Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1847

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN243919689_0035

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0035|LOG_0014

10.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein*, Privatdocent zu Berlin.)

IV. Über einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält.

Wenn *Gaufs* seinen schon gefundenen Beweisen des quadratischen Reciprocitätsgesetzes eine Reihe neuer hinzugefügte, zum Theil um den Weg zu der weit schwierigern Theorie der biquadrtischen Reste zu erleichtern, so möchte es nach diesem Vorbilde nicht unpassend erscheinen, in ähnlicher Weise den Fundamentaltheoremen über elliptische Functionen immer neue Seiten abzugewinnen, in der Hoffnung, es könnte die eine oder die andere Wendung zur Aufklärung und leichtern Erforschung der Eigenschaften der *Abel*schen Functionen etwas beitragen. — So sahen wir, wie neulich *Hermite*, von den trigonometrischen Reihen ausgehend, welche den Zähler und Nenner der elliptischen Functionen constituiren, zu dem *Abel*schen Theorem für diese Functionen gelangte, indem er sich auf dasselbe Princip stützte, auf welches ich schon im 27ten Bande dieses Journals Seite 187 aufmerksam gemacht habe, dafs nämlich jede homogene Verbindung jener Reihen wieder eine ähnliche Reihe hervorbringt. — Hierher gehört auch das elegante Verfahren, durch welches *Richelot* die *Lagrange*sche Integrationsmethode auf die *Abel*schen Functionen ausgedehnt hat.

In Nr. II. dieser Beiträge habe ich einen Beweis des Additionstheorems gegeben, welcher hauptsächlich auf dem Umstande beruht, dafs die geraden Differentialquotienten der elliptischen Functionen durch ganze rationale Verbindungen dieser Functionen, die ungeraden Differentialquotienten derselben durch Producte aus ganzen rationalen Verbindungen in die Wurzelgröfse ausgedrückt werden. Der hier folgende Beweis, welcher auf demselben Principe beruht, unterscheidet sich dennoch in wesentlichen Puncten von dem ersten und läfst zugleich deutlich sehen, warum das Verfahren nicht gelingt, wenn die Function unter der Quadratwurzel auf einen höheren als den vierten Grad steigt, obwohl auch dann noch jene eben erwähnte Eigenschaft der Differentialquotienten Statt findet.

Es sei $x = \varphi(t)$ diejenige Function von t, für welche

$$t = \int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)}$$

ist, indem der Kürze wegen $\Delta(x)$ die Quadratwurzel aus einer geraden ganzen Function $2n$ten Grades

$$x^{2n} + bx^{2n-2} + \ldots + ex^2 + 1 = \lambda(x)$$

bezeichnet, nämlich $\Delta(x) = \sqrt{(\lambda(x))}$. Da zufolge der eben gemachten Annahme

$\frac{\partial x}{\partial t} = \Delta(x)$, $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = \lambda(x)$, $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda'(x)}{\Delta(x)} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{2}\lambda'(x) = nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.}$

ist, so erhält man die beiden ersten Differentialquotienten jeder Function $F(x)$ von x, nach t, wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial t} = F'(x)\Delta(x), \qquad \frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2} = F'(x)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + F''(x)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$$
$$= F'(x)(nx^{2n-1} + (n-1)bx^{2n-3} + \text{etc.})$$
$$+ F''(x)(x^{2n} + bx^{2n-2} + \text{etc.}).$$

Hieraus sieht man sogleich, dafs, wenn $F(x)$ eine ganze Function von x ist, $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$ ebenfalls eine ganze Function von x sein wird, deren Grad um $2n-2$ Einheiten (bei den elliptischen Functionen um 2 Einheiten, bei den Sinus um 0 Einheiten) höher ist, als der von $F(x)$; und zwar wird, wenn Ax^μ das höchste Glied in $F(x)$ ist, das höchste Glied in $\frac{\partial^2 F(x)}{\partial t^2}$,

$$\mu A x^{\mu-1} \cdot n x^{2n-1} + \mu(\mu-1) A x^{\mu-2} \cdot x^{2n} = \mu(\mu+n-1) A x^{\mu+2n-2}$$

sein. Geht man demnach von x selbst als der einfachsten ganzen Function aus und bildet successive dessen gerade Differentialquotienten nach t, so werden dieselben sämmtlich ganze Functionen von x sein, deren Grade fortwährend um $2n-2$ Einheiten steigen, und es werden die höchsten Glieder von

