11.

Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Dr. phil. *G. Eisenstein*, Privatdocent zu Berlin.)

VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen.

(Fortsetzung der letzten Abhandlung im vorigen Heft.)

Es bietet sich bei Gelegenheit dieser Art von Transformationen der Indices ein Fall dar, welcher ein ganz besonderes Interesse für sich in Anspruch nimmt; es ist derjenige, wenn die ursprünglichen Moduln der Periodicität α und β mit den transformirten α' und β' in der Proportion

$$\alpha:\beta = \alpha':\beta'$$

stehen; in welchem Falle man sagen kann, dafs der Quotient der beiden Moduln $\frac{\alpha}{\beta}$, welcher bei den hier vorkommenden Functionen eine Hauptrolle spielt, durch die Transformation ungeändert bleibt. In diesem Falle wird

$$\alpha'm'+\beta'n' = \frac{\alpha'}{\alpha}\Big(\alpha m'+\frac{\beta'\alpha}{\alpha'}n'\Big) = \frac{\alpha'}{\alpha}(\alpha m'+\beta n'),$$

$$\alpha'm'+\beta'n'+\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha}\Big(\alpha m'+\beta n'+\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\Big),$$

$$\Sigma\frac{1}{(\alpha'm'+\beta'n'+\gamma)^g} = \Big(\frac{\alpha}{\alpha'}\Big)^g\Sigma\frac{1}{\Big((\alpha m'+\beta n'+\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\Big)^g};$$

die transformirten Summen gehen also wieder in die ursprünglichen über, nur tritt $\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma$ an die Stelle von γ. Wenn man daher für den Augenblick

$$\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^g} = \varphi(\gamma)$$

schreibt, so findet entweder geradezu die Gleichung

$$\varphi(\gamma) = \Big(\frac{\alpha}{\alpha'}\Big)^g\varphi\Big(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\Big), \qquad \varphi\Big(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\Big) = \Big(\frac{\alpha'}{\alpha}\Big)^g\varphi(\gamma)$$

Statt, wenn der Exponent $g>2$ ist, oder diese Gleichung wird richtig, wenn man auf der einen Seite eine gewisse ganze Function ersten Grades von γ hinzufügt. Es läfst sich also $\varphi\Big(\frac{\alpha}{\alpha'}\gamma\Big)$ stets auf sehr einfache Weise in $\varphi(\gamma)$

ausdrücken; dies heifst aber in der Sprache dieser Theorie: „*Die hier vor-* „*kommenden Functionen von* γ *besitzen ein Multiplicationstheorem für* „*den Multiplicator* $\frac{\alpha}{\alpha'}$ *oder lassen sich mit* $\frac{\alpha}{\alpha'}$ *multipliciren.*" Die Bedingungen dieses Falles sind durch die Gleichungen

$$\beta = \omega\alpha, \qquad \beta' = \omega\alpha',$$
$$\alpha' = \varpi\alpha, \qquad \beta' = \varpi\beta$$

ausgesprochen. Führt man vermittels dieser Gleichungen die Buchstaben ω und ϖ, welche die gleichen Verhältnisse der Moduln anzeigen, in die Formeln

$$\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta,$$
$$\beta' = \mu\alpha + \varrho\beta$$

ein, indem man die erste dieser Formeln durch α, die zweite durch β dividirt, so erhält man die Gleichungen

$$\varpi = \lambda + \nu\omega,$$
$$\varpi = \mu\cdot\frac{1}{\omega} + \varrho$$

zur Bestimmung von ω und ϖ; hieraus läfst sich ϖ unmittelbar eliminiren und man erhält $\lambda + \nu\omega = \frac{\mu}{\omega} + \varrho$, also die quadratische Gleichung

$$\nu\omega^2 + (\lambda - \varrho)\omega - \mu = 0$$

für ω. Um ω aus obigen Gleichungen zu eliminiren, schreibe man sie wie folgt: $\varpi - \lambda = \nu\omega$, $\varpi - \varrho = \frac{\mu}{\omega}$ und multiplicire diese beiden mit einander; dies giebt $(\varpi - \lambda)(\varpi - \varrho) = \mu\nu$, folglich für ϖ die quadratische Gleichung:

$$\varpi^2 - (\lambda + \varrho)\varpi + \lambda\varrho - \mu\nu = 0;$$

die ursprünglichen Gleichungen für ω und ϖ haben übrigens eine sehr ähnliche Form mit denen, welche in der Theorie der Planetenstörungen vorkommen. Da nach den ersten Principien $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ imaginär, d. h. wesentlich ***nicht reell*** sein mufs, so kann die Determinante der quadratischen Gleichung für ω, nämlich der Ausdruck

$$(\lambda - \varrho)^2 + 4\mu\nu = \Delta$$

nur negativ sein. Diesem Ausdrucke gebe man die Form

$$\Delta = (\lambda + \varrho)^2 - 4\lambda\varrho + 4\mu\nu = (\lambda + \varrho)^2 - 4\varepsilon;$$

man sieht dann sogleich, dafs derselbe gleichzeitig die Determinate der andern quadratischen Gleichung

$$\varpi^2 - (\lambda + \varrho)\varpi + \varepsilon = 0$$

ist; ω und ϖ enthalten daher eine und dieselbe Irrationalität $\sqrt{\Delta}$ und man hat

$$\omega = \frac{\varrho - \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2\nu}, \qquad \varpi = \frac{\varrho + \lambda \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

wo die Zeichen $\pm$ wegen der Gleichung $\varpi = \lambda + \nu\omega$ correspondiren. Da nun $\varDelta$ negativ sein mufs, so bleibt zunächst der Fall $\varepsilon = -1$ ausgeschlossen, für welchen sich $\varDelta$ als Summe von zwei Quadraten $(\lambda+\varrho)^2 + 4$ darstellt, und für $\varepsilon = +1$ mufs

$$(\lambda+\varrho)^2 < 4$$

sein, daher kann nur $\lambda+\varrho = 0$ oder $= \pm 1$ sein, und dann ist $\varDelta = -4$ oder $= -3$; es können also einzig und allein nur folgende drei Combinationen den Bedingungen dieses Falles Genüge leisten:

$$\lambda+\varrho = 0, \qquad \varDelta = -4, \qquad \varpi = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm i,$$

$$\lambda+\varrho = 1, \qquad \varDelta = -3, \qquad \varpi = \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

$$\lambda+\varrho = -1, \qquad \varDelta = -3, \qquad \varpi = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

also ϖ kann nur sechs Werthe haben, welche zugleich sämmtlich Wurzeln der Einheit sind; nämlich wenn r eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet, so sind die sechs Werthe von ϖ:

$$\pm i, \quad \pm r \quad \text{und} \quad \pm r^2;$$

d. h. alle ***imaginären vierten und sechsten Wurzeln der Einheit***, d. h. alle imaginären $n$ten Wurzeln der Einheit, wenn n eine ganze Zahl ist, für welche die Anzahl der Zahlen, welche kleiner als n und zu n relative Primzahlen sind, ***zwei*** beträgt. Ferner ist ω in ϖ in allen Fällen durch die Gleichung

$$\omega = \frac{-\lambda+\varpi}{\nu}$$

bestimmt, wo für λ und ν irgend zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler genommen werden können, zu welchen sich zwei andere ganze Zahlen μ und ϱ den Bedingungen $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$ und $\lambda + \varrho = 0, \pm 1$ gemäfs aufstellen lassen. Für $\varpi = \pm i$ ist $\varrho = -\lambda$, also $-\lambda^2 - \mu\nu = 1$, $-\mu = \frac{\lambda^2+1}{\nu}$, folglich $\lambda^2 \equiv -1 \pmod{\nu}$; es mufs also -1 zu ν quadratischer Rest sein, folglich darf ν oder $\frac{1}{2}\nu$ nur Primfactoren von der Form $4n+1$ enthalten, aber ν darf weder durch 4, noch durch Primzahlen der Form $4n+3$ theilbar sein. Um alle Werthe von λ, μ, ν, ϱ zu erhalten, verfährt man am besten, wenn man λ ganz beliebig annimmt, die Form λ^2+1 auf irgend eine Art in das Product zweier ganzen reellen Zahlen zerlegt, deren eine man $-\mu$, die andere ν nennt, und dann $\varrho = -\lambda$ setzt; es giebt also jedesmal unendlich viele verschiedene Werthe von ω von der Form $\frac{-\lambda\pm i}{\nu}$, welche den beiden Werthen

$\varpi = \pm i$, wo die Zeichen einander entsprechen, zugehören. Wenn übrigens $\frac{-\lambda \pm i}{\nu}$ in der Reihe der Werthe von ω vorkommt, so kommt auch $\frac{\lambda \pm i}{-\nu} = \frac{-\lambda \mp i}{\nu}$ vor; denn wenn das System $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ den Bedingungen $\lambda^2 + 1 = -\mu\nu$, $\lambda + \varrho = 0$ genügt, so genügt auch das System $-\lambda, -\mu, -\nu, -\varrho$ offenbar denselben Bedingungen: es stimmen daher die beiden Reihen von Werthen von ω, deren eine $\varpi = +i$, die andere $\varpi = -i$ entspricht, vollkommen mit einander überein; nur gehören die in beiden Reihen übereinstimmenden Werthe von ω zu verchiedenen und zwar zu entgegengesetzten Systemen der vier ganzen Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft der den beiden Werthen $\varpi = \pm i$ gemeinschaftlichen Reihe von Werthen von ω besteht darin, dafs immer je zwei Glieder der Reihe gefunden werden können, deren Product $= +1$ ist; wenn nämlich $\frac{-\lambda + i}{\nu}$ vorkommt, so kommt auch $\frac{-\lambda - i}{-\mu}$ vor, deren Product $= \frac{\lambda^2 + 1}{-\mu\nu} = 1$ ist; denn die obigen Bedingungen bleiben erfüllt, wenn man $-\mu$ an die Stelle von ν und zugleich $-\nu$ an die Stelle von μ setzt. Die einfachsten Werthe von ω sind übrigens $\omega = \pm i$.

Für $\varpi = \pm r, \pm r^2$ wird man durch die Gleichung $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$ stets zu der Auflösung einer Gleichung von der Form

$$t^2 + t + 1 = uv$$

in ganzen Zahlen geführt, d. h. zu der Zerfällung eines quadratischen Ausdrucks mit der Determinante -3 oder eines Products zweier conjugirten ganzen complexen Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit, wie $(t-r)(t-r^2)$, in das Product zweier reellen ganzen Factoren; denn für $\varpi = r$ und $\varpi = r^2$ wird $\varrho = -\lambda - 1$, also $\lambda(-\lambda - 1) - \mu\nu = 1 = -\lambda^2 - \lambda - \mu\nu$, d. h.

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = -\mu\nu,$$

und für $\varpi = -r$ und $\varpi = -r^2$ wird $\varrho = -\lambda + 1$, also $\lambda(-\lambda + 1) - \mu\nu = 1 = -\lambda^2 + \lambda - \mu\nu$, d. h.

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = -\mu\nu.$$

Berücksichtigt man die Gleichung $1 + r + r^2 = 0$, so sieht man, dafs für diese vier Fälle die Werthe von ω immer auf die Form

$$\omega = \frac{t - r}{u}$$

gebracht werden können; denn für $\varpi = r$ hat man $\omega = \frac{-\lambda + r}{\nu} = \frac{\lambda - r}{-\nu}$, für $\varpi = r^2$ wird $\omega = \frac{-\lambda + r^2}{\nu} = \frac{-\lambda - 1 - r}{\nu}$, für $\varpi = -r$ wird $\omega = \frac{-\lambda - r}{\nu}$, endlich für $\varpi = -r^2$ hat man $\omega = \frac{-\lambda - r^2}{\nu} = \frac{\lambda - 1 - r}{-\nu}$. Umgekehrt, wenn man auf irgend eine Art die ganzen Zahlen t und u der Gleichung $t^2 + t + 1 = uv$ genügend bestimmt und den Ausdruck $\omega = \frac{t-r}{u}$ an die Spitze stellt, so kann man, während dieser Werth von ω unverändert bleibt, zu jedem der vier Werthe von ϖ ein zugehöriges System $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ in t, u und v bestimmen; in der That braucht man für die vier Werthe von ϖ nur folgende Tafel aufzustellen:

$$\begin{array}{lllll}
\varpi = r, & t = \lambda, & u = -\nu, & v = \mu, & \varrho = -\lambda - 1, \\
\varpi = r^2, & t = -\lambda - 1, & u = \nu, & v = -\mu, & \varrho = -\lambda - 1, \\
\varpi = -r, & t = -\lambda, & u = \nu, & v = -\mu, & \varrho = -\lambda + 1, \\
\varpi = -r^2, & t = \lambda - 1, & u = -\nu, & v = \mu, & \varrho = -\lambda + 1,
\end{array}$$

aus welcher sich das Folgende ergiebt:

$$\begin{array}{lllll}
\varpi = r, & \lambda = t, & \mu = v, & \nu = -u, & \varrho = -t - 1, \\
\varpi = r^2, & \lambda = -t - 1, & \mu = -v, & \nu = u, & \varrho = t, \\
\varpi = -r, & \lambda = -t, & \mu = -v, & \nu = u, & \varrho = t + 1, \\
\varpi = -r^2, & \lambda = t + 1, & \mu = v, & \nu = -u, & \varrho = -t,
\end{array}$$

und zu bemerken, dafs für alle vier Systeme $\lambda\varrho - \mu\nu = -t(t+1) + uv = 1$ wird, um einzusehen, dafs durch diese vier Systeme, welche den vier verschiedenen Werthen von ϖ, aber einem und demselben Werthe von ω entsprechen, allen Bedingungen genügt ist. Es folgt hieraus, dafs den vier Werthen $\varpi = \pm r$, $\pm r^2$ eine gemeinschaftliche Reihe von Werthen von ω entspricht, und dafs man diese gemeinschaftliche Reihe erhält, wenn man alle Combinationen von ganzen Zahlen t, u, welche der Gleichung $t^2 + t + 1 = uv$ genügen, in

$$\omega = \frac{t-r}{u}$$

setzt. In dieser Reihe kommen ebenfalls immer zwei zusammengehörige Glieder vor, deren Product $= +1$ ist, nämlich

$$\frac{t-r}{u} \quad \text{und} \quad \frac{t-r^2}{v} = \frac{-t-1-r}{-v};$$

übrigens sind u und v als Theiler der Form $t^2 + t + 1$ stets ungerade und nur durch 3 oder durch Primzahlen $3n+1$ theilbar. Die einfachsten Werthe von ω sind $\omega = \pm r$ und $\omega = \pm r^2$. Die Functionen, deren Argumente mit ϖ (welches hier stets eine vierte oder sechste Wurzel der Einheit ist) multiplicirt werden können und welche zu der eben angestellten Untersuchung die Veranlassung gegeben haben, spielen eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

