V. Über die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen.

Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche *Jacobi* zur Bestimmung des Zählers und Nenners der Transformationsformeln für die elliptischen Functionen aufgestellt hat, haben mich von jeher mit dem gröfsten Interesse erfüllt. Schon in einer frühern Arbeit versuchte ich zu denselben auf einem Wege zu gelangen, welcher von demjenigen verschieden ist, welchen *Jacobi* eingeschlagen hat *). Wenn ich nun wiederum auf denselben Gegenstand zurückkomme, so geschieht dies, weil ich jetzt die einfachsten und wahren Principien für die Ableitung jener Differentialgleichungen gefunden zu haben glaube: Principien, welche auch bei andern Untersuchungen von Nutzen sein können, und die ich deshalb hier mittheilen will.

Wenn irgend einer Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln x und y ein algebraisches Integral genügt, so kann man dasselbe immer auf die Form $U=0$ bringen, wo U eine ganze Function von x und y ist. Es wird angenommen, die Differentialgleichung sei selbst algebraisch, d. h. die Coëfficienten der Differentiale oder der Differentialquotienten seien algebraische Verbindungen aus x und y; man wird übrigens die Differentialgleichung immer auf eine solche Form bringen können, in welcher die Differentiale oder Differentialquotienten nur rational vorkommen und die Coëfficienten in Bezug auf den einen Variabeln, z. B. x, rational sind. Eliminirt man mit Hülfe der aus $U=0$ abgeleiteten Gleichungen $\partial U=0$, $\partial^2 U=0$ u. s. w. aus der vorgelegten Differentialgleichung alle Differentiale von x und y, so wird man zu einem Resultate der Elimination $R=0$ gelangen, in welchem R eine ganze Function von x ist, deren Coëfficienten von y abhängen. Da nun die Gleichung $R=0$ jedesmal erfüllt ist, sobald man in R statt x eine Wurzel der Gleichung $U=0$ setzt, so hat die $R=0$ alle Wurzeln der Gleichung $U=0$; diese Wurzeln sind sämmtlich Functionen von y allein, und da die Gleichung $U=0$, in Bezug auf x aufgelöset, keine *gleichen* Wurzeln haben kann, so lange y allgemein bleibt, so mufs ***R durch U algebraisch theilbar sein;***

---

*) *Jacobi's* Beweis stützt sich auf die Theorie der Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung.

setzt man also den Quotienten der Division $= R_1$, so hat man das Resultat

$$R = UR_1,$$

wo R_1 eine neue ganze Function von x ist, deren Grad um den Grad von U niedriger ist, als der von R; übrigens ist R_1 auch in Bezug auf y ganz, sobald R diese Eigenschaft besitzt und die höchste Potenz von x in U den Coëfficienten 1 hat. Da man aus der vorgelegten Differentialgleichung durch wiederholte Differentiationen neue bilden kann, denen ebenfalls das algebraische Integral $U = 0$ genügt, so wird man unendlich viele solche Resultate der Elimination $R = 0$ erhalten können, denen jedesmal genügt wird, sobald $U = 0$ ist, und man wird unter ihnen dasjenige heraussuchen, oder durch Combination mehrerer ein solches Resultat $R = 0$ zu erhalten suchen, in welchem der Grad von R und demnach auch der von R_1 möglichst niedrig ist. Um nun R_1 zu finden, differentiire man die Gleichung $R = UR_1$, in welcher x und y als unabhängige Variabeln angesehen werden können, nach x allein; dies giebt

$$R' = UR_1' + U'R_1,$$

und für alle Werthe von x, welche $U = 0$ machen, hat man also $R' = U'R_1$ und $R_1 = \frac{R'}{U'}$. Gelingt es nun mit Hülfe der vorgelegten Differentialgleichung diesen speciellen Werth von R_1, welcher in Form eines Quotienten erscheint, unter der Voraussetzung $U = 0$ durch eine ganze Function von x auszudrücken, welche ich mit S_1 bezeichnen will, so sind die beiden ganzen Functionen R_1 und S_1 einander gleich für alle Werthe von x, die $U = 0$ machen, und es ist, für dieselben Werthe von x, $R_1 - S_1 = 0$, und demnach ist $R_1 - S_1$ für alle Werthe von x algebraisch durch U theilbar; man hat daher eine Gleichung von der Form

