6.

Über das Ohmsche physicalische Gesetz.

(Vom Herrn Professor Dr. *Plücker* zu Bonn.)

---

1. Eines der einfachsten und zugleich wichtigsten physicalischen Gesetze ist ohne Zweifel das *Ohm*sche, und keine Darlegung der durch galvanische Ströme hervorgebrachten Erscheinungen kann auf Wissenschaftlichkeit Anspruch machen, wenn sie nicht *dieses* Gesetz zur Basis nimmt. Durch dasselbe sind aus der Sprache der Physik die unbestimmten Begriffe *Quantität* und *Intensität* verschwunden; oder vielmehr ist diesen, früher undefinirten Wörtern ein bestimmter Begriff untergelegt worden. Wenn man nach der Ursache fragt, weshalb das *Ohm*sche Gesetz so langsam zu der ihm gebührenden Anerkennung gelangt ist und seine ganze Bedeutung immer noch nicht in den Lehrbüchern erhalten hat, so findet sich dieselbe im Allgemeinen darin, dafs es die überall verbreiteten Ansichten über galvanische Erregung nicht zu unterstützen schien; und dann insbesondere in dem Einflusse der genannten Wörter, mit welchen man, auf den galvanischen Strom angewandt, bildliche Anschauungen zu verbinden geneigt ist, die man aber aufgeben mufs, wenn man zur klaren Auffassung des Thatsächlichen gelangen will. Ich halte jeden Schritt, der dazu beiträgt, die Bedeutung des *Ohm*schen Gesetzes durch neue Anwendungen in ein helleres Licht zu stellen, für einen wesentlichen Beitrag zur Förderung der Wissenschaft. So hat denn auch nicht leicht eine Abhandlung musterhafter mir geschienen, als diejenige von *Wheatstone*, welche in *Poggendorfs* Annalen, aus den „Philosophical Transactions" für 1843 übersetzt, sich findet, unter dem Titel „Beschreibung verschiedener neuer Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer *Volta*'schen Kette." Bd. 62. S. 499. Diese Abhandlung hat mir die Veranlassung zu einigen kleinen Arbeiten gegeben, und meine Absicht ist hier, dem Vorliegenden einige einfache Folgerungen aus dem *Ohm*schen Gesetze hinzuzufügen, welche mir begegneten, als ich dasselbe auf eine practische Aufgabe, die, der Bestimmung der vortheihaftesten Drathdicke zur Herstellung eines starken, für die neuesten *Faraday*schen Versuche bestimmten Electromagnet anwandte.

2. Für die Stärke des galvanischen Stromes, welcher durch ein einzelnes Element hervorgerufen wird, ergiebt sich nach dem *Ohm*schen Gesetze

der Ausdruck

$$\frac{E}{R+G}.$$

E bedeutet die electromotorische Kraft, welche bei einem Zink-Kupfer-Elemente zum Beispiel eine andere ist, als bei einem Zink-Platin-Element, und welche man sich auf irgend eine Einheit bezogen vorstellen mufs. Sie ändert sich nicht mit der Gröfse der Plattenpaare. R bedeutet den Widerstand in der Kette, G den Widerstand im Leitungsdrathe. Beide müssen in derselben Einheit ausgedrückt werden, und für diese Einheit kann man den Widerstand in einem beliebigen Kupferdrath annehmen, dessen Länge und Querschnitt man ebenfalls gleich Eins setzt. Schliefst man die Kette durch einen Kupferdrath von derselben Dicke, so giebt die Länge des Draths den Widerstand G.

Verbindet man mehrere Elemente zu einem einzigen, so bleibt die electromotorische Kraft dieselbe, während der Widerstand, in der Voraussetzung, dafs alle Elemente einander gleich sind, im Verhältnifs der Anzahl der Elemente sich vermindert. Beträgt also diese Anzahl x, so erhält man für die Intensität des Stromes:

$$\frac{Ex}{R+Gx}.$$

Bei einer Kette, die aus mehreren Elementen besteht, summiren sich die electromotorischen Kräfte der einzelnen Elemente; ebenso summiren sich die Widerstände. Sind demnach alle Elemente einander gleich und beträgt ihre Anzahl y, so ergiebt sich für die Intensität des Stroms:

$$\frac{Ey}{Ry+G}.$$

Stellt man endlich x Ketten von y Elementen zusammen, so kommt dies darauf hinaus, den y Elementen des vorigen Falles eine x mal gröfsere Oberfläche zu geben *); wonach also in dem vorstehenden Ausdrucke, um die