Es wird in der That einen Theil dieser Arbeit ausmachen, unmittelbar auf die Eigenschaften der diesem Falle entsprechenden unendlichen Doppelproducte ohne Hülfe jeder andern Theorie die Fundamentaltheoreme für die Reste der vierten und sechsten Potenzen zu begründen. Es konnte daher die vorhergehende Auseinandersetzung, welche vielleicht zu lange bei der Behandlung eines speciellen Falles zu verweilen schien, nicht unterlassen werden. Übrigens sind die dem Falle $\varpi = \pm i$ entsprechenden Functionen unter dem Namen der lemniscatischen Functionen, namentlich von *Abel,* behandelt worden, nachdem schon *Gaufs* in den „Disquisitiones Arithmeticae" im Vorbeigehen auf sie aufmerksam gemacht hatte; dagegen scheinen die andern hier vorkommenden Functionen, für welche ϖ eine sechste Wurzel der Einheit ist, und auf welche ich schon in frühern Abhandlungen wiederholt aufmerksam gemacht habe, bisher auffallend vernachlässigt worden zu sein, und ist dies um so weniger zu rechtfertigen, als diese Functionen in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen ganzen Zahlen in der That durchgängig die Rolle der lemniscatischen Functionen übernehmen und in der That von den bisher bekannten die einzigen Functionen sind, die in jenen seltenen und fruchtbaren Eigenschaften den lemniscatischen an die Seite gestellt werden können, welche die letztern an die Spitze aller anderen elliptischen Functionen zu erheben scheinen.

Bei Gelegenheit der hier untersuchten Transformationen der Indices bietet sich die Frage nach denjenigen Transformationen dar, für welche auch

$$m = \lambda m' + \mu n', \qquad n = \nu m' + \varrho n'$$

gesetzt wird, während aber nicht wie bisher $\lambda\varrho - \mu\nu = \pm 1$, sondern irgend einer anderen positiven oder negativen ganzen Zahl ε gleich ist. Diese Transformationen, bei welchen nicht durch ein einziges, sondern erst durch mehrere Systeme von Substitutionen alle Werthe der Indices erschöpft werden, gehören in eine andere Categorie, indem sie vier neue Indices statt der beiden ursprünglichen einführen, und sollen daher in einem späteren Paragraphen besonders betrachtet werden. Es wird sich dann zeigen, dafs Alles, was man bisher mit dem Namen Transformation der elliptischen Functionen bezeichnet hat, unter dieser allgemeineren Gattung von Transformationen der Indices begriffen ist.

4.

Die Convergenz des unendlichen Doppelproducts, welches den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, so wie die Convergenz der mit ihm zusammenhängenden Doppelsummen, wenn man im Producte die Multiplication, in den Summen die Addition zuerst nach dem einen Index (m) und dann nach dem andern Index (n) verrichtet sich vorstellt, wird dadurch nachgewiesen, dafs man die eine Multiplication oder Addition (nach m) mit Hülfe der Kreis- und Exponentialfunctionen wirklich ausführt und die Convergenz der durch dieses Verfahren erhaltenen einfachen Producte oder einfachen Summen mit dem einen Index n der Untersuchung unterwirft. Man bediene sich zu dem Ende des folgenden Systems von Formeln, welche sich auf Kreis- und Exponentialfunctionen beziehen.

Man betrachte zunächst die folgenden einfachen Reihen:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{x+m},\quad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^2},\quad \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\frac{1}{(x+m)^3},\quad \text{u. s. w. f.},$$

welche ich der Ordnung nach durch

$$(1,x),\quad (2,x),\quad (3,x),\quad (4,x),\quad \text{u. s. w.}$$

bezeichnen will, indem ich sie als Functionen von x einführe. Aus den Principien des ersten Paragraphen geht für diese Reihen hervor, dafs $(2,x)$, $(3,x)$ in infinit. von der Anordnung der Glieder unabhängig convergirende Summen bilden und deshalb vollkommen bestimmte Functionen von x darstellen, welche in der That als Totalitäten aller unendlich vielen, sie zusammensetzenden Glieder anzusehen sind. Dagegen $(1,x)$ wird erst dann zu einer bestimmten Function von x, wenn man sich über die Reihenfolge der Glieder in der Summe entscheidet. Man nimmt an, $(1,x)$ werde als Grenze der Summe

$$\sum_{m=-k}^{m=k}\frac{1}{x+m}$$

für $k=\infty$ betrachtet, d. h. man setzt

$$(1,x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}+\text{in inf.}$$
$$= \frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x}{x^2-4}+\frac{2x}{x^2-9}+\text{in inf.}$$

gleich einer Reihe, deren genugsam bekannte Convergenz aus den Principien in §. 1. folgt. Die hier vorkommenden Functionen sind sämmtlich einfach periodisch und ihr Modul der Periodicität ist $=1$; denn transformirt man in den Summen den Index m, indem man $m+1$ statt m setzt, so geht x in $x+1$ über, während die von der Anordnung der Glieder unabhängigen Reihen $(2, x)$, $(3, x)$ u. s. w. gänzlich unverändert bleiben und $(1, x)$ den Zuwachs

$$\nabla\Sigma\frac{1}{x+m} = \text{Lim}\left\{\sum_{m=-k}^{m=k}\frac{1}{x+m+1} - \sum_{m=-k}^{m=k}\frac{1}{x+m}\right\} = \text{Lim}\left\{\sum_{m=-k+1}^{m=k+1}\frac{1}{x+m} - \sum_{m=-k}^{m=k}\frac{1}{x+m}\right\}$$

$$= \text{Lim}\left\{\frac{1}{x+k+1} - \frac{1}{x-k}\right\} = 0$$

erhält, also ebenfalls unverändert bleibt.

Die Fundamental-Eigenschaften dieser einfach-periodischen Functionen ergeben sich aus der Betrachtung einer einzigen identischen Gleichung, nämlich der folgenden:

$$(a.)\qquad \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right)+\frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

in welcher p und q irgend welche Gröfsen sein können, die von Null verschieden sind, und deren Summe ebenfalls von Null verschieden ist. Man setze

$$p = x+m,\qquad q = -x-n,\qquad p+q = m-n,$$

und nehme an, dafs m und n irgend zwei *verschiedene* reelle ganze Zahlen seien und dafs x keine ganze Zahl, übrigens beliebig complex sei. Man erhält

$$(b.)\quad \frac{1}{(x+m)^2}\cdot\frac{1}{(x+n)^2} = \frac{1}{(m-n)^2}\left(\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\right)+\frac{2}{(m-n)^3}\left(\frac{1}{x+m}-\frac{1}{x+n}\right).$$

Setzt man hier für m und n, unabhängig von einander, alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, mit Ausnahme derer, welche $m=n$ machen, und summirt über diese Werthe nach m und n als Indices, so erhält man links eine Doppelsumme, welche von der Anordnung der Glieder unabhängig ist, und welche sich durch die obigen Functionen in der Form

$$(2, x)^2-(4, x)$$

darstellen läfst; denn nimmt man bei der Summation alle Combinationen m, n, ohne diejenigen, für welche $m=n$ ist, auszuschliefsen, so steht links das Product aus den beiden einfachen Summen

$$\Sigma\frac{1}{(x+m)^2}\quad\text{und}\quad\Sigma\frac{1}{(x+n)^2},$$

deren jede $=(2, x)$ ist, während diejenigen Glieder der Doppelsumme, für welche $m=n$ ist, und welche ausgeschlossen, deren Summe also von $(2, x)^2$ subtrahirt werden mufs, für sich die einfache Reihe

$$\Sigma\frac{1}{(x+m)^4} = (4, x)$$

bilden. Auf der rechten Seite kann man, da die Doppelsumme von der Anordnung der Glieder unabhängig ist, $m-n$ als neuen Index m' einführen, indem man n beibehält und $m'+n$ an die Stelle von m setzt; denn $m-n$ durchläuft für jeden stehenden Werth von n alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞, mit Ausschlufs der Null; nach der Transformation der Indices durchläuft also n alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ ohne Ausnahme und m' alle diese Werthe mit Ausschlufs von $m'=0$. Man erhält hiernach rechts

$$\Sigma\Sigma\Big\{\frac{1}{m'^2}\Big(\frac{1}{(x+m'+n)^2}+\frac{1}{(x+n)^2}\Big)+\frac{2}{m'^3}\Big(\frac{1}{x+m'+n}-\frac{1}{x+n}\Big)\Big\}.$$

Das allgemeine Glied dieser Doppelsummen ist ein viergliedriger Ausdruck, und wenn man zuerst die Summation nach n ausführt, so kann man diese vier Glieder trennen und jedes derselben für sich als allgemeines Glied einer Summe nach n gelten lassen; denn diese vier Summen convergiren, jede für sich, wenn man nur, was wenigstens für die dritte und vierte nothwendig ist, die Summation nach n so ansieht, dafs erst von $-k$ bis k summirt und dann $k=\infty$ gesetzt wird. Nach vollzogener Summation in Bezug auf n erhält man

$$\frac{1}{m'^2}(2,x+m')+\frac{1}{m'^2}(2,x)+\frac{2}{m'^3}(1,x+m')-\frac{2}{m'^3}(1,x),$$

welches sich wegen der Periodicität der Functionen auf

$$\frac{1}{m'^2}(2,x)+\frac{1}{m'^2}(2,x)+\frac{2}{m'^3}(1,x)-\frac{2}{m'^3}(1,x)=\frac{2}{m'^2}(2,x)$$

reducirt. Hier ist nun nach m' zu summiren. Da m' nur in dem Factor $\frac{1}{m'^2}$ vorkommt, so hat man bei dieser Summation $2(2,x)$ als gemeinschaftlichen Factor aller Glieder herauszusetzen und man erhält

$$2(2^*,0)(2,x),$$

als Resultat der doppelten Summation, wenn man durch $(2^*,0)$ die Summe $\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{m'^2}$ bezeichnet, welche sich auf alle ganzen Werthe von m' mit Ausschlufs von $m'=0$ erstreckt. Vergleicht man dieses Resultat mit demjenigen, welches die doppelte Summation auf der linken Seite der Gleichung (*b.*) gegeben hat, so findet man die Formel

$$(1.)\qquad (4,x)=(2,x)^2-2(2^*,0)(2,x).$$

Geht man wiederum auf die identische Gleichung (*a.*) zurück und setzt diesmal $p=x+m$, $q=n$, $p+q=x+m+n$, $m+n=m'$, $m=m'-n$, so erhält man

$$(c.)\quad \frac{1}{(x+m)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{(x+m')^2}\Big(\frac{1}{(x+m'-n)^2}+\frac{1}{n^2}\Big)+\frac{2}{(x+m')^3}\Big(\frac{1}{x+m'-n}+\frac{1}{n}\Big)$$

als allgemeines Glied einer Doppelsumme nach m und n, in welcher der Werth $n=0$, also die Combinationen $m=m'$ auszuschliefsen sind. Links erhält man, indem man nach m und n summirt, das Product der beiden einfachen Summen $(2,x)$ und $(2^*,0)$. Da diese letztern beiden Summen, also auch ihr Product, als Doppelsumme betrachtet, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren, so ist es erlaubt, rechts nach m' und n statt nach m und n zu summiren; ferner ist es erlaubt, wenn man erst nach n summirt, die vier Terme des allgemeinen Gliedes rechts in $(c.)$ zu trennen, und dann kann man im ersten und dritten wiederum $m=m'-n$ an die Stelle von n als Index einführen, so dafs im zweiten und vierten Term m' und n, im ersten und dritten Term m' und m die Indices sind; für jene ist beim Summiren der Werth $n=0$, für diese die Combination $m'=m$ auszuschliefsen; die Summen nach n, welche aus dem zweiten und vierten Term entspringen, sind

$$\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{n^2}=(2^*,0) \quad \text{und} \quad \overset{*}{\Sigma}\frac{1}{n}=0;$$

die Summen nach m, welche aus dem ersten und dritten Term entspringen, sind

$$\sum_{m \gtrless m'}\frac{1}{(x+m)^2}=(2,x)-\frac{1}{(x+m')^2} \quad \text{und} \quad \sum_{m \gtrless m'}\frac{1}{x+m}=(1,x)-\frac{1}{x+m'}.$$

