$$

Dies sind die Gleichungen *derjenigen* Geraden, welche auf den als Axen angenommenen Gegenseiten in ihren Mittelpuncten senkrecht stehen, und der Durchschnitt derselben giebt des Kreises Mittelpunct. Die Relation $\alpha\alpha_1 = \beta\beta_1$ (ein bekannter Satz) ist die Gleichung für die Bedingung, dass die vier Puncte in einer Kreislinie liegen; für das Parallelogramm kann sie nur dann erfüllt werden, wenn es rechtwinklig ist; wie leicht zu sehen.

3.

Wir wenden uns nun zu der Bedeutung der Gleichung (2.). Aus den Gleichungen (3.) erhält man nach einer leichten Rechnung:

$$5.\quad 4(B^2-AC)=\lambda^2(a_1-a_3)^2+2\lambda[(a+a_2)(a_1+a_3)-2aa_2-2a_1a_3]+(a-a_2)^2$$
$$=\lambda^2(a_1-a_3)^2+2\lambda[(a-a_2)(a_1-a_3)-2(a-a_3)(a_2-a_3)]+(a-a_2)^2,$$

welche Gleichung die Form

$$5^*.\quad 4(B^2-AC)=g\lambda^2+2h\lambda+i$$

hat, indem $g=(a_1-a_3)^2$, $h=(a-a_2)(a_1-a_3)-2(a-a_1)(a_2-a_3)$, $i=(a-a_2)^2$ ist. Das Vorzeichen der Function $g\lambda^2+2h\lambda+i=\frac{1}{g}[(g\lambda+h)^2-(h^2-gi)]$ ist $+$, für jeden beliebigen Werth von λ, wenn $h^2-gi<0$; und in diesem Falle drückt die Gleichung (2.) unendlich viele Hyperbeln und niemals eine Ellipse oder Parabel aus. Es findet sich

$$6.\quad h^2-gi=4T,\quad T=(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a)$$

und $T<0$, statt der Bedingung $h^2-gi<0$. Verschwinden kann T nicht, indem keiner der vier Factoren Null werden kann; nämlich deshalb, weil je zwei auf einander folgende Seiten des Vierecks verschiedene Richtungen haben. Ist $T<0$, so verschwindet B^2-AC für zwei Werthe von λ, nämlich für

$$7.\quad \lambda=\frac{2(a-a_1)(a_2-a_3)-(a-a_2)(a_1-a_3)\pm2\sqrt{T}}{(a_1-a_3)^2},$$

und diese beiden Werthe sind stets verschieden, weil T nicht verschwinden kann. Dies Resultat hat aber keine Beziehung auf den Fall $a_1-a_3=0$; denn dann reducirt sich die Function $g\lambda^2+2h\lambda+i$ auf $2h\lambda+i$ und man erhält für λ nur den einen Werth:

$$8.\quad \lambda=\frac{(a-a_2)^2}{4(a-a_1)(a_2-a_1)}.$$

Wenn g nicht Null ist, wird die Function $g\lambda^2+2h\lambda+i$ negativ für alle stetig auf einander folgenden Werthe von λ, die zwischen den beiden Werthen (7.) liegen, und positiv für die übrigen. Ist $g=0$, so wird $2h\lambda+i$ positiv für $\lambda \gtrless -\frac{i}{2h}$, je nachdem h positiv oder negativ ist, und resp. negativ für $\lambda \lessgtr -\frac{i}{2h}$.

In dem Falle $T>0$ drückt also die Gleichung (2.) unendlich viele Ellipsen, Hyperbeln, oder zwei Parabeln aus (zum Theil auch eine), je nachdem der Werth für λ gewählt ist.

4.