$$x, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 x}{\partial t^4}, \quad \text{etc.}, \quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}, \text{ resp. sein:}$$

$$x, \quad nx^{2n-1}, \quad n(2n-1)(3n-2)x^{4n-3}, \quad \text{etc.},$$
$$n(2n-1)(3n-2)\ldots((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1},$$

so dafs man schreiben kann:

$$(1.) \quad \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = n(2n-1)(3n-2)\ldots((2\mu-1)n-2\mu+2)x^{2\mu n-2\mu+1} + N,$$

wo die Anzahl der numerischen Factoren, deren Product den Coëfficienten des höchsten Gliedes bildet, $2\mu-1$ beträgt, und wo durch N der Complex aller derjenigen Glieder ausgedrückt wird, welche niedrigere Potenzen von x enthalten, als die $2\mu n-2\mu+1$te. Ich werde nämlich hier und im Folgenden, wenn es mir bei einer ganzen Function lediglich auf die Betrachtung ihres höchsten Gliedes ankommt, nur dieses schreiben und die Summe aller übrigen Glieder durch $+N$ andeuten; in umgekehrter Weise werde ich, wenn es mir bei einer nach *steigenden* Potenzen der Variabeln geordneten ganzen Function, oder unendlichen Reihe, nur auf das niedrigste oder Anfangsglied ankommt, diesem die Summe der höhern Glieder mit $+H$ anfügen. — Für elliptische Functionen ist $n=2$ und die Formel (1.) wird für diese

$$(1'.)\qquad \frac{\partial^{2\mu}x}{\partial t^{2\mu}} = (2\mu)!\,x^{2\mu+1}+N.$$

Übrigens ist leicht zu sehen, dafs die ganze Function zur Rechten in (1.) oder (1'.) nur ungerade Potenzen von x enthält.

Den allgemeinen Ausdruck für die ungeraden Differentialquotienten von x nach t erhält man, wenn man (1.) noch einmal nach t differentiirt, nämlich:

$$(2.)\qquad \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}} = \varDelta(x)\{n(2n-1)(3n-2)\dots(2\mu n-2\mu+1)\,x^{2\mu n-2\mu}+N\},$$

d. h. gleich dem Producte aus $\varDelta(x)$ in eine gerade ganze Function von x, wo aber das neue N um einen Grad niedriger ist, als das obige in (1.) und eben deshalb wiederum jenes in (2.) dieselbe Rolle spielt, wie dieses in (1.). Für elliptische Functionen ist

$$(2'.)\qquad \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}} = \varDelta(x)\{(2\mu+1)!\,x^{2\mu}+N\}.$$

Aufser diesen Entwicklungen der Differentialquotienten von x nach *fallenden* Potenzen von x, bei welchen nur die höchsten Glieder berechnet, die übrigen blofs angedeutet sind, bedürfen wir noch der Entwicklungen von t^h und $\frac{t^h}{\varDelta(x)}$ nach *steigenden* Potenzen von x, oder vielmehr nur der niedrigsten, d. h. der Anfangsglieder dieser Entwicklungen. Da $\lambda(x)$, nach steigenden Potenzen von x geordnet, mit 1 anfangen soll, so fangen $\varDelta(x)$ und $\frac{1}{\varDelta(x)}$ ebenfalls mit 1 an, und $\int_0 \frac{\partial x}{\varDelta(x)}=t$ fängt mit x, folglich t^h mit x^h und $\frac{t^h}{\varDelta(x)}$ ebenfalls mit x^h an. Nach obiger Übereinkunft kann also geschrieben werden:

$$(3.)\qquad t^h = x^h+H,$$

$$(4.)\qquad \frac{t^h}{\varDelta(x)} = x^h+H.$$

Diese Reihen enthalten nur gerade, oder nur ungerade Potenzen von x, je nachdem h gerade oder ungerade ist.