$$R_1 = UR_2 + S_1,$$

wo R_2 wiederum ganz in Bezug auf x und von niederem Grade als R_1 ist. Fährt man auf diese Weise fort die Bestimmung von R_2 auf die einer Function von niederem Grade, u. s. w., zurückzuführen, so gelangt man zuletzt entweder auf eine Constante in Bezug auf x, oder auf eine Function, welche sich durch andere Methoden bestimmen läfst. Wenn das Verfahren gelingt, so sieht man leicht, dafs man zu einem Ausdrucke für R geführt wird, welcher gewissermafsen nach Potenzen von U geordnet ist, und da R nur aus den partiellen Differentialquotienten von U nach x und y zusammengesetzt ist, so erhält man eine partielle Differentialgleichung zur Bestimmung von U. Führt man in dieser partiellen Differentialgleichung die Differentiationen nach y

wirklich aus, so erhält man eine totale Differentialgleichung in Bezug auf x, welche, da sie ganz unabhängig von dem Werthe von y gilt, in Bezug auf y gehörig zerfällt werden kann und dann eine Reihe von totalen Differentialgleichungen liefert, welche zur Bestimmung der Coëfficienten in U, als reiner Functionen von x dienen.

Um von diesen allgemeinen Betrachtungen, welche sich auch auf mehr als zwei Variabeln ausdehnen lassen, zu unserem Gegenstande zurückzukommen, sei, wenn es möglich ist, $U=0$ ein algebraisches Integral einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{\psi(y)}},$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von x vom Grade μ und $\psi(y)$ eine beliebige Function von y sein mag. Der Grad von U, in Bezug auf x, welchen ich nach *Abel's* Vorgange durch δU bezeichnen will, sei $=n$. Um die Rechnung abzukürzen, sei statt x eine neue Variable t durch die Relation $\frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \partial t$ eingeführt, so dafs unsere Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sqrt{\psi(y)}, \qquad \partial y^2 = \psi(y)\partial t^2$$

wird. Die Differentiation der Gleichung $U=0$ giebt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} = 0,$$

und wenn man die in $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ enthaltene irrationale Function $\sqrt{\varphi(x)}$ eliminirt, so erhält man

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist wirklich eine ganze Function von x vom Grade $2n+\mu-2$, denn es ist $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$ $= \varphi(x)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$, wo $\varphi(x)$ vom Grade μ, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ vom Grade $n-1$, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2$ vom Grade $2n-2$, also $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2$ vom Grade $2n+\mu-2$, während $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ von demselben Grade wie U, also $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$ vom Grade $2n$ ist; sobald demnach $\mu \geqq 2$ ist, so ist der ganze obige Ausdruck vom Grade $2n+\mu-2$. Da nun jene ganze Function

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$$

für jeden der Gleichung $U=0$ genügenden Werth von x verschwindet, so ist sie durch U algebraisch theilbar. Es sei

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV;$$

dann ist V vom Grade $n+\mu-2$, nämlich $\delta V = 2n+\mu-2-\delta U = n+\mu-2$. Um V zu finden, oder wenigstens den speciellen Werth, den V annimmt, wenn für x eine Wurzel der Gleichung $U=0$ gesetzt wird, differentiire man nach t allein, indem man y als constant ansieht und setze nachher $U=0$; man erhält

$$2\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - 2\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right) = V\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right).$$

Um den Ausdruck zur Linken durch $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ dividiren zu können, mufs man für $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ seinen Werth aus der Gleichung $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}=0$, oder $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\sqrt{\psi(y)}$ setzen; man erhält so, wenn man sogleich mit $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)$ dividirt:

$$2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\sqrt{\psi(y)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right) = V.$$

Dieser Ausdruck für den *speciellen* Werth von V, obgleich sehr einfach, kann doch nicht zum weitern Fortschritt und zur Auffindung des *allgemeinen* Werthes von V benutzt werden, denn er ist keine ganze Function von x *); zwar ist $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$ eine solche, aber nicht $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)$, was noch die Irrationalität $\sqrt{\varphi(x)}$ enthält; man mufs also $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)$ durch einen andern Ausdruck ersetzen. Differentiirt man nun die Gleichung $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}=0$ noch einmal nach allem t, so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

dies von dem Ausdrucke für V,

$$V = 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t} \text{ subtrahirt, giebt}$$

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

---

*) Allgemein ist hier ein Werth, wenn in ihm die Variabeln x und y gänzlich von einander unabhängig angenommen werden können; speciell, wenn er nur in sofern gültig ist, als die Variabeln x und y mit einander durch die Gleichung $U=0$ verknüpft werden.