Wenn man diese Werthe einsetzt und dann nach m' summirt, so erhält man endlich rechts:

$$\sum_{m'}\left\{\frac{1}{(x+m')^2}\left((2,x)-\frac{1}{(x+m')^2}+(2^*,0)\right)+\frac{2}{(x+m')^3}\left((1,x)-\frac{1}{x+m'}\right)\right\}$$
$$=(2,x)(2,x)-(4,x)+(2,x)(2^*,0)+2(3,x)(1,x)-2(4,x),$$

und da wir schon auf der linken Seite $(2^*,0)(2,x)$ gefunden hatten, so gelangt man nach einer leichten Reduction zu der zweiten Formel:

$$(2.) \qquad 3(4,x)=(2,x)^2+2(1,x)(3,x).$$

Diese beiden Formeln (1.) und (2.) sind nichts anders, als Differentialgleichungen für die Function $(1,x)$; denn aus der Definition der Functionen $(1,x)$, $(2,x)$, $(3,x)$ etc. selbst geht unmittelbar hervor, dafs dieselben durch fortgesetztes Differentiiren nach x der Reihe nach jede folgende aus der vorhergehenden abgeleitet werden können, indem

$$\partial(1,x)=-(2,x), \quad \partial(2,x)=-2(3,x), \quad \partial(3,x)=-3(4,x), \text{ u. s. w.}$$

ist, wenn man durch ∂ die Differentation nach x bezeichnet. Da man nun *zwei* Differentialgleichungen, und zwar zwei von einander unabhängige Differentialgleichungen, welche beiläufig von der dritten Ordnung sind, zur Bestimmung einer und derselben Function $(1, x)$ hat, so kann man durch fortgesetztes Differentiiren und durch Elimination möglichst viele höhere Differentialquotienten der Function wegschaffen und zu einer Differentialgleichung von möglichst niedriger Ordnung gelangen, ohne dafs man hierbei irgend eine Integration auszuführen und irgend eine neue (willkürliche) Constante einzuführen brauchte; nur mufs man diese Elimination nicht zu weit fortsetzen, weil man sonst zu identischen Gleichungen geführt wird; denn hierdurch hilft sich die Analysis, wenn man die Function zwingen will, einer einfacheren Relation Genüge zu leisten, als sie ihrer Natur nach fähig ist. Wollte man z. B. aus (1.) und (2.) die sämmtlichen Differentialquotienten von $(1, x)$ eliminiren und nur $(1, x)$ selbst beibehalten, so müfste man jedenfalls auf eine identische Gleichung kommen, weil $(1, x)$ als transcendente Function einer rein algebraischen Gleichung, als einer Differentialgleichung gewissermafsen von der 0ten Ordnung, nicht genügen kann; dagegen kann man wohl aus (1.) und (2.) die nach dem ersten folgenden höheren Differentialquotienten von $(1, x)$ wegschaffen und eine Differentialgleichung *erster* Ordnung für $(1, x)$ aufstellen; andrerseits kann man auch z. B. $(2, x)$ und $(3, x)$ beibehalten, und alle übrigen $(1, x)$, $(4, x)$ u. s. w. eliminiren; dann hat man eine Differentialgleichung erster Ordnung für $(2, x)$; und so in ähnlicher Weise auf unendlich viele Arten. Diese Elimination kann wohl am einfachsten auf folgende Weise ausgeführt werden. Setzt man $(1, x) = y$, so wird $-(2, x) = y'$, $2(3, x) = y''$, $-6(4, x) = y'''$, und setzt man noch der Kürze wegen $(2^*, 0) = c$, so geben (1.) und (2.)

$$(\alpha.) \qquad -y''' = 6y'^2 + 12cy',$$

$$(\beta.) \qquad -y''' = 2y'^2 + 2yy''.$$

Eliminirt man hieraus y''', so ergiebt sich

$$(\gamma.) \qquad yy'' = 2y'^2 + 6cy';$$

wird dies differentiirt und für y''' sein Werth aus $(\alpha.)$ gesetzt, so erhält man

$$y'y'' + yy''' = 4y'y'' + 6cy'' = y'y'' - 6yy'^2 - 12cyy'$$

oder $3y'y'' + 6cy'' = -6yy'^2 - 12cyy'$, oder, wenn man mit dem gemeinschaftlichen Factor $3y' + 6c$, welcher nicht verschwinden kann, auf beiden Seiten dividirt:

$$(\delta.) \qquad y'' = -2yy'.$$

Eliminirt man nun noch y'' aus $(\gamma.)$ und $(\delta.)$, so erhält man, wenn man den Werth $y'' = -2yy'$ aus $(\delta.)$ in $(\gamma.)$ einsetzt: $-2y^2y' = 2y'^2 + 6cy'$, oder, wenn man durch $2y'$ dividirt:

$$(\varepsilon.) \qquad -y^2 = y' + 3c,$$

d. h. $(1, x)$ genügt der Differenzialgleichung erster Ordnung

$$(3.)\qquad \frac{\partial(1,x)}{\partial x} = -(1,x)^2 - 3c, \text{ oder}$$

$$(3.)\qquad (2,x) = (1,x)^2 + 3(2^*,0),$$

wo die Constante

$$3(2^*,0) = 3c = 6(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\dots) = \pi^2$$

ist. Wenn man endlich aus $(\gamma.)$ und $(\delta.)$ statt y'' vielmehr y eliminirt, so erhält man für y' die Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$(\zeta.)\qquad y'' = 2y'\sqrt{(-y'-3c)}.$$

Ferner läfst sich noch $(\delta.)$ so schreiben:

$$(4.)\qquad (3,x) = (1,x)(2,x).$$

Übrigens sieht man aus diesen Formeln, dafs sich sämmtliche Reihen in die erste $(1,x)$ rational und ganz ausdrücken lassen, d. h. $(2,x)$, $(3,x)$ etc. in. inf. sind rationalen ganzen Functionen von $(1,x)$ gleich. Setzt man in der Differentialgleichung erster Ordnung für y:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -y^2 - \pi^2;\quad y = \pi\eta \quad\text{und}\quad x = \frac{1}{\pi}\xi,$$

so giebt sie $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = -(1+\eta^2)$. y verschwindet für $x = \frac{1}{2}$, denn wegen seiner Eigenschaft als ungerader Function von x genügt $(1,x)$ der Gleichung $(1,-x) = -(1,x)$, also ist $(1,-\frac{1}{2}) = -(1,\frac{1}{2})$, und wegen der Periodicität ist $(1,-\frac{1}{2}) = (1,-\frac{1}{2}+1) = (1,\frac{1}{2})$, also $(1,\frac{1}{2}) = -(1,\frac{1}{2}) = 0$; folglich verschwindet η für $\xi = \frac{\pi}{2}$. Diejenige Function η von ξ, welche der obigen Differentialgleichung $\frac{\partial\eta}{\partial\xi} = -(1+\eta^2)$ genügt und für $\xi = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, nennt man eben die Cotangente von ξ, also hat man $y = \pi\eta = \pi\,\mathrm{cotang}\,\xi = \pi\,\mathrm{cotang}\,\pi x$, d. h.

$$(1,x) = \Sigma\frac{1}{x+m} = \pi\,\mathrm{cotang}\,\pi x = y.$$

Integrirt man nach einem bekannten Verfahren die Reihe $\Sigma\frac{1}{x+m} = y$ nach x, so ergiebt sich

$$\Sigma\int\frac{\partial x}{x+m} = \Sigma\log(x+m) = \int y\,\partial x = \int\eta\,\partial\xi$$

$$= -\int\frac{\eta\,\partial\eta}{1+\eta^2} = -\tfrac{1}{2}\log(1+\eta^2) + \text{Const.}$$

$$= \log\frac{1}{\sqrt{(1+\eta^2)}} + \text{Const.} = \log\sin\pi x + \text{Const.};$$

und wenn man in der Summe das Glied ausläfst, dessen Index 0 ist,

$$\overset{*}{\Sigma}\log(x+m) = \log\frac{\sin\pi x}{x} + \text{Const.}$$

Hier kann man die Integration mit Null anfangen lassen und erhält, da $\frac{\sin\pi x}{x} = \pi$ für $x = 0$, also $\log\frac{\sin\pi x}{x} = \log\pi$ ist,

$$\overset{*}{\Sigma}\{\log(x+m)-\log m\} = \overset{*}{\Sigma}\log\left(1+\frac{x}{m}\right) = \log\frac{\sin\pi x}{x} - \log\pi,$$

folglich, wenn man von den Logarithmen zu den Gröfsen selbst übergeht:

$$x(1+x)(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\text{in inf.} = \frac{1}{\pi}\sin\pi x.$$

Das unendliche Product, dessen Werth $= \frac{1}{\pi}\sin\pi x$ ist, kann man sehr bequem so schreiben:

$$\Pi\left(1-\frac{x}{m}\right),$$

wenn man sich nur vornimmt, statt des sinnlosen Factors $1-\frac{x}{0}$ den andern x zu setzen. In dem Schulprogramme des Friedrich-Wilhelms-Gymnasii vom 29. Sept. 1845 hat mein verehrter Lehrer Herr Prof. *Schellbach* über diese Producte eine Abhandlung publicirt, welche, da sie die Ableitung der Fundamental-Eigenschaften der trigonometrischen Functionen, ausgehend von den unendlichen Producten, zum Gegenstande hat, hier ganz passend erwähnt wird. In jener Abhandlung wird die Ausschliefsung eines Werthes des Index durch das Zeichen ! angedeutet, also z. B. $m!0$ bedeutet die Ausschliefsung des Werthes 0 für m, und das obige Product, bei welchem der Factor $1-\frac{x}{0}$ auszuschliefsen und dafür der andere x zu setzen ist, wird durch

$$x\Pi\left(1+\frac{x}{m!0}\right) = \frac{1}{\pi}\sin\pi x$$

bezeichnet. — Nachdem dieses specielle unendliche Product bestimmt ist, kann man leicht den Werth des allgemeineren Products $\Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right)$ finden, welches stets als die Grenze des folgenden

$$\prod_{m=-k}^{m=k}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right), \quad k = \infty$$

betrachtet wird. Das allgemeine Glied dieses Productes läfst sich so schreiben:

$$\frac{\alpha m+\beta-x}{\alpha m+\beta}.$$

Hier darf man Zähler und Nenner nicht von einander trennen und jeden für sich als allgemeines Glied eines Products hinstellen, weil diese letzteren beiden Producte gegen keine endliche Grenze convergiren würden; wohl aber kann man diese Trennung vornehmen, wenn man zuvor Zähler und Nenner durch αm dividirt und das allgemeine Glied des Products in der Form

$$\frac{1+\frac{\beta-x}{\alpha m}}{1+\frac{\beta}{\alpha m}}$$

schreibt; was geschehen kann, so oft m von Null verschieden ist; für $m=0$ mufs man aber die ursprüngliche Form des allgemeinen Gliedes

$$\frac{\beta-x}{\beta} = \frac{\beta-x}{\alpha}:\frac{\beta}{\alpha}$$

beibehalten. Man erhält auf diese Weise

$$\Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right) = \frac{\frac{\beta-x}{\alpha}\Pi\left(1+\frac{\beta-x}{\alpha m!0}\right)}{\frac{\beta}{\alpha}\Pi\left(1+\frac{\beta}{\alpha m!0}\right)},$$

und da nach der obigen Formel der Zähler den Werth $\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi(\beta-x)}{\alpha}$, der Nenner den Werth $\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi\beta}{\alpha}$ hat, so erhält man, wenn der Kürze wegen $\frac{\beta}{\alpha}=\omega$, $\frac{x}{\alpha}=\xi$ gesetzt wird, die Formel

$$(\text{I.})\qquad \Pi\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta}\right) = \frac{\sin\pi(\omega-\xi)}{\sin\pi\omega} = \frac{e^{\pi(\omega-\xi)i}-e^{-\pi(\omega-\xi)i}}{e^{\pi\omega i}-e^{-\pi\omega i}},$$

welche als Fundamentalformel bei der Ausführung der einen Multiplication nach m in dem unendlichen Doppelproducte benutzt wird.