Lage der vier Puncte, wie sie dem Vorzeichen von T *entspricht.*

Zunächst lässt sich zeigen, dass das Vorzeichen der Grösse T von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist. Beziehen sich nämlich die Gleichungen (1.) auf ein System, dessen Coordinatenwinkel φ ist, und bezeichnet man die Winkel, welche die Axen des neuen Systems mit der Axe der x bilden, durch ξ und η, so ist bekanntlich

$$x=\frac{x_1\sin(\varphi-\xi)+y_1\sin(\varphi-\eta)}{\sin\varphi},\qquad y=\frac{x_1\sin\xi+y_1\sin\eta}{\sin\varphi},$$

und die Gleichung der ersten Seite des Vierecks in Bezug auf das neue System, ist $y_1-\mathfrak{a}x_1-\mathfrak{b}=0$, indem

$$\mathfrak{a}=\frac{a\sin(\varphi-\xi)-\sin\xi}{\sin\eta-a\sin(q-\eta)}.$$

Ist $y_1-\mathfrak{a}_1x_1-\mathfrak{b}_1=0$ die Gleichung der zweiten Seite des Vierecks, so ist eben so

$$\mathfrak{a}_1=\frac{a_1\sin(\varphi-\xi)-\sin\xi}{\sin\eta-a_1\sin(\varphi-\eta)},$$

folglich

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1=\frac{P(a-a_1)}{[\sin\eta-a\sin(\varphi-\eta)]\,[\sin\eta-a_1\sin(\varphi-\eta)]},$$

$$\text{wo}\quad P=\sin\eta\,\sin(\varphi-\xi)-\sin\xi\,\sin(\varphi-\eta).$$

Aehnliche Ausdrücke erhält man für $\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a}$, und es ergiebt sich

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2)(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3)(\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a})$$
$$=\frac{P^4}{Q^2.Q_1^2.Q_2^2.Q_3^2}(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a),$$

wo $Q=\sin\eta-a\sin(\varphi-\eta)$, $Q_1=\sin\eta-a_1\sin(\varphi-\eta)$, $Q_2=\sin\eta-a_2\sin(\varphi-\eta)$, $Q_3=\sin\eta-a_3\sin(\varphi-\eta)$ ist. Daraus folgt, dass die Grösse T ihr Vorzeichen bei der Veränderung des Coordinatensystems nicht ändert.

1) Bilden nun die vier Puncte ein convexes Viereck, so muss T negativ sein. Da diese Behauptung nur für irgend ein Coordinatensystem nachzuweisen ist, so nehme man die ausserhalb des Vierecks liegende Diagonale zur Axe der x an, und als den positiven Theil derselben den über den vierten Punct hinaus verlängerten Theil der Diagonale. Bezeichnen dann μ, μ_1, μ_2, μ_3 die

Winkel, welche die auf einander folgenden Seiten mit dem positiven Theile der Axe der x bilden, so ist $a = \text{tang}\,\mu$, $a_1 = \text{tang}\,\mu_1$, etc. und

$$(a-a_1)(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a) = \frac{\sin(\mu-\mu_1)\sin(\mu_1-\mu_2)\sin(\mu_2-\mu_3)\sin(\mu_3-\mu)}{(\cos\mu\cos\mu_1\cos\mu_2\cos\mu_3)^2},$$

Es wird nun $\mu-\mu_1<0$, $\mu_1-\mu_2<0$, $\mu_2-\mu_3<0$, $\mu_3-\mu>0$, folglich das Product der Sinusse negativ, und also T ebenfalls negativ.

2) Liegen die vier Puncte in einem concaven Viereck, so muss T positiv sein. Denn nimmt man eine Diagonal zur Axe der x an, und ihren positiven Theil eben wie in (1), so wird $\mu-\mu_1<0$, $\mu_1-\mu_2>0$, $\mu_2-\mu_3<0$, $\mu_3-\mu>0$, also $T>0$.

5.

Lehrsatz.

Jede Linie zweiten Grades, die um das Viereck beschrieben wird, dessen Seiten die Gleichungen (1.) *ausdrücken, kann auf die Form* (2.) *gebracht werden.*

Beweis.