Nach dem *Taylor*schen Satze können folgende vier Entwicklungen angenommen werden, in welchen $\varphi(u) = y$ gesetzt ist, so dafs y dieselbe Function von u, welche x von t, und u dieselbe Function von y, welche t von x ist:

$$\varphi(t+u) = x + \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{u^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu}\cdot\frac{u^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(t-u) = x - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{u}{1!} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{u^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu}\cdot\frac{u^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(u+t) = y + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{t^2}{2!} + \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^\mu y}{\partial u^\mu}\cdot\frac{t^\mu}{\mu!},$$

$$\varphi(u-t) = y - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{t}{1!} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\cdot\frac{t^2}{2!} - \text{etc.} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} (-1)^\mu \frac{\partial^\mu y}{\partial u^\mu}\cdot\frac{t^\mu}{\mu!}.$$

Addirt man einerseits die zweite dieser vier Gleichungen zur ersten, subtrahirt andrerseits die vierte von der dritten, bemerkt, dafs $\varphi(u+t) = \varphi(t+u)$ und $\varphi(u-t) = -\varphi(t-u)$ ist, und dividirt jedesmal durch $2\Delta(y)$, so erhält man das doppelte Resultat:

$$(5.)\qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta(y)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}\cdot\frac{u^{2\mu}}{\Delta(y)(2\mu)!},$$

$$(6.)\qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta(y)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^{2\mu+1} y}{\Delta(y)\partial u^{2\mu+1}}\cdot\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}.$$

Da hier links in beiden Gleichungen Dasselbe steht, so kann man die beiden Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) einander gleich setzen. Diese Vergleichung liefert, wie wir sogleich sehen werden, für $n = 2$, d. h. für elliptische Functionen, unmittelbar das Additionstheorem, und für gröfsere Werthe von n erhält man einen ziemlich merkwürdigen und allgemeinen Satz, welcher zugleich den Grund sehen läfst, weshalb in diesem Falle ein Additionstheorem in derselben Weise, wie für die elliptischen Functionen, nicht existirt. — In der That zeigen wir, dafs sich die Reihen zur Rechten in (5.) und (6.) in aufsteigende Doppelreihen nach Potenzen und Producten von x und y umformen lassen. Was zunächst die Reihe in (5.) betrifft, so setze man statt $\frac{u^{2\mu}}{\Delta(y)(2\mu)!}$, nach Anleitung von (4.), die Entwicklung nach steigenden geraden Potenzen von y, welche mit $\frac{y^{2\mu}}{(2\mu)!}$ anfängt, und nach (1.) setze man statt der Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}}$ die ihnen gleichen ganzen und ungeraden Functionen von x, welche man sich hier nach steigenden Potenzen von x, also in umgekehrter Art wie in (1.), geordnet vorstellen mufs. Irgend eine bestimmte Potenz von y, z. B. die $2k$te, kommt nur in den ersten $k+1$ ersten Gliedern von (5.), nämlich für die Werthe $\mu=0$ bis $\mu=k$ vor, während alle folgenden nur *höhere* Potenzen von y als die $2k$te enthalten, nach (4.); von der andern Seite enthält keine der ungeraden ganzen Functionen, durch welche die Differentialquotienten in diesen $k+1$ ersten Gliedern ausgedrückt werden, eine Potenz von x, deren Exponent $>$ als $2kn-2k+1$ wäre, nach (1.), und dieses Maximum des Exponenten $2kn-2k+1$ zeigt sich nur in dem einzigen $k+1$ten Gliede der Reihe, und zwar erscheint die Potenz von x, welche diesem Exponenten entspricht, mit dem Coëfficienten $n(2n-1)(3n-2)\ldots\ldots((2k-1)n-2k+2)$, welchen ich, um abzukürzen, durch K bezeichne. Hieraus folgt: wenn man die ganze Reihe (5.) nach steigenden Potenzen von y ordnet (so dafs die Coëfficienten Reihen nach x sind), so enthält der Coëfficient von y^{2k} nur solche Potenzen von x, deren Exponenten $\leqq 2kn-2k+1$ sind, und zwar ist die höchste, nämlich die $2kn-2k+1$te Potenz von x in diesem Coëfficienten von y^{2k}, mit $\frac{K}{(2k)!}$ multiplicirt; mit andern Worten, bezeichnet man überhaupt das allgemeine Glied der Producte von Potenzen von x und y in einer Doppelreihe nach x und y, welche in Bezug auf x ungerade, in Bezug auf y gerade ist, durch $x^{2h+1}y^{2k}$, so dafs im Allgemeinen h und k unabhängig von einander alle ganzen Werthe von 0 bis ∞ erhalten können, so ist für die Reihe (5.)