Um die Fundamentalformeln für die Ausführung der einen Summation in den Doppelreihen aufzustellen, welche aus der Entwicklung des Logarithmen des Doppelproducts entspringen, geht man von der gefundenen Summe

$$(1,x) = \Sigma\frac{1}{x+m} = \pi\,\text{cotang}\,\pi x = \pi\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}$$

aus, und differentiirt dieselbe fortgesetzt nach x. Dies giebt

$$(2,x) = \Sigma\frac{1}{(x+m)^2} = \frac{-\partial(\pi\,\text{cotang}\,\pi x)}{\partial x} = \pi^2(1+\text{cotang}^2\pi x) = \frac{\pi^2}{\sin^2\pi x},$$

$$(3,x) = \Sigma\frac{2}{(x+m)^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2(\pi\,\text{cotang}\,\pi x)}{\partial x^2} = \frac{-1}{2}\pi^2\partial_x\left(\frac{1}{\sin^2\pi x}\right) = \pi^3\frac{\cos\pi x}{\sin^3\pi x}$$

$$(4,x) = \Sigma\frac{1}{(x+m)^4} = -\tfrac{1}{3}\partial_x\left(\pi^3\frac{\cos\pi x}{\sin^3\pi x}\right) = \frac{\pi^4}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\pi x}+\frac{3\cos^2\pi x}{\sin^4\pi x}\right)$$
$$= \pi^4\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sin^2\pi x}+\frac{1}{\sin^4\pi x}\right)$$

und so weiter fort. Im Allgemeinen mufs man die Reihen mit geraden Exponenten von denen mit ungeraden Exponenten unterscheiden; für die ersteren erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

$$\text{(II.)}\qquad (2g, x) = \Sigma\frac{1}{(x+m)^{2g}} = \pi^{2g}\Big(\frac{a}{\sin^2\pi x}+\frac{a'}{\sin^4\pi x}+\frac{a''}{\sin^6\pi x}+\text{etc.}\Big);$$

eine Reihe, die mit dem Gliede $\frac{1}{\sin^{2g}\pi x}$ abbricht. Für ungerade Exponenten erhält man

$$\text{(III.)}\quad (2g+1, x) = \Sigma\frac{1}{(x+m)^{2g+1}} = \pi^{2g+1}\Big\{\frac{b\cos\pi x}{\sin^3\pi x}+\frac{b'\cos\pi x}{\sin^5\pi x}+\frac{b''\cos\pi x}{\sin^7\pi x}+\text{etc.}\Big\};$$

diese Reihe bricht mit dem Gliede $\frac{\cos\pi x}{\sin^{2g+1}\pi x}$ ab. Die Coëfficienten a, a', a'', etc. und b, b', b'', etc. hangen auf einfache Art mit den *Bernoulli*schen Zahlen zusammen, und das recurrente Gesetz, nach welchem ihre successive Bildung geschieht, ist leicht aus den fortgesetzten Differentiationen zu erkennen. Man kann den Ausdrücken zur Rechten in (II.) und (III.) noch mannigfache andere Formen geben; z. B. die schon weiter oben angedeutete, nach ganzen Potenzen von cotangπx; und zwar enthalten die Entwicklungen nur gerade, oder nur ungerade Potenzen von cotangπx, je nachdem der Exponent der Reihen, deren Ausdruck gegeben wird, gerade oder ungerade ist; der Grad dieser ganzen Functionen von cotangπx ist gleich dem Exponenten der Reihen $(2g, x)$ resp. $(2g+1, x)$.

Das hier abgeleitete System von Formeln findet sich wohl zuerst unter einem gemeinschaftlichen Gesichtspuncte vereinigt in *Euler's* „Introductio in Analysin Infinitorum": in diesem berühmten Werke, welches die in Folge der Erfindung der Differential- und Integralrechnung auftretenden vereinzelt stehenden Resultate in ihrer Gesammtheit auffafste und zu einer wissenschaftlichen Theorie erhob. Indem ich auf diese längst bekannten, jetzt ganz elementaren Formeln mit Ausführlichkeit zurückgegangen bin, statt dieselben blofs historisch anzuführen, geschah es weniger, um den Kreisfunctionen selbst eine neue Seite abzugewinnen, als vielmehr in der Absicht, Principien aufzustellen und in einem einfachen Falle klar zu machen, welche nicht allein mit gleicher Leichtigkeit die Fundamental-Eigenschaften der Kreisfunctionen und die der elliptischen Functionen ergeben, sondern welche auch Schritt um Schritt die Analogie verfolgen lassen, welche diese beiden Arten von Functionen sowohl unter einander als auch mit den algebraischen Functionen verbindet. Die identische Gleichung (a.), welche die Grundlage der ganzen Untersuchung bildet, drückt selbst eine sehr einfache Relation zwischen algebraischen Functionen aus; ihr entsprechend findet sich eine Fundamentalformel für die Kreisfunctionen. Die Gleichung ($a.$) war hinreichend zur Aufstellung aller hier nöthigen Formeln; diese Gleichung ist aber selbst nur ein specieller Fall einer allgemeinern, welche aus der Theorie der Zerfällung in Partialbrüche gezogen ist, nämlich der folgenden identischen Gleichung:

$$(d.)\quad \frac{1}{p^\mu}\cdot\frac{1}{q^\nu} = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1}\frac{\nu(\nu+1)\ldots.(\nu+\sigma-1)}{1.2\ldots.\sigma}\cdot\frac{1}{(p+q)^{\nu+\sigma}}\cdot\frac{1}{p^{\mu-\sigma}}$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1}\frac{\mu(\mu+1)\ldots.(\mu+\tau-1)}{1.2\ldots.\tau}\cdot\frac{1}{(p+q)^{\mu+\tau}}\cdot\frac{1}{q^{\nu-\tau}}.$$

Man setze in derselben $p=x+m$, $q=-x-n$, so dafs $p+q=m-n$ wird, und summire dann über alle Werthe von m und n von $m=-\infty$ bis $m=\infty$ und von $n=-\infty$ bis $n=\infty$, mit Ausschlufs der Combinationen $m=n$. Auf der linken Seite der Formel erhält man dann

$$(-1)^\nu\{(\mu,x)(\nu,x)-(\mu+\nu,x)\}.$$

Auf der rechten Seite werden ebenfalls die vorkommenden unendlichen Summen durch die hier betrachteten reciproken Reihen ausgedrückt werden können, wenn man $m-n$ als neuen Index einführt. Die Berechtigung zu der Einführung dieses neuen Index beruht wesentlich auf der Annahme, dafs μ und $\nu>1$ sein sollen, welche man machen mufs, damit die Totalsummen, deren allgemeine Glieder die linke und die rechte Seite der Formel ($d.$) sind, unabhängig von der Anordung der Glieder convergiren. Man könnte zwar auch andere Fälle betrachten, welche dieser Beschränkung $\mu>1$, $\nu>1$ nicht unterliegen, aber man müfste dann dem Verfahren eine genaue Untersuchung der Modificationen voranschicken, welche die vorkommenden Reihen durch Einführung neuer Indices erleiden können. Nach Einführung des neuen Index $m-n$ kann man die $\mu+\nu$ Terme des allgemeinen Gliedes auf der rechten Seite trennen und jeden Term einzeln summiren. Die Berechtigung zu dieser Trennung beruht darauf, dafs die einzelnen Doppelsummen, welche zu allgemeinen Gliedern diese einzelnen Terme haben, jede für sich convergiren; denn diese Doppelsummen lösen sich in Producte von convergenten einfachen Summen auf. In der That: für diejenigen Reihen, in welchen die Exponenten die Einheit übertreffen, folgt diese Zerfällung aus der Unabhängigkeit dieser Reihen von der Anordnung ihrer Glieder, während sie für diejenigen Reihen, deren Exponent $=1$ ist, aus ihrer Periodicität hervorgeht. Man findet auf diese Weise rechts

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{\nu(\nu+1)\dots(\nu+\sigma-1)}{1\,.\,2\dots\sigma}(\nu+{}^*\sigma, 0)(\mu-\sigma, x)$$

$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+\tau-1)}{1\,.\,2\dots\tau}(-1)^{\nu-\tau}(\mu+{}^*\tau, 0)(\nu-\tau, x),$$

wo der Stern * stets das Ausfallen des Werthes Null für den Index bedeutet. Dieser Ausdruck vereinfacht sich bedeutend, wenn man bedenkt dafs $(g^*, 0)$ stets $=0$, wenn g ungerade ist, und wenn man jedesmal in den beiden Summen zwei entsprechende Glieder, welche durch die Relation $\mu-\sigma=\nu-\tau$ zusammenhangen, zusammenzieht, indem man die constanten Coëfficienten in beiden addirt. Diese Vereinfachung, welche die Anzahl der Glieder fast auf den vierten Theil reducirt, läfst sich jedoch im Allgemeinen durch Buchstaben nur sehr complicirt wiedergeben, da sie sowohl davon abhangt, ob μ und ν gerade oder ungerade sind, als auch von dem gegenseitigen Verhältnifs der Gröfse der beiden Zahlen μ und ν. Wenn man nun den in Rede stehenden Ausdruck, nachdem man ihn möglichst vereinfacht hat,

$$= (-1)^\nu((\mu, x)(\nu, x)-(\mu+\nu, x))$$

setzt, so hat man ein sehr allgemeines Resultat für Kreisfunctionen, welches der Formel (*d.*) für algebraische Functionen entspricht. Wollte man in der gefundenen Formel, welche nur unter der Bedingung $\mu>1$, $\nu>1$ bewiesen ist, $\mu=\nu=1$ setzen, so erhielte man das offenbar falsche Resultat

$$(1, x)^2-(2, x) = 0;$$

verfährt man aber mit der oben gedachten Vorsicht, welche dieser Fall erfordert, so erhält man

$$(1, x)^2-(2, x) = c,$$

wo c eine von Null verschiedene Constante ist; denn aus der Doppelsumme

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{1}{x+m}\cdot\frac{1}{x+n},$$

welche $=(1, x)^2$ ist, läfst sich freilich zunächst derjenige Theil herausziehen, welcher die Combinationen $m=n$ enthält und welcher die von der Anordnung der Glieder unabhängige einfache Summe

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m)^2} = (2, x)$$

bildet; allein der Rest der Doppelsumme, welcher sich mit Hülfe der identischen Gleichung (*d.*) für den Fall $\mu=\nu=1$, d. h. mit Hülfe der identischen Gleichung

$$\frac{1}{pq} = \frac{1}{p+q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

auf die Form

$$\Sigma\Sigma\frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}\right\}$$

bringen läfst, wo die Combinationen $m=n$ auszuschliefsen, hat keinesweges den Werth Null, obgleich man Null erhalten würde, wenn man die beiden Terme des allgemeinen Gliedes trennte und $m-n$ ohne Weiteres als neuen Index einführte; was jedoch ohne alle Berechtigung geschehen würde. Betrachtet man dagegen, wie es erlaubt ist, den eben geschriebenen Ausdruck als die Grenze des folgenden:

$$\sum_{m=-k}^{m=k}\sum_{n=-k}^{n=k}\frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}\right\},$$

für $k=\infty$, so läfst sich leicht zeigen, dafs derselbe für ein wachsendes k sich einer von x unabhängigen Constante über alle Grenzen nähert. Man fängt zu dem Ende zunächst damit an, jedesmal der Summe derjenigen Glieder, für welche $m-n$ einen bestimmten Werth zwischen $-2k$ und $2k$ hat, eine einfachere Form zu geben. Aber die weitere Ausführung und das nähere Detail würde mich hier zu weit entfernen. Inzwischen sieht man aus diesem Beispiel, dafs bei der Zusammenstellung der algebraischen Formeln mit den transcendenten, in den letzteren gewissermafsen Lücken entstehen; d. h. es giebt eine Anzahl algebraischer Formeln, welchen keine der strengen Analogie sich anschliefsenden transcendenten Formeln entsprechen; diese Lücken werden erst durch *modificirte* Formeln gewissermafsen ausgefüllt, welche sich mehr oder weniger von der Analogie entfernen. Das Vorhandensein und die besondere Natur dieser Lücken, welche aus der Abhängigkeit einiger der vorkommenden Reihen von der Anordnung ihrer Glieder entspringen, begründet einen der characteristischen Unterschiede der transcendenten Functionen, sowohl unter sich, als auch von den algebraischen Functionen.

Eine von der vorigen verschiedene transcendente Formel, welche ebenfalls der algebraischen Formel (*d.*) entspricht, erhält man, wenn man $p=x+m$, $q=n$, also $p+q=x+m+n$ setzt, nach m und n, mit Ausschlufs des Werthes $n=0$, summirt und rechts $m+n$ als neuen Index einführt. Aber weit schärfer springt die Analogie der Formeln in die Augen, wenn man in (*d.*) $p+m$ an die Stelle von p; $q+n$ an die Stelle von q, also $p+q+m+n$ an die Stelle von $p+q$ schreibt und nach m und n von $-\infty$ bis ∞ ohne Ausschliefsung irgend eines Werthes oder irgend einer Combination summirt, indem man rechts $m+n$ als neuen Index einführt. Man erhält dann eine, ein ganzes

Gebiet von speciellen Formeln umfassende, allgemeine Formel, welcher geradezu und ohne alle Veränderung sowohl algebraische, als Kreisfunctionen genügen, d. h. welche gilt, man möge die darin vorkommenden Functionen in der einen oder in der andern dieser beiden Bedeutungen nehmen.