I. Die gegebene Curve sei eine *Ellipse*. Da nach (§. 2.) um ein convexes Viereck keine Ellipse gelegt werden kann, so ist dasselbe *concav*, und nach (§. 4.) ist $T>0$. Die Gleichung (2.) drückt daher, wenn man die unendlich vielen Werthe von λ zwischen den oben näher bestimmten Grenzen nimmt, unendlich viele Ellipsen aus, welche durch die vier Puncte gehen. Unter diesen muss die gegebene Ellipse sich befinden; denn nimmt man einen fünften Punct der letztern an und bestimmt λ so, dass die Coordinaten dieses Puncts der Gleichung (2.) genügen, so kann dieselbe keine Hyperbel oder Parabel ausdrücken, weil sonst durch fünf Puncte zwei Kegelschnitte verschiedener Art möglich wären.

II. Der Beweis für die *ungleichseitige Hyperbel* ist dem vorigen ganz ähnlich.

III. *Parabel.* *a*) Ist das Viereck ein *Parallelogramm*, also $a-a_2=0$, $a_1-a_3=0$, so verschwindet B_2-AC für $2\lambda = -4(a-a_1)(a_2-a_3)\lambda = 0$, folglich für $\lambda=0$. Es ergiebt sich aber $BD-AE=0$ und die Gleichung (2.) drückt keine Parabel aus. Nach (§. 2.) ist indessen um ein Parallelogramm überhaupt keine Parabel möglich.

b) Ist das Viereck ein *Trapez*, oder $a_1-a_3=0$, und setzt man für λ den Werth (8. §. 3.), so stellt die Gleichung (2.) eine Parabel vor, und diese muss die gegebene sein, weil nach (§. 2.) um ein Trapez nur *eine* Parabel beschrieben werden kann.

c) Ist das Viereck *concav*, und sind keine zwei Seiten desselben parallel, so dass $T>0$, so geben die beiden Werthe von λ in (7. §. 3.) zwei Parabeln, und eine derselben muss mit der gegebenen übereinstimmen, weil um das erwähnte Viereck nicht mehr als zwei Parabeln gelegt werden können.

d) Ist das Viereck endlich *convex*, also $T<0$, so werden die Werthe von λ in (7.) imaginär; indessen ist nach (§. 2.) um ein solches Viereck keine Parabel möglich. Liegen also vier Puncte wirklich in einer Parabel, so kann sie durch die Gleichung (2.) dargestellt werden.

IV. *Gleichseitige Hyperbel.* Die Bedingungsgleichung $A - 2B\cos\varphi + C = 0$ wird erfüllt, wenn $[1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3]\lambda + 1 + \cos\varphi(a+a_2) + aa_2 = 0$, oder wenn, unter der Voraussetzung, dass $1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3$ nicht verschwindet, $\lambda = -\frac{1+\cos\varphi(a+a_2)+aa_2}{1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3}$ ist. In diesem Fall drückt die Gleichung (2.) eine gleichseitige Hyperbel aus, wenn für λ der eben gegebene Werth gesetzt wird, und dies muss die gegebene Curve sein, weil durch vier Puncte (§. 2.) *nur eine* gleichseitige Hyperbel möglich ist. Ist aber $1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3=0$, und $1+\cos\varphi(a+a_2)+aa_2$ nicht Null, so wird λ unendlich, und es stehen wegen der ersten Bedingung zwei Gegenseiten des Vierecks auf einander senkrecht, die beiden andern, wegen der zweiten Bedingung, nicht. Ferner sieht man leicht, dass dieser Fall eintritt, wenn in (§. 2.) $\alpha\alpha_1+\beta\beta_2 \gtrless 0$ ist; folglich ist dann keine gleichseitige Hyperbel möglich. Ist endlich $1+\cos\varphi(a_1+a_3)+a_1a_3=0$ und auch $1+\cos\varphi(a+a_2)+aa_2=0$, so dass also je zwei Gegenseiten auf einander senkrecht sind (was nur bei dem convexen Viereck sein kann) und die Bedingung $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=0$ (§. 2.) erfüllt wird, wie aus geometrischen Betrachtungen erhellt, so bleibt λ unbestimmt, und alle Hyperbeln durch die vier Puncte sind gleichseitig.