---

*) Diese allgemein gemachte Annahme kommt darauf hinaus, dafs man, wenn man zum Beispiel zwei (oder mehrere) Ketten von gleich vielen und gleich grofsen Zink-Platin-Elementen neben einander stellt und dann an die Platinplatten des ersten Elements jeder Kette das eine und an die Zinkplatten des letzten Elements jeder Kette das andere Ende des Verbindungsdraths befestigt, eine Stromstärke erhält, welche *dieselbe* bleibt, wenn aufserdem noch Zink mit Zink und Platin mit Platin in den sich entsprechenden, neben einander stehenden Elementen der Ketten verbunden wird. Durch diese neue Verbindung könnte nur dann eine Änderung in der Stromstärke hervorgebracht werden, wenn durch die Dräthe, welche die Verbindung herstellen, ein Strom hindurchginge. Dies kann aber nicht der Fall sein, weil, in Folge der Symmetrie der Anordnung, ein Strom nach einer Richtung einen gleichen Strom nach entgegengesetzter Richtung erfordern würde. Dadurch ist die obige Annahme von vornherein gerechtfertigt.

Intensität des neuen Stromes zu finden, der Widerstand auf den $x$ten Theil reducirt werden mufs, was

$$1.\quad \frac{Exy}{Ry+Gx} \text{ giebt.}$$

3. Wenn die Anzahl aller Elemente, die man auf verschiedene Weise zu Ketten verbinden kann, gegeben und gleich a ist, so dafs

$$2.\quad xy = a,$$

so entsteht die Frage, wie, wenn der Widerstand G gegeben ist, die Verbindung gemacht werden mufs, um den *stärksten* Strom zu erhalten. In Folge der letzten Gleichung verwandelt sich zunächst die vorhergehende in

$$3.\quad \frac{Ea}{Ry+Gx},$$

und dann mufs der Ausdruck

$$Ry+Gx,$$

indem man x und y als veränderlich betrachtet, ein Minimum werden. Zur Bestimmung dieses Minimums ergiebt sich

$$Rdy+Gdx = 0 \quad \text{und} \quad xdy+ydx = 0,$$

und hieraus

$$4.\quad \frac{R}{G} = \frac{x}{y}.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (2.) findet sich

$$5.\quad y = \sqrt{\left(\frac{G}{R}\cdot a\right)} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{\left(\frac{R}{G}\cdot a\right)},$$

und für das Maximum der Stromstärke:

$$6.\quad \frac{Ea}{2Ry} = \frac{Ea}{2Gx} = \tfrac{1}{2}E\sqrt{\frac{a}{RG}}.$$

4. Die Gleichung (4.) zeigt, dafs in dem Falle des fraglichen Maximums die ***Anzahl der Ketten zu der Anzahl der Elemente sich verhält, wie der Widerstand in jedem Elemente zu dem Widerstande in dem Leitungsdrathe.*** Wenn also dieser letzte Widerstand (der Widerstand aufserhalb der Kette) zunimmt, so wächst die Anzahl der Elemente gegen die Anzahl der Ketten.

Nach dem letzten Ausdrucke (6.) ist, in dem Falle des Maximums, die Stromstärke,

1°. ***Proportional der electromotorischen Kraft,***

2°. ***Proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Elemente,*** 3°. *Umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Widerstande in jedem einzelnen Elemente und*

4°. *Umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Widerstande des Leitungsdrathes.*

Man sieht aus dem Vorstehenden, dafs die Vermehrung der electromotorischen Kraft am meisten zur Verstärkung des Stromes beiträgt; so dafs zum Beispiel, wenn eine Kraft sich fände, die zweimal, dreimal gröfser wäre, als die gewöhnliche, 60 Elemente so stark wirken würden, als jetzt bezüglich 240 und 540. Es ist ferner ersichtlich, dafs die Stromstärke im Maximum unverändert bleibt, wenn die Anzahl der Elemente in demselben Verhältnisse wächst, wie entweder der Widerstand in jedem Elemente, oder der Widerstand im Leitungsdrathe zunimmt.