$$2h+1 \leqq 2kn-2k+1,$$

oder, was dasselbe besagt,

$$(\alpha.)\qquad h \leqq (n-1)k,$$

d. h. andere Glieder, andere Potenzproducte $x^{2h+1}y^{2k}$ können nicht vorkommen, als solche, die der Bedingung (α.) genügen; aufserdem ist für $h=(n-1)k$ der Coëfficient des Potenzproducts $=\frac{K}{(2k)!}$, *was sich für* $n=2$ *auf* 1 *reducirt.*

Die Betrachtung der Reihe (6.) ergiebt ein ähnliches Resultat. Hier mufs man die Potenzen von t in $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ nach (3.) in Reihen nach steigenden ungeraden Potenzen von x umsetzen, welche jedesmal mit $\frac{x^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ anfangen; die durch $\Delta(y)$ dividirten ungeraden Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\mu+1}y}{\Delta(y)\,\partial u^{2\mu+1}}$

mufs man nach Anleitung von (2.) durch

$$n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2\mu n-2\mu+1)y^{2\mu n-2\mu}+N,$$

d. h. durch gerade ganze Functionen von y vom jedesmaligen Grade $2\mu n-2\mu$ ausdrücken. Fafst man nun irgend eine bestimmte Potenz von x, z. B. die $2h+1$te ins Auge, so wird man dieselbe nur in den ersten $h+1$ Gliedern der Reihe (6.), welche $\mu=0,1,2$, bis h entsprechen, finden, denn in den folgenden Gliedern fängt $\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!}$ schon gleich mit höheren Potenzen von x an. Die Potenzen von y, mit welchen diese bestimmte Potenz von x multiplicirt ist, übersteigen in jenen $h+1$ ersten Gliedern nirgends die $(2hn-2h)$te, und diese letztere selbst kommt nur in dem einzigen $h+1$ten Gliede, und zwar mit $n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2hn-2h+1)$ multiplicirt vor, so dafs das Potenzproduct $y^{2hn-2h}x^{2h+1}$ den Quotienten aus der eben geschriebenen Zahl durch $(2h+1)!$ zum Coëfficienten hat. In der nach x und y geordneten Reihe (6.) kommt folglich jede Potenz x^{2h+1} von x nur mit solchen Potenzen von y multiplicirt vor, deren Exponenten $\leqq 2(n-1)h$ sind; d. h. das allgemeine Potenzproduct $x^{2h+1}y^{2k}$ der entwickelten Reihe (6.) genügt der Bedingung

$$(\beta.)\qquad k\leqq(n-1)h,$$

und wenn $k=(n-1)h$, so läfst sich der Coëfficient des Potenzproductes a priori bestimmen; für elliptische Functionen wird er $=1$.

Da die beiden Doppelreihen (5.) und (6.) für jeden Werth von x und y übereinstimmen müssen und nur verschiedene Anordnungen einer und derselben Doppelreihe nach steigenden Potenzen und Potenzproducten von x und y bilden, so können auch Glieder, welche der erstern fehlen, in der zweiten nicht vorkommen, und umgekehrt. Die einzige Doppelreihe, in welche die beiden, aus Entwicklung von (5.) und (6.) hervorgehenden, verschmelzen, vereinigt demnach die beiden Bedingungen (α.) und (β.) in sich, und man hat folgendes Theorem, bei welchem noch zu bemerken, dafs man aus der Entwicklung von $\frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\Delta y}$ sofort die von $\frac{\varphi(t+u)-\varphi(t-u)}{2\Delta(x)}$ erhält, wenn man t mit u und x mit y vertauscht, und dafs man aus diesen beiden Entwicklungen $\varphi(t+u)$ und $\varphi(t-u)$ selbst erhält, wenn man die erste mit $\Delta(y)$, die zweite mit $\Delta(x)$ multiplicirt und addirt, resp. subtrahirt.

Theorem.

Es sei $x=\varphi(t)$ diejenige Function von t, welche mit t zugleich verschwindet und der Differentialgleichung $\frac{\partial x}{\partial t}=\Delta(x)$ genügt, oder, was

dasselbe ist, für welche

$$t = \int_0 \frac{\partial x}{\Delta(x)},$$

wo $\Delta(x)$ *die Quadratwurzel aus einer ganzen und geraden Function* $2n^{ten}$ *Grades von* x *bezeichnet, in welcher wir den ersten und letzten Coëfficienten* $= 1$ *annehmen. Wenn man* $\varphi(u) = y$ *setzt und folgende Entwicklungen für* $\varphi(t+u)$ *und* $\varphi(t-u)$ *annimmt:*