In der That erhält man aus der algebraischen Formel (*d.*) auf die angegebene Weise und indem man das allgemeine Glied rechts in seine einzelnen Terme zerlegt und die Doppelsummen in Producte von einfachen Summen auflöset, die folgende transcendente Formel:

$$(e.)\qquad (\mu, p)(\nu, q) = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{\nu(\nu+1)\ldots.(\nu+\sigma-1)}{1\,.\,2\,\ldots.\,\sigma}(\nu+\sigma, p+q)(\mu-\sigma, p)$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{\mu(\mu+1)\ldots.(\mu+\tau-1)}{1\,.\,2\,\ldots.\,\tau}(\mu+\tau, p+q)(\nu-\tau, q).$$

Berücksichtigt man nun, dafs allgemein $(g, x) = \frac{(-1)^{g-1}}{1.2.3\ldots.(g-1)} \cdot \frac{\partial^{g-1}(1, x)}{\partial x^{g-1}}$,

und dafs ebenfalls algemein $\frac{1}{x^g} = \frac{(-1)^{g-1}}{1.2.3\ldots.(g-1)} \cdot \frac{\partial^{g-1}\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x^{g-1}}$ ist, und setzt in diesen Formeln erst $g=\mu$ und $x=p$, dann $g=\nu$ und $x=q$, ferner $g=\nu+\sigma$, $x=p+q$; $g=\mu-\sigma$, $x=p$; $g=\mu+\tau$, $x=p+q$, endlich $g=\nu-\tau$, $x=q$, so erhellet, dafs die algebraische Gleichung (*d.*) und die transcendente (*e.*) sich beide in die folgende vereinigen lassen:

$$(f.)\qquad f^{(\mu-1)}(p)f^{(\nu-1)}(q)$$
$$= \sum_{\sigma=0}^{\sigma=\mu-1} \frac{(\mu-\sigma)(\mu-\sigma+1)\ldots.(\mu-1)}{1\,.\,2\,\ldots.\,\sigma} f^{(\nu+\sigma-1)}(p+q)f^{(\mu-\sigma-1)}(p)$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\tau=\nu-1} \frac{(\nu-\tau)(\nu-\tau+1)\ldots.(\nu-1)}{1\,.\,2\,\ldots.\,\tau} f^{(\mu+\tau-1)}(p+q)f^{(\nu-\tau-1)}(q),$$

welche gilt, man mag $f(x) = \frac{1}{x}$, oder $f(x) = (1, x) = \pi \operatorname{cotang} \pi x$ setzen. Aus der Formel (*e.*), welche von der gröfsten Fruchtbarkeit ist, fliefsen unter andern mit leichter Mühe die Additionstheoreme für alle Arten von Kreisfunctionen. Ich verweile jedoch nicht bei diesen Anwendungen, so wie auch nicht bei denjenigen transcendenten Gleichungen, welche den algebraischen Formeln entsprechen, die sich auf die Zerfällung des allgemeineren Bruchs

$$\frac{1}{p^\mu} \cdot \frac{1}{q^\nu} \cdot \frac{1}{r^\varrho} \ldots.$$

beziehen; denn diese Untersuchungen sind nur als eine Vorbereitung zu denjenigen anzusehen, welche ich im folgenden Paragraphen in demselben Sinne für elliptische Functionen anstellen werde. Wenn man übrigens das Additionstheorem für die Cotangente mit leichter Mühe und ohne weitere Elimination erhalten will, so kann man wie folgt verfahren. Obwohl die Summe $\Sigma\frac{1}{x+m}$ nicht unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder convergirt, so gilt dies doch von der Summe

$$\Sigma\left\{\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+m}\right\} = (1,x)-(1,y).$$

Es läfst sich diese Eigenschaft schon daraus schliefsen, dafs die erstere Summe $\Sigma\frac{1}{x+m}$ bei allen ihren Modificationen doch nur einen constanten, von x unabhängigen Zuwachs *) erhalten kann; welcher sich also wieder aufheben mufs, wenn man zwei dergleichen Reihen Glied um Glied von einander subtrahirt. Man kann diese Eigenschaft auch aus der Form des allgemeinen Gliedes

$$\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+m} = \frac{y-x}{(x+m)(y+m)}$$

beweisen. Bildet man daher das Product

$$\left\{\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+m}\right\}\left\{\frac{1}{x+n}-\frac{1}{y+n}\right\}$$

und summirt nach m und n, so wird die hieraus hervorgehende Doppelsumme, welche

$$= ((1,x)-(1,y))^2$$

ist, auch unabhängig von der Anordnung der Glieder convergiren und man wird statt m und n neue Indices einführen dürfen. Entwickelt man jenes Product und zerfället es in Partialbrüche, so kommt, wenn m und n verschieden sind:

$$\frac{1}{m-n}\left\{-\frac{1}{x+m}+\frac{1}{x+n}-\frac{1}{y+m}+\frac{1}{y+n}\right\}+\frac{1}{x-y+m-n}\left\{\frac{1}{x+m}-\frac{1}{y+n}\right\}$$
$$+\frac{1}{y-x+m-n}\left\{\frac{1}{y+m}-\frac{1}{x+n}\right\}.$$

Wenn $m=n$ ist, so bleiben die beiden letzten Theile dieser Formel richtig; an die Stelle des ersten Theils tritt aber

$$\frac{1}{(x+m)^2}+\frac{1}{(y+m)^2};$$

---

*) Denn $\nabla\Sigma\frac{1}{x+m}=\nabla\Sigma'\frac{1}{x+m}$, wo Σ' nur diejenigen Werthe von m umfafst, deren analytischen Modul $>M(x)$ ist, und $\Sigma'\frac{1}{x+m}=\Sigma'\frac{1}{m}-x\Sigma'\frac{1}{m^2}+x^2\Sigma'\frac{1}{m^3}-$ etc., während $\nabla\Sigma'\frac{1}{m^2}=0$, $\nabla\Sigma'\frac{1}{m^3}=0$, u. s. w., folglich $\nabla\Sigma\frac{1}{x+m}=\nabla\Sigma'\frac{1}{m}=\nabla\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{m}$.

was eine einfache Summe nach m hervorbringt. Führt man nun $m-n$ als neuen Index ein, summirt zuerst nach m, indem man n unter der Form $m-(m-n)$ schreibt, berücksichtigt die Periodicität der Functionen, vermöge welcher alle vorkommenden Doppelsummen in Producte von einfachen Summen zerfallen, und summirt schliefslich nach $m-n$, als zweitem Index, so erhält man $(1, x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+(1,y-x)\{(1,y)-(1,x)\}+(2,x)+(2,y)$, d. h.

$$(2,x)+(2,y)+2(1,x-y)\{1,x)-(1,y)\}.$$

Setzt man noch $-y$ an die Stelle von y, so hat man die Formel

$$2(1,x+y)\{(1,x)+(1,y)\} = \{(1,x)+(1,y)\}^2-(2,x)-(2,y).$$

Da nun oben $(2,x)=(1,x)^2+3(2^*,0)=(1,x)^2+\pi^2$, $(2,y)=(1,y)^2+\pi^2$ gefunden wurde, so erhält man endlich nach allen Reductionen:

$$(1,x+y) = \frac{(1,x)(1,y)-3(2^*,0)}{(1,x)+(1,y)} = \frac{(1,x)(1,y)-\pi^2}{(1,x)+(1,y)},$$

und, da $(1,x)=\pi \operatorname{cotang} \pi x$ war,

$$\operatorname{cotang}(u+v) = \frac{\operatorname{cotang} u \operatorname{cotang} v - 1}{\operatorname{cotang} u + \operatorname{cotang} v}.$$

Aus dieser Additionsformel lassen sich leicht der Ausdruck der Reihe $(1,x)$ und sodann auch der Ausdruck der übrigen Reihen $(2,x)$, $(3,x)$ u. s. w. durch Exponentialgröfsen herleiten, so wie auch die Formeln

$$\operatorname{tang} u = \frac{1}{\operatorname{cotang} u} = -\operatorname{cotang}\left(u+\frac{\pi}{2}\right) \text{ und } \frac{1}{\sin u} = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotang}\frac{u}{2} - \operatorname{cotang}\frac{u+\pi}{2}\right);$$

welche letztern bei dem hier genommenen Ausgangspuncte dadurch eine besondere Wichtigkeit erhalten, dafs sie zunächst einen rationalen Ausdruck des Sinus durch ***einförmige*** Functionen darstellen.

Ich kehre zu dem Hauptgegenstande dieses Paragraphen zurück, der Ausführung der Multiplication und der Summation nach dem einen Index m in den unendlichen Doppelproducten, resp. Doppelsummen, welche in dem Frühern betrachtet worden sind. Ich beginne mit den Doppelsummen von der Form

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g}}, \quad \sum_{m,n} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g+1}}.$$

Schreibt man in den Formeln (II.) und (III.) $\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}$ an die Stelle von x und multiplicirt die allgemeinen Glieder der Summe nach m auf der linken Seite mit $\frac{1}{\alpha^{2g}}$ in (II.) und mit $\frac{1}{\alpha^{2g+1}}$ in (III.), so erhält man, abgesehn von den constanten Multiplicatoren, in welchen der Index n nicht vorkommt,

$\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g}}$ durch ein Aggregat von Functionen von der Form

$$\frac{1}{\sin^2\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{1}{\sin^4\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{1}{\sin^6\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \text{u. s. w.,}$$

und $\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^{2g+1}}$, wenn $g>0$ ist, durch ein Aggregat von Functionen von der Form

$$\frac{\cos\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^3\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{\cos\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^5\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \frac{\cos\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}}{\sin^7\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}},\quad \text{u. s. w.}$$

ausgedrückt, während für $g=0$

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \frac{1}{\alpha m+\beta n+\gamma} = \frac{\pi}{\alpha}\operatorname{cotang}\pi\frac{\beta n+\gamma}{\alpha}$$

ist. Setzt man, um abzukürzen $\frac{\pi\beta}{\alpha}=\eta$ und $\frac{\pi\gamma}{\alpha}=\xi$, so zeigt sich, dafs alle nach n auszuführenden Summationen in solche zerfallen, welche sich auf allgemeine Glieder von den Formen

$$\frac{1}{\sin^{2g}(n\eta+\xi)},\quad \text{oder}\quad \frac{\cos(n\eta+\xi)}{\sin^{2g+1}(n\eta+\xi)}\quad \text{oder}\quad \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$$

beziehen. Ich werde nun allgemein beweisen, dafs jede Summe von der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\cos^h(n\eta+\xi)}{\sin^g(n\eta+\xi)}\quad \text{oder}\quad \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{\sin^h(n\eta+\xi)}{\cos^g(n\eta+\xi)},$$

wo g und h nicht negative ganze Zahlen sind, stets unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, sobald nur $g>h$ ist. Die Summe $\sum\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$, und allgemein der Fall $g=h$, erfordert eine besondere Untersuchung. Wenn auch die Doppelreihen unmittelbar nur auf solche einfache Reihen von der obigen Form führen, in welchen der Sinus im Nenner steht und entweder $h=0$ und g gerade, oder $h=1$ und g ungerade ist, so hangen doch mittelbar alle jene einfachen Reihen für beliebige, nicht negative ganze Werthe von g und h, welche der Bedingung $g\geqq h$ genügen, mit Doppelreihen von der hier betrachteten Form zusammen. Denn zunächst gehen diejenigen einfachen Reihen, welche den Sinus im Zähler und den Cosinus im Nenner haben, sogleich aus den andern, welche umgekehrt den Cosinus im Zähler und den Sinus im Nenner haben, hervor, wenn man $\xi+\frac{\pi}{2}$ an die Stelle von ξ setzt;

also, wenn man in den Doppelsummen $\gamma+\frac{\alpha}{2}$ an die Stelle von γ setzt, weil $\gamma=\frac{\alpha\xi}{\pi}$, also eine Vermehrung von ξ um $\frac{\pi}{2}$ eine Vermehrung von γ um $\frac{\alpha}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\alpha}{2}$ nach sich zieht. Steht nun die $h$te Potenz des Cosinus von $n\eta+\xi$ im Zähler des allgemeinen Gliedes der einfachen Summe, so kann man, wenn h gerade ist, dieselbe in ein Aggregat von geraden Potenzen des Sinus, und wenn h ungerade ist, in das Product von $\cos(n\eta+\xi)$ und einem solchen Aggregate zerlegen. Dividirt man nun jedesmal Zähler und Nenner mit derjenigen Potenz des Sinus, welche im Zähler steht, so zerfällt das allgemeine Glied in eine Summe von Gliedern, welche entweder sämmtlich die Einheit, oder sämmtlich die erste Potenz des Cosinus im Zähler und verschiedene Potenzen des Sinus im Nenner haben. Diejenigen Glieder, welche die Einheit im Zähler und eine gerade Potenz des Sinus im Nenner, oder den Cosinus im Zähler und eine ungerade Potenz des Sinus im Nenner haben, geben, nach n summirt, Reihen, welche, wie wir gesehen haben, unmittelbar aus den hier betrachteten Doppelreihen vermöge der nach m ausgeführten Summation entspringen. Es bleiben noch diejenigen Reihen übrig, deren allgemeine Glieder die Einheit im Zähler und eine ungerade Potenz des Sinus im Nenner, oder den Cosinus im Zähler und eine gerade Potenz des Sinus im Nenner enthalten. Die allgemeinen Glieder von einer dieser letzteren beiden Formen werden nach der Formel

$$\frac{1}{\sin x}=\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{cotang}\frac{x}{2}-\operatorname{cotang}\frac{x+\pi}{2}\right)$$

und denjenigen Formeln, welche aus dieser durch wiederholte Differentiationen nach x hervorgehen, in solche allgemeine Glieder zerlegt, welche $\cos\frac{n\eta+\xi}{2}$ oder $\cos\frac{n\eta+\xi+\pi}{2}$ und respective die Einheit im Zähler und eine ungerade und resp. eine gerade Potenz von $\sin\frac{n\eta+\xi}{2}$ oder $\sin\frac{n\eta+\xi+\pi}{2}$ im Nenner enthalten, und die betreffenden einfachen Summen nach n gehen demnach aus solchen Doppelsummen hervor, in welchen 2α an die Stelle von α (oder, was dasselbe besagt, $\frac{\beta}{2}$ an die Stelle von β) getreten ist, und welche ihr drittes Element γ theils unverändert, theils $\gamma+\alpha$ an dessen Stelle enthalten; wie man sogleich ersieht, wenn man den Zusammenhang zwischen η und ξ einerseits und α, β, γ andrerseits berücksichtigt und hiernach die Modificationen sucht, welche die letzteren erleiden, wenn η und ξ entweder in $\frac{\eta}{2}$ resp. $\frac{\xi}{2}$, oder in $\frac{\eta}{2}$ resp. $\frac{\xi+\pi}{2}$ übergehen.