5. Es ist nicht zu übersehen, dafs der obige Ausdruck im Allgemeinen nur ein ideales Maximum giebt, indem die Natur der Sache es mit sich bringt, dafs x und y ganze Zahlen und überdies Factoren von a sein müssen. Bei manchen Fragen läfst sich indessen G so bestimmen, dafs diese Voraussetzung Statt findet. Es sei zum Beispiel die Menge des zu verwendenden Draths gegeben, etwa 600 Fufs des Normaldraths, dessen Querschnitt gleich Eins ist, so dafs, wenn man diesen Drath unmittelbar zur Schliefsung anwendet, $G = 600$ ist. Giebt man dem Schliefsungsdrathe einen $\varkappa$mal kleinern Querschnitt, und nimmt ihn also $\varkappa$mal länger, so wird, nach dem *Ohm*schen Gesetze, der Widerstand $\varkappa^2$mal gröfser, und es ist dann in die Formeln $\varkappa^2 G$ statt G zu setzen. Dies giebt

$$7. \quad y = \varkappa\sqrt{\left(\frac{G}{R}\cdot a\right)} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\left(\frac{R}{G}\cdot a\right)},$$

und wenn man die Stromstärke durch J bezeichnet:

$$8. \quad J = \frac{1}{2\varkappa}\cdot E\sqrt{\frac{a}{RG}}.$$

Der Coëfficient $\varkappa$ läfst sich so bestimmen, dafs x und y nach einander die verschiedenen Factoren von a werden. Es sei z. B.

$$a = 24 \quad \text{und} \quad R = 100,$$

die Länge des Schliefsungsdrathes $\varkappa G$ gleich g, und E gleich Eins. Dann ergiebt sich für die acht verschiedenen Zusammenstellungen der gegebenen 24 Elemente:

$$x = 1, \quad y = 24, \quad \varkappa = 2, \quad g = 1200, \quad J = \frac{1}{200},$$

$$x = 2, \quad y = 12, \quad \varkappa = 1, \quad g = 600, \quad J = \frac{1}{100},$$

$$x = 3,\quad y = 8,\quad z = \tfrac{2}{3},\quad g = 400,\quad J = \frac{1}{66\frac{2}{3}},$$

$$x = 4,\quad y = 6,\quad z = \tfrac{1}{2},\quad g = 300,\quad J = \frac{1}{50},$$

$$x = 6,\quad y = 4,\quad z = \tfrac{1}{3},\quad g = 200,\quad J = \frac{1}{33\frac{1}{3}},$$

$$x = 8,\quad y = 3,\quad z = \tfrac{1}{4},\quad g = 150,\quad J = \frac{1}{25},$$

$$x = 12,\quad y = 2,\quad z = \tfrac{1}{6},\quad g = 100,\quad J = \frac{1}{16\frac{2}{3}},$$

$$x = 24,\quad y = 1,\quad z = \tfrac{1}{12},\quad g = 50,\quad J = \frac{1}{8\frac{1}{3}}.$$

6. Die Gleichung (8.) drückt das Gesetz aus: dafs sich, für das Maximum der Stromstärke, diese bei einem gegebenen Gewichte des Schliefsungsdraths umgekehrt wie die Länge desselben verhält. Zertheilt man hiernach in Gedanken den ursprünglichen Schliefsungsdrath in z einzelne Dräthe von gleicher Dicke, und stellt sich den Strom, einmal durch den ursprünglichen Drath, dann nach einander durch jeden der z einzelnen Dräthe gehend vor, so ist in beiden Fällen die Maximum-Wirkung *dieselbe.* Dieses würde also in dem Falle des Multiplicators, sei es, dafs er eine Magnetnadel abwirft, oder dafs er, wie in der *Stöhrer*schen Maschine, eine Eisenmasse magnetisch macht und zum Rotiren bringt, dann Statt finden, wenn eine Windung des ursprünglichen Draths denselben Raum einnähme, wie z Windungen des $z$mal dünnern Draths. Unter derselben Voraussetzung würde dies auch dann Statt finden, wenn man, um einen Electromagnet herzustellen, einen Eisenkern mit Kupferdrath umwickelt. In dem Beispiele der vorigen Nummer haben wir acht Maximum-Wirkungen, die der Voraussetzung entsprechen, dafs man der gegebenen Drathmasse nach einander 50, 100, .. 1200 Fufs Länge giebt. Nehmen wir, um die Ideen zu fixiren, ferner an, dafs 50 F. Drath um den Eisenkern (der in seiner ganzen Länge, oder auch nur streckenweise umwickelt werden mag) eine Lage bilden, so erhalten wir (indem wir die obige Voraussetzung festhalten) in den acht verschiedenen Fällen dieser Lagen bezüglich 1, 2, .. 24, und der in dem Eisenkern hervorgerufene Magnetismus wird überall derselbe sein. Aber die Voraussetzung weicht immer, namentlich bei der nothwendigen Umspinnung des Draths, merklich und in manchen Fällen sehr weit von der Wirklichkeit ab. *In dieser Abweichung liegt der Grund des Vorzuges eines dickern Draths.*