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) + \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),$$
$$\varphi(t-u) = \Sigma C_{h,k} x^{2h+1} y^{2k} \Delta(y) - \Sigma C_{h,k} y^{2h+1} x^{2k} \Delta(x),$$

so kommen in den Reihen, welche sich auf die ganzen positiven und Nullwerthe von h *und* k *beziehen, nur diejenigen Werthe von* h *und* k *vor, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen*

$$h \leqq (n-1)k, \qquad k \leqq (n-1)h$$

genügen; für alle andern Werthe von h *und* k *wird* $C_{h,k} = 0$. *Aufserdem nimmt der Coëfficient* $C_{h,k}$ *für* $h = (n-1)k$ *den Werth*

$$\frac{n\cdot(2n-1)(3n-2)\ldots\ldots((2k-1)n-2k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots 2k}$$

und für $k = (n-1)h$ *den Werth*

$$\frac{n\cdot(2n-1)(3n-2)\ldots\ldots(2hn-2h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(2h+1)}$$

an.

Für den speciellen Fall der elliptischen Functionen, in welchem $n = 2$ ist, werden die Bedingungen des Theorems

$$h \leqq k \quad \text{und} \quad k \leqq h;$$

sie reduciren sich also auf $k = h$ und der Coëfficient $C_{h,h}$ wird $= 1$; die Reihen verwandeln sich daher in diesem Fall in einfache geometrische Reihen, welche sich summiren lassen und dann das Additionstheorem geben, nemlich:

$$\varphi(t+u) = \Sigma x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) + \Sigma y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x\Delta(y) + y\Delta(x)}{1 - x^2 y^2},$$

$$\varphi(t-u) = \Sigma x^{2h+1} y^{2h} \Delta(y) - \Sigma y^{2h+1} x^{2h} \Delta(x) = \frac{x\Delta y - y\Delta x}{1 - x^2 y^2}.$$

Um den Beweis unseres Theorems in ein noch helleres Licht zu setzen, will ich durch besondere Buchstaben die Entwicklungs-Coëfficienten der Differentialquotienten und der Potenzen der Integrale t und u bezeichnen. Es sei

$$\frac{\partial^{2\mu} x}{\partial t^{2\mu}} = \alpha_0^{(\mu)} x + \alpha_1^{(\mu)} x^3 + \alpha_2^{(\mu)} x^5 + \text{ etc.},$$

$$\frac{\partial^{2\mu+1} y}{\varDelta(y)\, \partial u^{2\mu+1}} = \beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} y^2 + \beta_2^{(\mu)} y^4 + \text{ etc.},$$

$$\frac{t^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} = \gamma_0^{(\mu)} x + \gamma_1^{(\mu)} x^3 + \gamma_2^{(\mu)} x^5 + \text{ etc.},$$

$$\frac{u^{2\mu}}{\varDelta(y)(2\mu)!} = \delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)} y^2 + \delta_2^{(\mu)} y^4 + \text{ etc.};$$

dann verschwinden, worin der Nerv des Beweises besteht, $\alpha_\sigma^{(\mu)}$ und $\beta_\sigma^{(\mu)}$, sobald $\sigma > (n-1)\mu$ wird, d. h., wenn $(n-1)\mu < \sigma$ ist; und $\gamma_\sigma^{(\mu)}$, $\delta_\sigma^{(\mu)}$ verschwinden, wenn $\sigma < \mu$ ist, d. h. sobald $\mu > \sigma$ wird. Die Seiten rechts von (5.) und (6.) werden nun durch Substitution dieser Reihen:

$$(5.) \qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\varDelta(y)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{[\alpha_0^{(\mu)} x + \alpha_1^{(\mu)} x^3 + \text{ etc.}]\,[\delta_0^{(\mu)} + \delta_1^{(\mu)} y^2 + \delta_2^{(\mu)} y^4 + \text{ etc.}]\},$$

$$(6.) \qquad \frac{\varphi(t+u)+\varphi(t-u)}{2\varDelta(y)}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{[\beta_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)} y^2 + \beta_2^{(\mu)} y^4 + \text{ etc.}]\,[\gamma_0^{(\mu)} x + \gamma_1^{(\mu)} x^3 + \gamma_2^{(\mu)} x^5 + \text{ etc.}]\}.$$

