7.

Sur la Réflexion de la Lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom.

(Par Mr. *Plücker,* prof. de math. à l'université de Bonn.)

---

1. **O**n sait que, pour l'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes, il existe trois coniques: une ellipse, une hyperbole et une courbe imaginaire, situées dans les trois plans principaux, qui, par rapport à ces surfaces, jouissent de propriétés analogues à celles des deux systèmes de foyers, réelles et imaginaires, d'une courbe du même degré. M. *Chasles* a donné le nom très propre de *focales* à ces courbes. Pour les deux paraboloïdes, ces trois courbes se trouvent remplacées par deux paraboles, et enfin pour les cônes et les cylindres, par deux lignes droites.

Parmi les propriétés nouvelles de ces courbes remarquables, démontrées par moi dans un ouvrage qui a paru dans les premiers jours d'Août dern., la suivante me parait plus particulièrement digne d'attention; savoir:

Tous les rayons qui, en partant de points de l'une des deux focales réelles d'une surface quelconque du second degré, vont couper cette surface, sont réfléchis par elle de manière qu'ils se réunissent de nouveau sur la même focale, ou bien qu'ils se propagent, comme émanés directement de cette courbe.

J'ai tiré ce théorème, comme corollaire, du théorème suivant, que j'ai démontré analytiquement de la manière la plus simple:

Les trois axes d'un cone quelconque circonscrit à une surface du second degré, coïncident avec les trois axes de chacun des trois cônes qui, avec le cône circonscrit, ont un centre commun, et qui en outre passent par les trois focales. En construisant les trois surfaces confocales (l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à une nappe et l'hyperboloïde à deux nappes) qui passent par le centre commun, les trois axes en question sont les normales de ces trois surfaces confocales *).

---

*) System der analytischen Geometrie des Raumes. p. 334.

Dans le présent Mémoire, je vais donner des démonstrations nouvelles du premier théorème, démonstrations qui auront l'avantage d'en faciliter la discussion et de le lier à d'autres théorèmes connus.

2. Ménons par un point donné de la surface proposée du second degré un plan normal quelconque. Un rayon lumineux, situé dans ce plan et rencontrant la surface dans le point donné, ne sortira pas du plan après avoir été réfléchi par la surface. Si donc ce rayon est parti d'un point quelconque d'une focale, il sera réfléchi, suivant notre théorème, vers un autre point de la même courbe, en fesant des angles égaux avec la normale. Il suit de là que les deux rayons, incident et réfléchi, constituent avec la normale et la tangente de la surface comprise dans le même plan, ce qu'on a nommé un *faisceau harmonique.* Comme un tel faisceau, en rencontrant un plan quelconque, et en particulier le plan principal, contenant la focale, le coupe en quatre points harmoniques, il suit que la tangente et la normale vont couper le plan principal en question en deux points tels, que chacun d'eux soit situé sur la polaire de l'autre. Réciproquement, si cette dernière rélation a lieu, ce qu'on prouvera plus loin avec facilité, notre théorème en découle immédiatement.

3. Pour fixer les idées, prenons un ellipsoïde et son *ellipse focale,* située dans le plan du plus grand et du moyen axe de la surface. Les rayons émanés d'un point lumineux, placé dans un point quelconque de la focale, se réunissent de nouveau, pour former, après une première réflexion, une ligne lumineuse coïncidante avec la focale. Chaque réflexion nouvelle ramenera ce rayon de nouveau vers la même focale. L'apparition sera (généralement parlant) la même, mais plus intense si, au lieu d'un seul de ses points, la focale entière devient lumineuse. Il s'agit maintenant de savoir de quelle manière la lumière se distribue sur la focale, et en particulier, quels sont les différents points de la surface, qui renvoient la lumière émanée d'un point donné de la focale vers un autre point donné de la même courbe. La dernière question revient, suivant notre théorème, à mener par les deux points donnés que nous désignerons par M et M', une ligne droite, et par cette ligne droite un plan, qu'on fait tourner autour d'elle, et de chercher tous les points de la surface, où les normales coïncident avec le plan tournant, dans l'une quelconque de ses positions. Pour résoudre cette question nous nous serviront des procédés ordinaires de la géométrie analytique.