7. Wenn die Länge des Draths gegeben ist, so erreicht man im Allgemeinen das ideale Maximum nicht, kann dann aber, wenn man den Widerstand in

einem Elemente kennt, berechnen, wie weit man hinter jenem zurückbleibt, und dies mit in Anschlag bringen. Hätte in dem betrachteten Falle der Drath die gegebene Länge von 900 F., wäre also der entsprechende Widerstand 1350 F., so fände sich

$$y = 18, \qquad x = 1\tfrac{1}{3}, \qquad J = \frac{1}{150}.$$

Es bleibt aber hier nur die Alternative, die gegebenen 24 Elemente zu zwei Ketten zu verbinden, oder dieselben als eine einzige Kette wirken zu lassen. In beiden Voraussetzungen erhalten wir, wenn wir die Intensitäten nach der Formel (1.) berechnen:

$$y = 12, \qquad x = 2, \qquad J = \frac{1}{165},$$

$$y = 24, \qquad x = 1, \qquad J = \frac{1}{156\tfrac{1}{4}}.$$

Die letztgenannte Verbindung ist also in diesem Falle die vortheilhafteste und man bleibt dann nur um $\frac{1}{24}$ hinter jenem Maximum zurück.

Wir wollen als zweites Beispiel

$$a = 60, \qquad R = 100, \qquad G = g = 800 \text{ Fufs}$$

setzen. Dann ergiebt sich für das ideale Maximum:

$$y = 21{,}9, \qquad x = 2{,}7, \qquad J = \frac{1}{73{,}03}.$$

Verbindet man, um diesem Maximum möglichst nahe zu kommen, die 60 gegebenen Elemente einmal zu drei, das anderemal zu zwei Ketten, so findet sich

$$y = 20, \qquad x = 3, \qquad J = \frac{1}{73{,}33},$$

$$y = 30, \qquad x = 2, \qquad J = \frac{1}{76{,}66}.$$

Bei der ersten Verbindungs-Art bleiben wir also nur um $\frac{1}{220}$ hinter dem Maximum zurück. Es ergeben sich in diesem Beispiele zwölf verschiedene Drathlängen, welchen wirkliche Maxima entsprechen; diese liegen zwischen 37 F. und 2192 F., dem entsprechend, dafs alle Tröge als ein einziges Element oder als eine einzige Kette wirken.

Ist nur ein einziges Element vorhanden, so ist $x = y = a = 1$, und die in Rede stehende Maximum-Wirkung fordert alsdann, dafs R, der Widerstand in diesem Elemente, dem Widerstande in dem Leitungsdrathe gleich sei. Ist dies nicht der Fall, so bleibt man hinter dem idealen Maximum zurück;

und zwar verhalten sich dann die Quadrate dieses Maximums und der wirklichen Stromstärke wie

$$4RG:(R+G)^2 = 1:1-\tfrac{1}{4}(R-G)^2.$$

8. Geht man von einem wirklichen Maximum aus, so gelangt man wieder zu einem solchen Maximum, wenn man y unverändert läfst und einerseits x mit λx, folglich auch a mit λa, und andrerseits R mit λR vertauscht. In dieser neuen Maximum-Wirkung bleibt (bei gleichem Widerstande aufserhalb der Kette) die Stromstärke unverändert dieselbe. Wenn man also von irgend einer Maximum-Wirkung ausgeht, so erhält man eine zweite *gleiche* Wirkung, wenn man die Anzahl der Ketten beliebig vermehrt oder vermindert, und in demselben Verhältnisse die wirksame Metall-Oberfläche der einzelnen Elemente verkleinert oder vergröfsert. Es folgt daraus, dafs bei der Maximum-Wirkung *dieselbe wirksame Metall-Oberfläche immer dieselbe Stromstärke giebt.*

Man kann in dem Vorstehenden auch $y=1$ setzen; statt der Ketten also auch einzelne Elemente nehmen.

Bonn, im März 1847.