Der Coëfficient von $x^{2h+1} y^{2k}$ in (5.) wird folglich

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \alpha_h^{(\mu)} \delta_k^{(\mu)} = C_{h,k},$$

und der Coëfficient desselben Potenzproductes in (6.) wird

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)} = C_{h,k}.$$

Da nun für alle Werthe von μ, welche k übertreffen, $\delta_k^{(\mu)}$, und für alle Werthe von μ, welche h übersteigen, $\gamma_h^{(\mu)}$ verschwindet, so braucht man die beiden Summen für $C_{h,k}$ statt von $\mu = 0$ bis $\mu = \infty$, nur von $\mu = 0$ bis $\mu = k$ für die erste, und nur von $\mu = 0$ bis $\mu = h$ für die zweite auszudehnen. Also

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha_h^{(\mu)} \delta_k^{(\mu)} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta_k^{(\mu)} \gamma_h^{(\mu)}.$$

Da nun andrerseits $\alpha_h^{(\mu)}$ für alle Werthe von μ, welche $(n-1)\mu < h$ machen, und $\beta_k^{(\mu)}$ für alle Werthe von μ, die $(n-1)\mu < k$ machen, verschwindet, so verschwindet die ganze erste Summe, wenn $(n-1)k < h$ ist, und die ganze zweite Summe, wenn $(n-1)h < k$; wenn $(n-1)k = h$ ist, so reducirt sich die erste Summe auf das einzige Glied

$$\alpha_{(n-1)k}^{(k)} \delta_k^{(k)} = \frac{n(2n-1)(3n-2)\ldots\ldots((2k-1)n-2k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots 2k},$$

welches $\mu = k$ entspricht; und wenn $(n-1)h = k$ ist, so reducirt sich die zweite Summe auf ihr letztes Glied

$$\beta^{(h)}_{(n-1)h}\gamma^{(h)}_{h} = \frac{n(2n-1)(3n-2)\ldots.(2hn-2h+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.(2h+1)}.$$

Im Allgemeinen wird man in der ersten Summe für $C_{h,k}$ alle diejenigen Anfangswerthe von μ vernachlässigen, welche $(n-1)\mu < h$ machen, und die Summe, statt mit $\mu = 0$, erst mit demjenigen kleinsten Werthe von μ anfangen lassen, welcher zuerst $(n-1)\mu \geqq h$ macht. Liegt dieses Minimum von μ schon über k hinaus, so hat die Summe natürlich gar keine Glieder, und verschwindet: liegt dasselbe aber zwischen 0 und k, oder fällt mit k zusammen, so enthält die Summe wirklich so viele Glieder, als es ganze Zahlen von diesem Minimum an incl. bis zu k incl. giebt; nämlich für μ sind alle ganzen Werthe zu setzen, welche

$$\frac{h}{n-1} \leqq \mu \leqq k$$

machen, deren Anzahl übrigens $1+E\left(k-\frac{h}{n-1}\right)$ beträgt; was für elliptische Functionen in 1 übergeht. In derselben Weise kann man die zweite Summe, statt von $\mu = 0$, erst von demjenigen kleinsten Werthe von μ anfangen lassen, welcher zum ersten Male $(n-1)\mu \geqq k$ macht, und die Summe hat gar keine Glieder, wenn dieses Minimum von μ schon über h hinausliegt, da die Summe sich nur bis h erstreckt; liegt dagegen dieses Minimum unter h oder fällt mit h zusammen, welches geschieht, wenn $(n-1)h \geqq k$ ist, so sind für μ alle diejenigen Werthe zu nehmen, welche

$$\frac{k}{n-1} \leqq \mu \leqq h$$

machen, deren Anzahl $1+E\left(h-\frac{k}{n-1}\right)$ beträgt; für elliptische Functionen 1.

Nur bei einigen Folgerungen, die man aus diesen Betrachtungen ziehen kann, verweile ich einen Augenblick, die übrigen dem Leser überlassend. Ich multiplicire die Gleichung

$$C_{h,k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=k} \alpha^{(\mu)}_{k}\delta^{(\mu)}_{k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \beta^{(\mu)}_{k}\gamma^{(\mu)}_{k}$$

mit x^{2h+1}, summire nach h von $h=0$ bis $h=\infty$, und erhalte

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=k} \delta^{(\mu)}_{k}\cdot\frac{\partial^{2\mu}x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h=0}^{k=\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\mu=h}\beta^{(\mu)}_{k}\gamma^{(\mu)}_{k}\right)x^{2k+1} = \sum_{h=E\left(\frac{k}{n-1}\right)}^{h=(n-1)k} C_{h,k}\,x^{2h+1},$$