4. Soit

$$1. \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

l'équation de la surface; sa focale située dans le plan x, y sera réprésentée par l'équation

$$2. \quad \frac{x^2}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{y^2}{\beta^2-\gamma^2}=1.$$

Prenons pour équations de la normale dans un point quelconque (x', y', z') de la surface, les suivantes:

$$3. \quad x=kz+\varkappa, \qquad y=lz+\lambda,$$

en posant, pour abréger:

$$k=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cdot\frac{x'}{z'}, \qquad l=\frac{\gamma^2}{\beta^2}\cdot\frac{y'}{z'},$$

$$\varkappa=x'-kz'=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}\cdot x', \qquad \lambda=y'-lz'=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2}\cdot y'.$$

Les coordonnées du point, où la normale (3.) rencontre le plan x, y sont

$$x=\varkappa, \qquad y=\lambda;$$

donc nous obtenons pour sa polaire, prise par rapport à la focale, l'équation

$$\frac{\varkappa x}{\alpha^2-\gamma^2}+\frac{\lambda y}{\beta^2-\gamma^2}=1,$$

ou bien, en substituant, celle-ci:

$$\frac{x'x}{\alpha^2}+\frac{y'y}{\beta^2}=1.$$

Cela est évidemment l'équation de la trace sur le plan x, y, du plan tangent à la surface au point (x', y', z'). Il suit delà d'abord le théorème connu, que, si par un point donné de la surface on mène le plan tangent et la normale, qui coupent un plan principal quelconque dans une droite et un point (N), ce point sera le pôle de la droite, par rapport à la focale comprise dans le même plan. De la résulte que ce point N est situé sur la polaire d'un point quelconque de la droite en question, c'est-à-dire du point d'intersection d'une tangente quelconque, passant par le point (x', y', z'), avec le plan principal. C'est ce qu'il fallait prouver pour compléter la démonstration du numéro (2.).

5. J'ai donné le théorème que je viens de démontrer dans le numéro précédent, page 332 de mon Système de géométrie analytique à trois dimensions. En parcourant le Journal de M. *Liouville,* je trouve qu'il appartient à M. *Chasles* qui l'a transcrit de son Aperçu historique p. 384 et qui en a tiré le théorème suivant:

„Si par les différents points d'une section plane quelconque d'une sur-„face du second degré, on mène les normales à la surface, leurs pieds sur „chacun des plans principaux de la surface seront situés dans une section co-„nique. Le cône circonscrit à la surface, suivant la section plane, rencon-„trera le plan principal suivant une autre conique; et si l'on conçoit la focale „de la surface comprise dans ce plan, la première conique, lieu des pieds des „normales, sera la polaire de cette seconde conique par rapport à la focale." *)

Le théorème peut être généralisé de deux manières. D'abord on voit qu'une courbe quelconque tracée sur la surface, peut être substituée à la section plane. Puis, il est évident que les développements analytiques du numéro précédent subsistent également si, au lieu de supposer le point (x', y', z') sur la surface même, on le prend arbitrairement dans l'espace. C'est seulement l'interpretation géométrique qui est changée, en se généralisant. Le plan tangent est remplacé par le plan polaire du point donné, pris par rapport à la surface, et la normale par la perpendiculaire, abaissée du même point sur ce plan polaire.

Si l'on circonscrit à une surface du second degré un cône quelconque, le plan mené par la courbe de contact, et la perpendiculaire abaissée du centre du cône sur ce plan, vont rencontrer un plan principal de la surface dans une ligne droite et un point; ce point sera le pôle de la ligne droite, par rapport à la focale située dans le même plan principal.

On pourrait tirer de ce théorème le théorème plus général du numéro (1.) de manière comme nous avons tiré de celui notre théorème sur la réflexion. Au même théorème se joignent une foule de théorèmes, soit nouveaux, soit déjà énoncés par d'autres ou par moi.

6. Révenons sur nos considérations analytiques, et soit, en désignant par μ un coëfficient constant quelconque,

$$4. \qquad \mu z + Ax + By + C = 0,$$

l'équation d'un plan, tournant autour d'une ligne fixe, située dans le plan x, y et réprésentée par les équations

$$5. \qquad z = 0, \qquad Ax + By + C = 0.$$

Soit cette ligne fixe celle, qui passe par les deux points, pris arbitrairement sur la focale, et désignés plus haut par M et M'. Pour la condition que la

*) Théorèmes sur les surfaces du second degré. Par M. *Chasles. Liouville,* Journ. VIII. p. 215.