Die Convergenz der Reihen nach n, in welchen $g > h$ ist, wird dadurch nachgewiesen, dafs man eine geometrische Reihe angiebt, deren sogenannter Exponent, d. h. der Quotient aus irgend einem Gliede in das vorhergehende, unter der Einheit liegt, und welche nicht stärker convergirt, als die Summe der Moduln der Glieder der vorgelegten Reihe. Schreibt man für das allgemeine Glied seinen Ausdruck durch Exponentialfunctionen und läfst hierbei die ganz unwesentliche Potenz von i weg, so kommt

$$\frac{(e^{(n\eta+\xi)i} \pm e^{-(n\eta+\xi)i})^h}{(e^{(n\eta+\xi)i} - e^{-(n\eta+\xi)i})^g}.$$

Zunächst beachte man, dafs dieser Ausdruck in einen ganz ähnlichen übergeht, wenn man $-n$ an die Stelle von n setzt; nur tritt dann $-\xi$ an die Stelle von ξ, während die beiden Summanden im Zähler und der Minuendus und Subtrahendus im Nenner ihre Rollen vertauschen. Man erleichtert daher die Untersuchung, wenn man n nur positive Werthe durchlaufen läfst; nachher hat man dann nur noch eine ganz ähnliche zweite Reihe zu betrachten, welche sich von der ersten lediglich durch den Werth von ξ unterscheidet. Wenn n positiv ist, so convergirt die Exponentialfunction

$$e^{(n\eta+\xi)i} \pm e^{-(n\eta+\xi)i}$$

für $n = \infty$, entweder gegen $e^{(n\eta+\xi)i}$ oder gegen $\pm e^{-(n\eta+\xi)i}$, je nachdem der reelle Theil von ηi positiv oder negativ ist; in beiden Fällen convergirt also diese Exponentialfunction gegen

$$\pm e^{\pm(n\eta+\xi)i},$$

wenn man das doppelte Zeichen im Exponenten stets so bestimmt, dafs der reelle Theil von $\pm\eta i$ positiv, oder was dasselbe ist, der Coëfficient von i in $\pm\eta$, welcher wegen $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ wesentlich von Null verschieden ist, negativ wird. Das allgemeine Glied der vorgelegten Summe convergirt daher für $n = \infty$ gegen

$$\pm\frac{e^{\pm h(n\eta+\xi)i}}{e^{\pm g(n\eta+\xi)i}} = \pm e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i},$$

und der Modul des allgemeinen Gliedes convergirt gegen

$$M(e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i});$$

d. h. der Quotient aus dem Modul des allgemeinen Gliedes und dem eben geschriebenen Ausdrucke kann der Einheit so nahe gebracht werden, als man will, wenn man n hinlänglich grofs annimmt. Der Quotient aus den beiden Werthen, welche der Modul des allgemeinen Gliedes der vorgelegten Reihe annimmt, wenn man $n+1$ und n für den Index setzt, convergirt daher gegen den Quotienten der beiden Moduln

$$M(e^{\pm(h-g)[(n+1)\eta+\xi]i}) : M(e^{\pm(h-g)(n\eta+\xi)i}),$$

also gegen $M(e^{\pm(h-g)\eta i})$, und die Convergenz derjenigen Reihe, welche aus der vorgelegten hervorgeht, wenn man statt aller Glieder ihre analytischen Moduln setzt, wird mithin von einer gewissen Stelle ab mit der Convergenz der geometrischen Reihe vergleichbar, in welcher der Quotient aus irgend einem Gliede durch das vorhergehende um so wenig als man will über $M(e^{\pm(h-g)\eta i})$ fällt. Der reelle Theil von $\pm\eta i$ ist positiv, $h-g$ ist nach der Voraussetzung negativ, also der reelle Theil des Exponenten $\pm(h-g)\eta i$ negativ, und da allgemein $M(e^{u+vi}) = M(e^u) = e^u < 1$, so oft u negativ ist, so hat man $M(e^{\pm(h-g)\eta i}) < 1$, und somit ist die Convergenz der vorgelegten Reihe und zugleich ihre Unabhängigkeit von der Anordnung der Glieder aufser Zweifel gestellt. Man sieht zugleich aus dieser Betrachtung, dafs die vorgelegte Reihe wesentlich divergent sein müfste, wenn $g < h$ ist; für $g = h$ stimmt die Reihe der Moduln in Bezug auf Convergenz zuletzt, d. h. im Unendlichen, mit einer geometrischen Reihe mit dem Exponenten $=1$ überein, und die Convergenz der vorgelegten Reihe, wenn sie Statt findet, hangt von der Anordnung ihrer Glieder ab.

Zerlegt man, wenn $g = h$ ist, die $h$te Potenz des Cosinus im Zähler nach der oben vorgeschriebenen Regel entweder in Potenzen des Sinus oder in das Product aus $\cos(n\eta+\xi)$ und Potenzen des Sinus, je nachdem h gerade oder ungerade ist, und zerfället das allgemeine Glied in seine einzelnen Termen, indem man jeden Term des Zählers einzeln durch den Nenner $\sin^h(n\eta+\xi)$ dividirt, so sieht man, dafs zu den Gliedern, deren Summation durch das Vorhergehende schon erledigt ist, nur noch, entsprechend den beiden eben unterschiedenen Fällen eines geraden oder eines ungeraden Werthes von h, entweder eine *Constante*, oder ein Glied wie $\frac{\cos(n\eta+\xi)}{\sin(n\eta+\xi)} = \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$ hinzutritt. Da nun eine Constante nicht als allgemeines Glied einer convergenten (unendlichen) Summe auftreten kann, so mufs der Fall eines geraden Werthes von h, welcher stets eine divergente Reihe involvirt, ausgeschlossen werden und es bleibt nur noch die Betrachtung der einen Summe übrig, deren allgemeines Glied $\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$ ist. Die Reihe $\Sigma \operatorname{cotang}(n\eta+\xi)$ gehört zu denjenigen convergenten Reihen, welche mit der gröfsten Vorsicht behandelt werden müssen; denn da ihre Glieder im Unendlichen nicht gegen Null, sondern für $n=\infty$ resp. $n=-\infty$ gegen zwei einander entgegengesetzte von Null verschiedene Grenzen convergiren, so ändert die Reihe bei der geringsten Verschiebung der Glieder ihren Werth. Die Convergenz dieser Reihe, wenn man in ihr je zwei Glieder, welche entgegengesetzten Werthen von n entsprechen, zusammenfafst, läfst sich indessen mit leichter Mühe darthun, indem sich bei dieser Anordnung der Glieder die Reihe auf das Frühere zurückführen und wiederum mit einer geometrischen vergleichen läfst. Man hat

$$\operatorname{cotang}(\xi+n\eta)+\operatorname{cotang}(\xi-n\eta) = \frac{\sin 2\xi}{\sin(\xi+n\eta)\sin(\xi-n\eta)},$$

also ist nur die Convergenz der folgenden Reihe zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\sin(\xi+n\eta)\sin(\xi-n\eta)}.$$

Diese Reihe convergirt in der That unabhängig von der Anordnung der Glieder, und auch dann noch, wenn man statt aller Glieder deren analytische Moduln setzt; denn da schon durch das Frühere die Convergenz der beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{M\sin(\xi+n\eta)} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{M\sin(\xi-n\eta)}$$

festgestellt ist, so ist die a fortiori Statt findende Convergenz der in Rede stehenden Reihe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{M\sin(\xi+n\eta)\,M\sin(\xi-n\eta)}$$

einleuchtend; und zwar wird letztere mit einer geometrischen Reihe vergleichbar sein, deren Exponent gleich dem Producte der Exponenten derjenigen geometrischen Reihen ist, mit welchen die beiden obigen Reihen im Unendlichen übereinstimmen.

Um noch ein Wort über diejenigen Werthe von ξ hinzuzufügen, für welche die Functionen, die durch die hier betrachteten Reihen dargestellt sind, discontinuirlich werden: so kann man nicht eigentlich sagen, dafs die Reihen für solche Werthe divergent wären, sondern es kommt nur ein einziges Glied in ihnen vor, welches unendlich wird und welches allein die Discontinuität der Function verursacht; nach dessen Wegnahme bildet der Rest immer noch eine convergente Summe.

Nach diesen Convergenzbetrachtungen gehe ich zu den Folgerungen über, welche für die durch Summation der Doppelreihen nach dem einen Index gewonnenen einfachen Reihen hervorgehen, wenn man die Resultate dieses Paragraphen mit den Untersuchungen des vorhergehenden in Verbindung setzt. Da wir im vorhergehenden Paragraphen die Modificationen, welche α, β, γ und die Doppelsummen selbst, durch Transformation der Indices erleiden, ausführlich auseinandergesetzt haben, und da die hier gefundenen einfachen Summen nur von den beiden Elementen η und ξ abhängen, deren Verknüpfung mit α, β, γ durch die sehr einfachen Relationen

$$(\eta.)\qquad \eta = \frac{\pi\beta}{\alpha} = \pi\omega, \qquad \xi = \frac{\pi\gamma}{\alpha}$$

festgesetzt ist, so lassen sich die Theoreme, zu welchen die erwähnte Vergleichung führt, sehr leicht und unmittelbar aussprechen, sobald man nur die den Modificationen von α, β, γ entsprechenden Veränderungen von η und ξ aus den Relationen $(\eta.)$ berechnet.

Um mich hierbei kürzer fassen zu können, will ich den Begriff der *Substitution* durch ein besonderes Zeichen, z. B. durch das Zeichen $\backsim$ darstellen, dessen Einführung bei vielen Untersuchungen dringend nöthig ist, sobald es sich um die Betrachtung der Werthe handelt, in welche Ausdrücke übergehen, wenn andere Ausdrücke, von welchen die ersteren Functionen sind, ihre Form oder ihren Werth ändern. Dieses Zeichen $\backsim$, welches eine Menge von Worten erspart, heifst im Vorsatze (Hypothesis): „Wenn anstatt des zur Linken des Zeichens stehenden der zur Rechten befindliche Ausdruck gesetzt wird," und im Nachsatze, in der Folgerung (Thesis): „So geht die linke Seite in die rechte über." Z. B. der Satz, wenn $\boldsymbol{A} \backsim \boldsymbol{B}$, so ist $\boldsymbol{C} \backsim \boldsymbol{D}$ heifst: wenn man $\boldsymbol{B}$ an die Stelle von $\boldsymbol{A}$ setzt, also, wenn man $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ übergehen läfst, so geht $\boldsymbol{C}$ in $\boldsymbol{D}$ über, oder so tritt $\boldsymbol{D}$ an die Stelle von $\boldsymbol{C}$. Des Gleichheitszeichens kann man sich zu diesem Zwecke nicht füglich bedienen, da das Setzen zweier Ausdrücke statt einander in eine Formel, in der Absicht die Modification der Formel zu untersuchen, durchaus keine Gleichheit der für einander gesetzten Gröfsen bedingt, und da namentlich häufig Gröfsen statt einander gesetzt werden, welche ihrer Form nach nie einander gleich sein können; wie es z. B., wenn man $\boldsymbol{m}+1$ an die Stelle von $\boldsymbol{m}$ zu setzen hätte, jedenfalls unpassend wäre, deshalb $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}+1$ zu schreiben; während die Formel $\boldsymbol{m} \backsim \boldsymbol{m}+1$ diesen Begriff oder hier diese Forderung sehr gut ausdrückt. Übrigens lassen sich diese Substitutionsformeln, wie unmittelbar aus ihrer Bedeutung hervorgeht, ganz wie Gleichungen behandeln, indem man auf beiden Seiten des Zeichens gleiche Operationen vornehmen, mehrere Formeln durch beliebige Operationen verknüpfen darf, u. s. w.; nur darf man nie, was bei Gleichungen erlaubt ist, die beiden Seiten einer Formel mit einander vertauschen, sondern man mufs stets die linke und die rechte Seite genau von einander unterscheiden *).

Bei der im vorigen Paragraphen zuerst angewandten Transformation der Indices $m \backsim m+\lambda$, $n \backsim n+\nu$ blieben α und β unverändert, während $\gamma \backsim \gamma+\lambda\alpha+\nu\beta$ war, die Doppelsummen blieben selbst unverändert, bis auf diejenige, deren Exponent $=1$, und welche den Zuwachs $\nabla = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$ erhält. Da α und β sich nicht ändern, so bleiben auch $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ und $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ unverändert, während $\xi = \frac{\pi\gamma}{\alpha} \backsim \frac{\pi(\gamma+\lambda\alpha+\nu\beta)}{\alpha} = \xi+\lambda\pi+\nu\eta$. Alle in diesem Paragraphen durch Summation gewonnenen Formeln lassen sich in die folgende zusammenziehen:

$$\text{(IV.)} \qquad \Sigma\Sigma\frac{1}{(\alpha m+\beta n+\gamma)^g} = \frac{(-1)^{g-1}\pi^g}{1.2\ldots.(g-1)\alpha^g}\,\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)}{\partial\xi^{g-1}}.$$

Man erhält folglich, wenn $g>1$ ist,

$$\sum_n\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi')}{\partial\xi^{g-1}} = \sum_n\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)}{\partial\xi^{g-1}},$$

und für $g=1$,

$$\frac{\pi}{\alpha}\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi') = \frac{\pi}{\alpha}\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)+\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha},$$

folglich

$$\Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi') = \Sigma\operatorname{cotang}(n\eta+\xi)+2\delta\nu i,$$

wenn $\xi'=\xi+\lambda\pi+\nu\eta$ und $\delta=-1$ oder $=+1$, je nachdem der Coëfficient von i in $\omega=\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist. Diese Resultate können in folgendem Theorem vereinigt werden:

---

*) Man könnte dieses Verhalten gar nicht unpassend durch das Zeichen selbst anschaulich machen, wenn man z. B. einen liegenden Pfeil wählte, der, je nachdem sich seine Spitze nach der rechten oder nach der linken Seite wendet, anzeigte, ob die rechte Seite für die linke oder die linke für die rechte substituirt werden soll; da jedoch dergleichen Charactere im Druck schwer darzustellen sind, wenn sie häufig wiederkehren, so mag es bei dem obigen Zeichen sein Bewenden haben. Übrigens findet man selten Gehör, wenn man die Wichtigkeit der Bezeichnung eines solchen Begriffs a priori demonstriren will und man mufs dem practischen Gebrauche den Nachweis der Nützlichkeit des Zeichens überlassen.