V. *Die Kreislinie.* Aus den Bedingungen $C=A$, $B=A\cos\varphi$ folgt $1+\lambda = aa_2+\lambda a_1a_3$, $2\cos\varphi(1+\lambda) = -\{a+a_2+\lambda(a_1+a_3)\}$ und $\lambda = -\frac{1-aa_2}{1-a_1a_3} = -\frac{a+a_2+2\cos\varphi}{a_1+a_3+2\cos\varphi}$; also die Relation

$$\frac{1-aa_2}{1-a_1a_3} = \frac{a+a_2+2\cos\varphi}{a_1+a_3+2\cos\varphi},$$

oder

$$\frac{1+(a+a_1)\cos\varphi+aa_1}{a-a_1} = -\frac{1+(a_2+a_3)\cos\varphi+a_2a_3}{a_2-a_3}.$$

Wird diese Bedingung erfüllt, so bezeichnet die Gleichung (2.) eine Kreislinie, und zwar die gegebene, weil nicht zwei oder mehrere Kreislinien durch vier Puncte hindurchgehen können. Findet die Bedingung nicht Statt, so drückt die Gleichung (2.) auch keine Kreislinie aus, und es ist nachzuweisen, dass unter dieser Voraussetzung durch die vier Puncte überhaupt keine Kreislinie möglich ist.

Die vorhergehende Bedingungsgleichung, welche sich leicht auf die Form

$$9. \quad (a_2-a_3)(1+aa_1)+(a-a_1)(1+a_2a_3)$$
$$+\cos\varphi[(a+a_1)(a_2-a_3)+(a-a_1)(a_2+a_3)]=0$$

bringen lässt, gelte für irgend ein rechtwinkliges System; es sei also $(a_2-a_3)(1+aa_1)+(a-a_1)(1+a_2a_3)=0$, so muss sie auch für jedes andere rechtwinklige System Statt finden. Die Coordinatenverwandlung giebt

$$x = x_1\cos\xi - y_1\sin\xi, \qquad y = x_1\sin\xi + y_1\cos\xi,$$

wo x den von der Axe der x_1 und der Axe der x eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Stellt man die Gleichung der ersten Seite des Vierecks für das neue System durch $y_1-\mathfrak{a}.x_1-b=0$ dar, so ergiebt sich

$$\mathfrak{a} = \frac{a\cos\xi-\sin\xi}{a\sin\xi+\cos\xi}.$$

Setzt man nun $p=a\sin\xi+\cos\xi$, $p_1=a_1\sin\xi+\cos\xi$, etc., so erhält man

$$\mathfrak{a}_2-a_3=\frac{a_2-a_3}{pp_1}, \qquad 1+\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1=\frac{1+aa_1}{p_2p_3};$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für $\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1$ und $1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3$. Daraus folgt

$$(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3)(1+\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)+(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)(1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3)=\frac{(a_2-a_3)(1+aa_1)+(a-a_1)(1+a_2a_3)}{pp_1p_2p_3}=0.$$

Dies gilt für jede Lage der Axe der y_1, wenn nur die Axe der x_1 darauf senkrecht steht. Verlegt man die Axe der x_1, während die Axe der y_1 ungeändert bleibt, so ist, nach einer leicht verständlichen Bezeichnung,

$$x_1 = x_2\cos\xi, \qquad y_1 = x_2\sin\xi + y_2,$$
$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\cos\xi - \sin\xi,$$

folglich

$$s=(\mathfrak{a}'_2-\mathfrak{a}'_3)(1+\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_1)+(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}'_1)(1+\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'_3)+2\cos\varphi(\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'_2-\mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_3)$$
$$=(\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_3)\cos\xi[1+\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\cos\xi^2-(\mathfrak{a}+\mathfrak{a}_1)\sin\xi\cos\xi+\sin\xi^2]$$
$$+(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_1)\cos\xi[1+\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3\cos\xi^2-(\mathfrak{a}_2+\mathfrak{a}_3)\sin\xi\cos\xi+\sin\xi^2]$$
$$+2\cos\varphi[(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3)\cos\xi^2+(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}_2)\sin\xi\cos\xi].$$