Dieser Ausdruck für V ist sicher eine ganze Function von x, denn

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\varphi(x) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\varphi'(x)$$

ist ganz und vom Grade $n+\mu-2$; $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ und $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)$ sind, ebenso wie U, ganz und vom Grade n, weil die partielle Differentiation nach y in dieser Hinsicht gar nichts ändern kann; endlich $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \psi(y)$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\psi'(y)$ enthalten x gar nicht; es ist also wirklich der zuletzt aufgestellte Ausdruck für V ganz in x, und wir sehen, dafs er vom Grade $n+\mu-2$, also sein Grad $=\delta V$ ist. Die Differenz zwischen dem allgemeinen V und jenem Ausdruck ist folglich, nach den im Anfange auseinandergesetzten allgemeinen Principien, durch U theilbar und man hat für jeden Werth von x und y:

$$V = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + UW,$$

wo W eine ganze Function von x ist. Der Grad von W ist leicht zu bestimmen, denn es ist $\delta(UW) = \delta V = n+\mu-2$, $\delta U = n$, folglich $\delta W = \mu-2$; der Grad von W ist also, was sehr wesentlich zu bemerken, gänzlich unabhängig von dem Grade von U und hängt nur von dem der Function $\varphi(x)$ ab.

Setzt man nun den jetzt gefundenen allgemeinen Werth von V in die Gleichung

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 - \psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 = UV,$$

ersetzt $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ durch ihre Werthe $\psi(y)$ und $\frac{1}{2}\psi'(y)$, und überträgt die Differentiationen nach t, wenn man will, auf solche nach x, so erhält man ein sehr allgemeines Theorem, nämlich eine partielle Differentialgleichung für U, welche man zerfällen kann, sobald die Zusammensetzung von U in Bezug auf y festgesetzt wird.

Es sei U von der Form $P+Qy$, wo P und Q von y unabhängig sind, $\delta P = n$, $\delta Q = n-1$ und in P der Coëfficient des höchsten Gliedes $=1$ ist; dann ist also, wenn man U nach x ordnet, der Coëfficient des höchsten Gliedes $=1$, und die übrigen Coëfficienten sind von der Form $a+by$, wo a und b constant sind. Ferner seien $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ ganze Functionen vom vierten Grade. Unter diesen Voraussetzungen, welche bei der Transformation der elliptischen Integrale Statt finden, hat man $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = Q$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)y$, $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)y$, $\delta W = 2$. Nach Einsetzung dieser Werthe geht die partielle Differentialgleichung in

$$(1.)\quad \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)y\right\}^2-\psi(y)\,Q^2=U\left\{\left(\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right)y-\tfrac{1}{2}Q\psi'(y)+UW\right\}$$

über. Man überzeugt sich leicht nach der für U festgesetzten Form, dafs V sowohl als W auch in Bezug auf y ganz sein werden. Was die Grade dieser ganzen Functionen in Bezug auf y betrifft, so wird der Grad des Ausdrucks

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2-\psi(y)\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2,$$

welcher $=UV$ ist, offenbar gleich dem vom $\psi(y)$, also $=4$, mithin der von V gleich 3; von demselben Grade 3 ist offenbar auch der für $V-UW$ gewonnene Ausdruck

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)-\tfrac{1}{2}Q\psi'(y);$$

denn dessen Grad in Bezug auf y ist gleich dem von $\psi'(y)$, weil $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)$ nur vom ersten, dagegen $\psi'(y)$ vom dritten Grade ist; folglich ist auch UW vom dritten (höchstens) und W also vom zweiten Grade in y. W ist also sowohl in x als in y vom zweiten Grade, und man kann setzen:

$$W=p+qy+ry^2,$$

wo p, q, r vom zweiten Grade in x und von y unabhängig sind. Es bleibt also nun weiter nichts zu thun, als diesen Werth von W in die Gleichung (1.) zu setzen, Alles auf beiden Seiten nach Potenzen von y zu ordnen und die Coëfficienten derselben Potenzen einander gleich zu setzen. Man erhält durch diese Zerfällung, da beide Seiten der Gleichung (1.) in Bezug auf y vom fünften Grade sind, sechs Gleichungen, von denen aber nur drei totale Differentialgleichungen für P und Q sind, während die übrigen drei zur Bestimmung der drei Functionen von x, zweiten Grades, p, q und r benutzt werden können. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, welche keine Schwierigkeiten hat, überlasse ich dem Leser, da es mir nur darauf ankam, die Principien und die Methode so klar als möglich auseinanderzusetzen.