A. „Die Summen von der Form $\Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\eta + \xi)}{\partial \xi^{g-1}}$ sind, als Functionen von ξ betrachtet, doppelt periodisch, wenn $g > 1$ ist, und haben die „beiden Moduln der Periodicität π und η; d. h. sie bleiben ungeändert, wenn „ξ um $\lambda\pi + \nu\eta$ wächst; für $g = 1$ sind sie noch einfach periodisch in Bezug „auf den Modul π, erhalten aber im Allgemeinen den Zuwachs $2\delta\nu i = \pm 2\nu i$, „wenn ξ um $\lambda\pi + \nu\eta$ wächst."

Diese Eigenschaften liegen ziemlich an der Oberfläche; denn die Periodicität nach π ergiebt sich unmittelbar daraus, dafs jedes Glied der Reihen schon eine periodische Function mit dem Modul π ist, und die Periodicität nach η geht daraus hervor, dafs für $g > 1$ die Reihen von der Anordnung der Glieder unabhängig sind, so dafs man $n \backsim n+1$ setzen kann, wodurch $\xi \backsim \xi + \eta$ wird; wegen des Zuwachses $\pm 2i$ für den Fall $g = 1$ verweise ich auf die Bemerkung am Schlusse. Die Eigenschaften, zu welchen ich sogleich übergehen werde, und welche der zweiten der beiden im vorigen Paragraphen angewandten Transformations-Arten der Indices entsprechen, sind verborgener, und wenn man nicht den hier eingeschlagenen Weg verfolgen will, so erfordert ihre Ermittelung sehr tiefliegende Untersuchungen, welche dennoch nicht die wahre Metaphysik derselben einsehen lassen. Man bemerke übrigens die bei dieser Gelegenheit hervortretende zweifache Darstellungs-Art der doppelt periodischen Functionen. Bei der ersten Darstellung, durch die Doppelsummen, werden in einer algebraischen Function, welche nichts von Periodicität besitzt, statt des Variabeln γ alle doppelt unendlich vielen Ausdrücke von der Form $\gamma + m\alpha + n\beta$ gesetzt, und wenn die Doppelreihe, welche alle hieraus hervorgehenden Werthe umfafst, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt, oder wenigstens ihre Summe nicht ändert, wenn man die beiden Indices um constante ganze Zahlen vermehrt, so geht die Doppelsumme für jede Vermehrung von γ um irgend ein Vielfaches von α und irgend ein Vielfaches von β in sich selbst zurück. Bei der zweiten Darstellung-Art, durch einfache Reihen, ist die erzeugende Function, wie hier die Cotangente, nebst ihrem Differentialquotienten, selbst schon eine einfach periodische Function, und in dieser werden für den Variabeln alle Glieder $\xi + n\eta$ einer einfachen arithmetischen Reihe gesetzt; convergirt die hieraus entspringende Summe unabhängig von der Anordnung der Glieder, oder ändert sie sich wenigstens nicht, wenn alle Glieder um eine Stelle fortrücken, so kommt die zweite Periode dadurch hinein, dafs dem Übergange von $m \backsim m+1$

der von $\xi \backsim \xi + \eta$ entspricht. Zu diesen beiden Darstellungs-Arten der doppelt periodischen Functionen, welche characterisch sind, gesellt sich diejenige ebenfalls characteristische, welche ***Jacobi*** besonders hervorgehoben hat; nämlich durch den Quotienten zweier Functionen, welche zugleich einen eigentlichen und einen uneigentlichen Modul der Periodicität haben: Zähler und Nenner sind Reihen, deren allgemeines Glied einfach periodisch ist und bei welchen, wenn man das Argument um einen zweiten Variabeln ändert, ein und derselbe Factor im Zähler und Nenner heraustritt, welcher sich dann durch die Division forthebt. Durch dieses Fortheben des im Zähler und Nenner gleichzeitig heraustretenden Factors kommt die zweite Periode hinein, während die erste Periode schon durch die Periodicität der allgemeinen Glieder der Reihen im Zähler und Nenner bedingt ist. Es scheint schwer zu entscheiden, welcher der erwähnten drei Darstellungs-Arten der doppelten Periodicität der Vorzug zu geben sei; sie nehmen jede ein eigenthümliches Interesse für sich in Anspruch; jedenfalls scheint der ersten, durch die Doppelsummen, wegen ihres ***symmetrischen Verhaltens in Bezug auf die beiden Perioden,*** welches man bei den andern beiden vermifst, eine besondere Wichtigkeit zuzuschreiben.

Bei der zweiten Transformations-Art der Indices $m \backsim \lambda m + \mu n$, $n \backsim \nu m + \varrho n$ wird $\alpha \backsim \lambda\alpha + \nu\beta = \alpha'$, $\beta \backsim \mu\alpha + \varrho\beta = \beta'$; γ bleibt unverändert: hieraus folgt $\omega \backsim \frac{\mu\alpha+\varrho\beta}{\lambda\alpha+\nu\beta} = \frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega} = \omega'$ und $\xi \backsim \frac{\pi\gamma}{\lambda\alpha+\nu\beta} = \frac{\xi}{\lambda+\nu\omega} = \xi'$; man erhält daher aus (IV.)

$$\frac{1}{\alpha'^g}\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\pi\omega'+\xi')}{\partial\xi'^{g-1}} = \frac{1}{\alpha^g}\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\pi\omega+\xi)}{\partial\xi^{g-1}} + \frac{(-1)^{g-1}1.2\ldots.g-1}{\pi^g}.\nabla,$$

wo $\nabla = -\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\gamma$, wenn $g=1$, $\nabla = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$, wenn $g=2$, und $\nabla = 0$, wenn $g > 2$ ist. Schreibt man demnach

$$\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\pi\omega'+\xi')}{\partial\xi'^{g-1}} = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g\Sigma\frac{\partial^{g-1}\operatorname{cotang}(n\pi\omega+\xi)}{\partial\xi^{g-1}} + \Delta,$$

so wird

$$\Delta = -\delta\frac{2\nu\gamma i}{\alpha} = \frac{-\delta}{\pi}2\nu\xi i,\quad \text{wenn } g=1,$$

$$\Delta = \frac{-\delta}{\pi}\cdot\frac{2\nu\alpha' i}{\alpha} = \frac{-2\delta\nu i}{\pi}(\lambda+\nu\omega),\quad \text{wenn } g=2,$$

und $\Delta = 0$, wenn $g > 2$. Setzt man noch $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^g = (\lambda+\nu\omega)^g$ in die Formel, so kommen nirgends mehr α, β, γ vor, sondern nur noch ω und ξ, und man hat folgendes Theorem:

B. „Die in der Form $\Sigma \frac{\partial^{g-1} \operatorname{cotang}(n\pi\omega+\xi)}{\partial \xi^{g-1}}$ enthaltenen Reihen, in „welchen ω einen beliebigen, nicht reellen, ξ einen ganz beliebigen complexen „Werth hat, ändern sich nicht wesentlich, wenn man irgend vier ganze, der Bedin- „gung $\lambda\varrho-\mu\nu=\pm 1$ genügende ganze Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ wählt und $\omega'=\frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega}$ „an die Stelle von ω und gleichzeitig $\xi'=\frac{\xi}{\lambda+\nu\omega}$ an die Stelle von ξ setzt: „sie erlangen dadurch nur den Factor $(\lambda+\nu\omega)^g$ und den Zuwachs Δ, welcher „letztere $=\frac{-2\delta\nu i}{\pi}\xi$, $=\frac{-2\delta\nu i}{\pi}(\lambda+\nu\omega)$, oder $=0$ ist, je nachdem $g=1$, „$g=2$ oder $g>2$ ist, während $-\delta$ das Vorzeichen des Coëfficienten von „i in ω bedeutet."

Um zu der Ausführung der Multiplication nach m in den unendlichen Doppelproducten überzugehen, setze man in (I.) $\gamma \backsim \beta n+\gamma$. Fügt man zu den bei den Summen eingeführten Bezeichnungen

$$\eta=\frac{\pi\beta}{\alpha}=\pi\omega \quad \text{und} \quad \xi=\frac{\pi\gamma}{\alpha} \quad \text{noch} \quad y=\frac{\pi x}{\alpha} \quad \text{hinzu,}$$

so kommt

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}=\frac{\sin(n\eta+\xi-y)}{\sin(n\eta+\xi)}=\frac{e^{(n\eta+\xi-y)i}-e^{-(n\eta+\xi-y)i}}{e^{(n\eta+\xi)i}-e^{-(n\eta+\xi)i}},$$

folglich

$$\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left\{1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right\}=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{\sin(n\eta+\xi-y)}{\sin(n\eta+\xi)}$$
$$=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{e^{(n\eta+\xi-y)i}-e^{-(n\eta+\xi-y)i}}{e^{(n\eta+\xi)i}-e^{-(n\eta+\xi)i}}.$$

Setzt man $e^{\eta i}=p$, $e^{\xi i}=\zeta$, $e^{yi}=z$, so wird das allgemeine Glied des einfachen Products nach n:

$$\frac{p^n\zeta z^{-1}-p^{-n}\zeta^{-1}z}{p^n\zeta-p^{-n}\zeta^{-1}},$$

welchem man entweder die Form $z^{-1}\frac{1-p^{-2n}\zeta^{-2}z^2}{1-p^{-2n}\zeta^{-2}}$, oder die Form

$$z\cdot\frac{1-p^{2n}\zeta^2z^{-2}}{1-p^{2n}\zeta^2}$$

geben mufs, je nachdem der analytische Modul von p gröfser oder kleiner als Eins ist. $M(p)=M(e^{\eta i})$ kann nie gleich Eins sein, weil η imaginär, also der reelle Theil von ηi von Null verschieden ist; übrigens ist $M(p)>1$ oder $M(p)<1$, je nachdem der reelle Theil von ηi positiv oder negativ.

also je nachdem der Coëfficient von i in ω negativ oder positiv, und je nachdem $\delta = +1$ oder $\delta = -1$ ist; es ist daher $M(p)^{-\delta}$ stets < 1, und setzt man $p^{-\delta} = e^{-\delta\eta i} = q = e^{-\delta\frac{\pi\beta i}{\alpha}}$, was mit der von *Jacobi* eingeführten Bezeichnung übereinstimmt, so ist $M(q)$ stets < 1, und man kann das allgemeine Glied in den beiden Formen

$$z^{\mp\delta}\frac{1-q^{\pm 2n}\zeta^{\mp 2\delta}z^{\pm 2\delta}}{1-q^{\pm 2n}\zeta^{\mp 2\delta}}$$

schreiben, wo entweder alle oberen oder alle unteren Zeichen zugleich gelten; man nimmt die oberen oder die unteren Zeichen, je nachdem der Index n positiv oder negativ ist. Thut man Dies und nimmt dann jedesmal zwei Factoren zusammen, deren Indices entgegengesetzte Werthe haben, so erhält man

$$\frac{(1-q^{2n}\zeta^{-2\delta}z^{2\delta})(1-q^{2n}\zeta^{2\delta}z^{-2\delta})}{(1-q^{2n}\zeta^{-2\delta})(1-q^{2n}\zeta^{2\delta})}$$
$$= (1-q^{2n}\zeta^2 z^{-2})(1-q^{2n}\zeta^{-2}z^2) : (1-q^{2n}\zeta^2)(1-q^{2n}\zeta^{-2}),$$

wo n nur positive Werthe erhält; für $n = 0$ kommt

$$\frac{\zeta z^{-1}-\zeta^{-1}z}{\zeta-\zeta^{-1}}.$$

Man sieht daher, dafs das Resultat der Multiplication nach m der Quotient zweier einfachen Producte wird, deren jedes die Form

$$(\zeta-\zeta^{-1})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}\zeta^2)\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n}\zeta^{-2})$$
$$= (\zeta-\zeta^{-1})(1-q^2\zeta^2)\left(1-\frac{q^2}{\zeta^2}\right)(1-q^4\zeta^2)\left(1-\frac{q^4}{\zeta^2}\right)\ldots = \chi(\zeta)$$

hat, und deren Convergenz für jeden Werth von ζ leicht daraus folgt, dafs $M(q) < 1$ ist. Man erhält nämlich, wenn man die Function $\chi(\zeta)$ einführt:

$$(\text{V.})\qquad \prod_{m,n}\left(1-\frac{x}{\alpha m+\beta n+\gamma}\right) = \frac{\chi\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{\chi(\zeta)} = \frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = -\frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi(\zeta)}$$
$$= \frac{\chi(e^{(y-\xi)i})}{\chi(e^{-\xi i})} = \frac{\chi\left(e^{\frac{x-\gamma}{\alpha}\pi i}\right)}{\chi\left(e^{-\frac{\gamma}{\alpha}\pi i}\right)}.$$

Die Entwicklung der einfachen Producte von der Form $\chi(\zeta)$ in Reihen, welche sowohl nach positiven, als negativen Potenzen von ζ fortschreiten und die von *Jacobi* sogenannten Θ Functionen bilden, findet sich ausführlich in *Jacobi's* „Fundamenta nova etc.", und ich kann mich hier wegen Mangel an

Raum nicht bei derselben aufhalten, und beschränke ich mich auf die Bemerkung, dafs man die im Folgenden für die Functionen $\chi(\zeta)$ abgeleiteten Eigenschaften sogleich auf die Θ Functionen übertragen kann, welche die Entwicklungen jener sind.