Für $(a+a_1)(a_2-a_3)+(a-a_1)(a_2+a_3)$ kann man auch $2(aa_2-a_1a_3)$

schreiben. Erwägt man, dass der neue Coordinatenwinkel $\varphi = 90^0 - \xi$, oder $\xi - 90^0$, oder $540^0 - \xi$, also $\cos\varphi = \sin\xi$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{s}{\cos\xi} = & \ (a_2 - a_3)\,[1 + aa_1 \cos\xi^2 - (a+a_1)\sin\xi\cos\xi + \sin\xi^2] \\ & + (a - a_1)\,[1 + a_2 a_3 \cos\xi^2 - (a_2+a_3)\sin\xi\cos\xi + \sin\xi^2] \\ & + 2\,[(aa_2 - a_1 a_3)\sin\xi\cos\xi + (a_1 + a_3 - a - a_2)\sin\xi^2] \\ = & \ (a - a_1 + a_2 - a_3)\cos\xi^2 + [aa_1(a_2 - a_3) + a_2 a_3 (a - a_1)]\cos\xi^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{s}{\cos\xi^3} &= a - a_1 + a_2 - a_3 + aa_1(a_2 - a_3) + a_2 a_3 (a - a_1) \\ &= (a_2 - a_3)(1 + aa_1) + (a - a_1)(1 + a_2 a_3) = 0,\end{aligned}$$

folglich $s = 0$.

Demnach ist nur nachzuweisen, dass, wenn die vier Puncte in einer Kreislinie liegen, die Relation (9.) für irgend ein rechtwinkliges System Statt finde. Zu dem Ende nehme man eine Diagonale des Vierecks zur Axe der x an, so ist, wenn μ, μ_1, etc. die Winkel bezeichnen, welche die Seiten des Vierecks mit der Axe der x einschliessen, und A, B, C, D die Winkel der Figur sind: $\mu - \mu_1 = -B$, $\mu_2 - \mu_3 = -D$, $\tang(\mu - \mu_1) = \frac{a - a_1}{1 + aa_1} = -\tang B$ und $\tang(\mu_2 - \mu_3) = \frac{a_2 - a_3}{1 + a_2 a_3} = -\tang D$; ferner $B + D = 180^0$, $\tang B = -\tang D$, also $\frac{a - a_1}{1 + aa_1} = -\frac{a_2 - a_3}{1 + a_2 a_3}$, oder $(a_2 - a_3)(1 + aa_1) + (a - a_1)(1 + a_2 a_3) = 0$; welches die Relation (9.) für $q = 90^0$ ist.

Stralsund den 9. Juni 1846.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 35. Heft 1.

Fac simile einer Handschrift von Viviani.

Ser.mo Sig.r Prin.pe

In ordine a' riverit.i comandi dell'A.V. Ser.ma
inviai fin del p.mo di Genn.o prossimo passato
il danaro all'Amico di Cagli per la compra di
quei libri di Matem.ca; ma per varj accidenti
non prima che ieri mi pervennero. Ne porto
questo avviso all'A.V. conforme pur si com=
piacque di comandarmelo con attender che
mi faccia ordinare a chi io debba quà
consegnargli, mentre con riverentissimo
ossequio inchinandomele mi rassegno

Dell'A.V. Ser.ma

Di Fir.e 26. Febb.o
1666. ab Inc.ne

Umil.mo Divot.mo Obbed.mo Ser.re
Vincentio Viviani