normale (3.) soit comprise toute entière dans ce plan, nous obtenons les deux équations

$$Ak+Bl+\mu=0, \qquad A\varkappa+B\lambda+C=0.$$

La dernière de ces deux équations est indépendante de μ, et par conséquent de la position particulière du plan tournant. En y mettant pour $\varkappa$ et λ leurs veleurs, nous aurons

$$6. \qquad A\cdot\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}\cdot x'+B\cdot\frac{\beta^2-\gamma^2}{\beta^2}\cdot y'+C=0.$$

Si donc on prend x' et y' pour variables, cette équation réprésentera un plan perpendiculaire au plan principal et qui coupe la surface suivant une courbe, qui est le lieu géométrique des points qui réflechissent les rayons lumineux, émanés de l'un des deux points M et M', vers l'autre de ces points. Il résulte sur le champ de ce que nous venons de prouver que suivant la courbe d'intersection dans ce plan, la surface donnée est touchée par une surface de revolution, ayant M et M' pour foyers.

Étant parti du premier théorème du numéro (1.) nous sommes donc parvenu au théorème suivant:

Deux points, pris arbitrairement sur une focale d'une surface du second degré, sont les deux foyers d'une surface de revolution, circonscrite à la surface proposée.

Réciproquement, pour parvenir à notre théorème de réflexion focale, il suffit de démontrer directement ce dernier théorème. C'est ce que j'ai fait de la manière la plus simple *).

7. Pour construire l'équation (6.), nous observerons d'abord que les coordonnées du pôle de la ligne droite (5.) (qui passe par les deux points M et M', situés sur la focale) sont par rapport à la focale (2.):

$$x=-\frac{A}{C}(\alpha^2-\gamma^2), \qquad y=-\frac{B}{C}(\beta^2-\gamma^2);$$

et de là on obtient l'équation (6.) à construire, pour le plan polaire du point ainsi déterminé, pris par rapport à la surface proposée.

Supposons toujours que la surface soit un ellipsoïde, dont l'ellipse extérieure de la figure est une section principale et l'ellipse intérieure l'ellipse focale. Sur cette dernière courbe nous prendrons arbitrairement deux points M et M' (Tab. III. cah. 4. tome 34. fig. 8.): il s'agit de déterminer les points de la surface,

---

*) System der analytischen Geometrie des Raumes. p. 295.

qui réfléchissent les rayons, émanés de M, vers M'. Pour cela construisons par rapport à la focale le pôle P de la ligne droite MM', et ensuite, par rapport à la section principale, la polaire SS' du point P; enfin menons par SS' le plan perpendiculaire au plan principal. Tous les points de la courbe d'intersection de la surface et de ce plan réfléchiront les rayons lumineux, émanés de M, vers M'.

Si le point M' décrit la focale de manière que MM' tourne autour du point M, le point P parcourra la tangente de la focale en M, et en même temps le plan coupant tournera autour d'une ligne droite fixe, perpendiculaire au plan principal et coupant ce plan dans le point Q, pôle de la tangente en M par rapport à la section principale. Pour qu'il y ait effectivement réflexion il faut que le plan de la section perpendiculaire coupe la surface dans une courbe réelle; il faut donc que le point P soit extérieur à la section principale. Si le point P coïncide successivement avec les deux points L et K, où la tangente en N coupe la surface principale, les courbes réfléchissantes correspondantes se réduiront à ces points mêmes renverront le rayon incident respectivement vers les deux points N et R. Ces deux points s'obtiennent facilement, parcequ'ils sont les points de contact sur les deux tangentes nouvelles LN et KR qu'on peut mener à la focale par les deux points L et K.

Les points N et R sont les deux points limites de la partie éclairée $NM'R$ de la focale par les rayons émanés du point M.

8. Si au lieu de l'ellipse focale on suppose l'hyperbole focale, perçant l'ellipsoïde dans ses ombilics, il faut distinguer les deux cas, où les rayons frappent, soit la partie concave, soit la partie convexe de la surface. Ici se présente comme cas particulière celui ou les rayons émanent d'un ombilic, et celui où les rayons incidents sont parallèles à une des deux asymptotes de la focale, en formant un cylindre droit à base circulaire.

Je n'enterai pas dans ce détail et je ne discuterai pas non plus le cas des autres surfaces du second degré; cette discussion ne présente aucune difficulté.

Bonn, au mois de Mars 1847.