was sich für elliptische Functionen auf x^{2k+1} reducirt. Ich multiplicire dieselbe Gleichung mit y^{2k}, summire nach k von $k=0$ bis $k=\infty$ und erhalte

$$\sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k}y^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}y}{\Delta(y)\partial u^{2\mu+1}}, \text{ folglich auch}$$

$$\Delta(x) \sum_{k=E\left(\frac{h}{n-1}\right)}^{k=(n-1)h} C_{h,k}x^{2k} = \sum_{\mu=0}^{\mu=h} \gamma_h^{(\mu)} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}},$$

was sich für elliptische Funtionen links auf x^{2h} reducirt. Man vergleiche auch *Jacobi* „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" Seite 126.

Ich nehme noch folgende Entwicklungen an, um sie in die Formel des Theorems zn substituiren:

$$x^{2\mu+1} = \eta_0^{(\mu)}t + \eta_1^{(\mu)}t^3 + \eta_2^{(\mu)}t^5 + \text{ etc.},$$
$$x^{2\mu}\Delta(x) = \vartheta_0^{(\mu)} + \vartheta_1^{(\mu)}t^2 + \vartheta_2^{(\mu)}t^4 + \text{ etc.};$$

und die ähnlichen zwischen y und u. Setzt man diese Reihen, in welchen $\eta_\sigma^{(\mu)}$ und $\vartheta_\sigma^{(\mu)}$ gleich Null sind, sobald $\mu > \sigma$ ist, in die Formel

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k}x^{2h+1}y^{2k}\Delta(y) + \Sigma C_{h,k}y^{2h+1}x^{2k}\Delta(x),$$

so erhält man

$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k}x^{2h+1}(\vartheta_0^{(k)} + \vartheta_1^{(k)}u^2 + \text{ etc.}) + \Sigma C_{h,k}x^{2k}\Delta(x)\eta_0^{(h)}u + \eta_1^{(h)}u^3 + \text{ etc.}),$$
$$\varphi(t+u) = \Sigma C_{h,k}y^{2k}\Delta(y)(\eta_0^{(h)}t + \eta_1^{(h)}t^3 + \text{ etc.}) + \Sigma C_{h,k}y^{2h+1}(\vartheta_0^{(k)} + \vartheta_1^{(k)}t^2 + \text{ etc.});$$

ordnet man hier die erste Reihe nach Potenzen von u, die zweite nach Povon t und vergleicht mit den Entwicklungen von $\varphi(t+u)$, welche der *Taylor*sche Satz darbietet, so folgt

$$\frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu}x}{\partial t^{2\mu}} = \sum_{h,k} \vartheta_\mu^{(k)} C_{h,k}x^{2h+1}, \qquad \frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}x}{\partial t^{2\mu+1}} = \sum_{h,k} \eta_\mu^{(h)} C_{h,k}x^{2k}\Delta(x),$$
$$\frac{1}{(2\mu+1)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu+1}y}{\partial u^{2\mu+1}} = \Sigma \eta_\mu^{(h)} C_{h,k}y^{2k}\Delta(y), \qquad \frac{1}{(2\mu)!} \cdot \frac{\partial^{2\mu}y}{\partial u^{2\mu}} = \Sigma \vartheta_\mu^{(k)} C_{h,k}y^{2h+1}.$$

In diesen Reihen verschwinden $\eta_\mu^{(h)}$ und $\vartheta_\mu^{(k)}$, sobald $h > \mu$ resp. $k > \mu$ ist, und da $C_{h,k}$ verschwindet, sobald $k > (n-1)h$ und sobald $h > (n-1)k$ ist, so erhält man auf diese Weise wiederum rückwärts die Entwicklung des 2μten Differentialquotienten von x nach t oder von y nach u durch eine ganze Function vom Grade $2\mu(n-1)+1$, und die des $2\mu+1$ten Differentialquotienten durch das Product einer ganzen Function vom Grade $2\mu(n-1)$ in $\Delta(x)$. Es läfst sich hieraus mit Leichtigkeit beweisen, dafs die Eigenschaft, welche das obige allgemeine Theorem ausspricht, eine *ausschliefsliche* Eigenschaft der *Abel*schen Integrale bildet, so dafs jede Function, welche dem Theorem Genüge leistet, nothwendig die Umkehrung eines *Abel*schen Integrals ist.

Berlin, im Februar 1847.