Bezeichnet man das unendliche Doppelproduct, als Function von x und y betrachtet, durch $f(x, y)$, so hat man, da aus $m \backsim m+g$, $n \backsim n+h$, wo g und h irgend zwei ganze Zahlen sind, $y \backsim y+g\alpha+h\beta$ folgt, nach den im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchungen die Fundamentalformel

$$\text{(VI.)} \quad f(x, y+g\alpha+h\beta) = e^{-\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x} f(x, y).$$

Bei der betreffenden Substitution bleiben $\eta = \frac{\pi\beta}{\alpha}$ und $y = \frac{\pi x}{\alpha}$, also auch q und z unverändert, während

$$\xi = \frac{\pi y}{\alpha} \backsim \frac{\pi y}{\alpha} + g\pi + h\frac{\beta\pi}{\alpha}, \qquad \zeta \backsim (-1)^g e^{h\eta i}\zeta = (-1)^g q^{-\delta h}\zeta,$$

also kommt durch Verbindung von (V.) und (VI.), wenn man noch $h \backsim \delta h$ setzt:

$$\frac{\chi\left(q^h\cdot\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{q^h}{\zeta}\right)} = z^{-2h}\cdot\frac{\chi\left(\frac{z}{\zeta}\right)}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}.$$

Setzt man demnach $z \backsim \zeta z$ und

$$\chi(q^h z) = C\cdot z^{-2h}\chi(z),$$

so hangt C nicht von z ab und kann aus einem speciellen Werthe von z bestimmt werden. Es sei zunächst $h=1$ und man setze $z = q^{-\frac{1}{2}}$, so erhält man $\chi(q^{\frac{1}{2}}) = Cq\chi(q^{-\frac{1}{2}})$. Nun ist allgemein $\chi(\zeta^{-1}) = -\chi(\zeta)$, weil alle Factoren von $\chi(\zeta)$ bis auf den ersten paarweise aus einander dadurch hervorgehen, dafs man ζ^{-1} statt ζ schreibt, und nur der erste $\zeta-\zeta^{-1}$ durch diese Substitution sein Zeichen wechselt; also erhält man $Cq = \chi(q^{\frac{1}{2}}):\chi(q^{-\frac{1}{2}}) = -1$, $C = -q^{-1}$, $\chi(qz) = -q^{-1}z^{-2}\chi(z)$. Allgemein kann man, wenn h ungerade ist, C in der Formel $\chi(q^h z) = Cz^{-2h}\chi(z)$ dadurch bestimmen, dafs man $z = q^{-\frac{1}{2}h}$ setzt, wodurch sich $\chi(q^{\frac{1}{2}h}) = Cq^{h^2}\chi(q^{-\frac{1}{2}h})$, $C = -q^{-h^2}$ ergiebt. Dies Verfahren führt aber nicht zum Ziele, wenn h gerade ist, weil dann $\chi(q^{-\frac{1}{2}h}) = \chi(q^{\frac{1}{2}h}) = 0$ ist, indem immer $\chi(q^g) = 0$, wenn g eine ganze Zahl ist. Für einen ungeraden Werth von h hat man also $\chi(q^h z) = -q^{-h^2}z^{-2h}\chi(z)$, und setzt man hier $z \backsim qz$, so kommt $\chi(q^{h+1}z) = -q^{-h^2}q^{-2h}z^{-2h}\chi(qz) = q^{-h^2-2h-1}z^{-2h-2}\chi(z)$, also allgemein für jeden ganzen Werth von h:

$$\text{(VII.)} \quad \chi(q^h z) = (-1)^h q^{-h^2} z^{-2h}\chi(z),$$

eine Formel, welche auch, wie schon in „Fundamenta nova etc." geschehen ist, unmittelbar aus der Definition des Products $\chi(z)$ abgeleitet werden kann. Die Constante C kann man auch durch folgende Methode zu bestimmen suchen. Man setze $z \backsim q^{-h} z^{-1}$ und multiplicire die hieraus hervorgehende Formel $\chi(z^{-1}) = C q^{2h^2} z^{2h} \chi(q^{-h} z^{-1})$ mit der ursprünglichen, so ergiebt sich

$$\chi(q^h z)\chi(z^{-1}) = C^2 q^{2h^2} \chi(z)\chi(q^{-h} z^{-1});$$

und erwägt man, dafs $\chi(z^{-1}) = -\chi(z)$, $\chi(q^{-h} z^{-1}) = -\chi(q^h z)$ ist, so kommt $C^2 q^{2h^2} = 1$, $C = \pm q^{-h^2}$; aber das Vorzeichen $\pm$ bleibt bei dieser Methode unbestimmt und daher ist die erste vorzuziehen.

Für die Substitution $m \backsim \lambda m + \mu n$, $n \backsim \nu m + \varrho n$, war $\alpha \backsim \lambda\alpha + \nu\beta = \alpha'$, $\beta \backsim \mu\alpha + \varrho\beta = \beta'$. Bezeichnet man daher dasjenige unendliche Doppelproduct, welches aus $f(x, y)$ hervorgeht, wenn man $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$ setzt, durch $f'(x, y)$, so hat man nach §. 3. die zweite Fundamentalformel

$$\text{(VIII.)} \qquad f'(x, y) = e^{\delta \frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}(yx - \frac{1}{2}x^2)} f(x, y).$$

Schreibt man den Exponenten der Exponentialfunction unter der Form

$$-\delta \frac{\nu\pi i}{\alpha\alpha'}\{x - y)^2 - y^2\} = -\delta \frac{\nu\alpha i}{\pi\alpha'}\{(y - \xi)^2 - \xi^2\} = -\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi + \nu\eta}\{(y - \xi)^2 - \xi^2\}$$

und bemerkt, dafs bei dieser Substitution $\xi \backsim \frac{\pi y}{\alpha'} = \frac{\alpha}{\alpha'}\xi = \frac{\xi}{\lambda + \nu\omega} = \xi'$, $y \backsim \frac{y}{\lambda + \nu\omega} = y'$, $y - \xi \backsim y' - \xi'$, $\omega \backsim \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\mu + \varrho\omega}{\lambda + \nu\omega} = \omega'$, $\delta \backsim \varepsilon\delta = (\lambda\varrho - \mu\nu)\delta = \delta'$ wird, so erhält man für die Function χ aus (VIII.), in Verbindung mit (V.), die Formel

$$\frac{\chi(e^{(y'-\xi')i}, q')}{\chi(e^{-\xi' i}, q')} = \frac{e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}(y-\xi)^2}}{e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}\xi^2}} \cdot \frac{\chi(e^{(y-\xi)i}, q)}{\chi(e^{-\xi i}, q)};$$

wo $q = e^{-\delta\pi i.\omega}$, $q' = e^{-\varepsilon\delta\pi i \frac{\mu+\varrho\omega}{\lambda+\nu\omega}}$, während $(y' - \xi') = \frac{y - \xi}{\lambda + \nu\omega}$, $\xi' = \frac{\xi}{\lambda + \nu\omega}$. Setzt man $y - \xi \backsim y$, wodurch $y' - \xi' \backsim y'$, und bedenkt, dafs y und ξ und ebenso y' und ξ' gänzlich von einander unabhängig sind, so kann man der obigen Formel die Form

$$\text{(IX.)} \qquad \chi(e^{y' i}, q') = C . e^{-\frac{\delta\nu i}{\lambda\pi+\nu\eta}y^2} \chi(e^{y i}, q)$$

geben, wo die Constante C von y ganz unabhängig ist und also nur von ω abhangt. Dies ist die allgemeine Formel, auf welche ich schon im vorigen Paragraphen hingewiesen habe und aus welcher diejenige, welche der blofsen

Vertauschung der Indices in dem unendlichen Doppelproduct entspricht, als ganz specieller Fall hervorgeht, wenn man $\lambda = \varrho = 0$, $\mu = \nu = 1$, $\varepsilon = -1$, also $q' = e^{\frac{\delta\pi i}{\omega}}$, $y' = \frac{y}{\omega}$ setzt. Die Constante C kann aus einem speciellen Werthe von y bestimmt werden; aber um die einfachste Darstellung ihres Werthes zu haben, mufs man sich anderer Methoden bedienen, bei denen ich mich hier nicht aufhalten kann, da ich durch den grofsen Umfang, welchen diese Abhandlung schon erreicht hat, sehr zur Kürze gezwungen werde.

Die Function $f(x, \gamma)$, welche von zwei oder, wenn man α und β dazu rechnet, von vier Elementen abhangt, kann sogleich auf eine solche zurückgeführt werden, welche ein Element weniger enthält. Man hat

$$1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \frac{\alpha m + \beta n + \gamma - x}{\alpha m + \beta n + \gamma} = \frac{1 - \frac{x - \gamma}{\alpha m + \beta n}}{1 - \frac{-\gamma}{\alpha m + \beta n}},$$

wenn nicht gleichzeitig $m = 0$, $n = 0$; und für $m = n = 0$ wird das allgemeine Glied $1 - \frac{x}{\gamma} = \frac{x - \gamma}{-\gamma}$. Setzt man daher allgemein

$$x\,\Pi\left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n}\right) = \varphi(x),$$

wo in dem Producte die Combination $m = n = 0$ auszuschliefsen ist, so erhält man

$$\text{(X.)} \qquad f(x, \gamma) = \frac{\varphi(x - \gamma)}{\varphi(-\gamma)} = \frac{\varphi(\gamma - x)}{\varphi(\gamma)}.$$

Die Function $\varphi(x)$ ist der Werth von $\frac{x}{1 - \frac{x}{\gamma}} f(x, \gamma)$ oder von $-\gamma f(x, \gamma)$ für $\gamma = 0$, und man kann geradezu $\varphi(x) = f(x, 0)$ setzen, wenn man sich vornimmt x statt des in $f(x, 0)$ vorkommenden sinnlosen Factors $1 - \frac{x}{0}$ zu setzen. Aus den Fundamental-Eigenschaften der Function $\varphi(x)$, welche jetzt entwickelt werden sollen, gehen zugleich die Modificationen hervor, welche $f(x, \gamma)$ erleidet, wenn x sich ändert, während durch die Formel (VI.) die Modificationen von $f(x, \gamma)$ bei einer Änderung von γ gegeben sind. Setzt man in (VI.) den Werth von $f(x, \gamma)$ aus (X.) und schreibt zugleich $\gamma - x \backsim x$, also $x \backsim \gamma - x$, so erhält man

$$\frac{\varphi(x + g\alpha + h\beta)}{\varphi(\gamma + g\alpha + h\beta)} = e^{\delta \frac{2h\pi i}{\alpha}(x - \gamma)} \frac{\varphi(x)}{\varphi(\gamma)},$$

und folglich, da x und γ ganz von einander unabhängig sind,

$$\varphi(x+g\alpha+h\beta) = C.e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x}\varphi(x);$$

wo C nicht von x, sondern nur von α und β abhangt. Um C zu bestimmen, kann man, wenn g und h nicht gleichzeitig beide gerade sind, $x = -\frac{g\alpha+h\beta}{2}$ setzen, wodurch $x+g\alpha+h\beta = -x$. Berücksichtigt man hierbei, dafs allgemein $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ist *), so erhält man

$$C = -e^{\frac{\delta h\pi i}{\alpha}(g\alpha+h\beta)} = -e^{\delta gh\pi i}.e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}} = (-1)^{gh+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}.$$

Z. B. für $g=1$, $h=0$ ist $\varphi(x+\alpha) = -\varphi(x)$, und hiernach, wenn g ungerade ist,

$$\begin{aligned}\varphi(x+(g+1)\alpha+h\beta) &= (-1)^{gh+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}(x+\alpha)}\varphi(x+\alpha)\\ &= (-1)^{h+g+1}e^{\delta h^2\frac{\beta\pi i}{\alpha}}e^{\delta\frac{2h\pi i}{\alpha}x}\varphi(x),\end{aligned}$$

weil $g\equiv 1$, $gh\equiv h$ (mod. 2); also hat man in allen Fällen

$$\text{(XI.)}\qquad \varphi(x+g\alpha+h\beta) = (-1)^{h+g}e^{\delta\frac{h^2\beta+2hx}{\alpha}\pi i}\varphi(x),$$

indem $(-1)^{gh+1} = (-1)^{h+g}$, wenn g ungerade ist.

Es sei $\varphi(x) \backsim \varphi'(x)$, wenn $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$; da nun

$$\varphi(x) = \{-\gamma f(x,\gamma)\}_{\gamma=0} \quad\text{und}\quad \varphi'(x) = \{-\gamma f'(x,\gamma)\}_{\gamma=0},$$

so erhält man unmittelbar aus (VIII.), wenn man $\gamma=0$ setzt, nachdem man beide Seiten der Formel mit $-\gamma$ multiplicirt hat,

$$\text{(XII.)}\qquad \varphi'(x) = e^{-\delta\frac{\nu\pi i}{\alpha\alpha'}x^2}\varphi(x).$$

Betrachtet man den Quotienten $\frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)} = f(x,\gamma)$ als Function von γ, so kann man nach denjenigen speciellen Werthen von x fragen, für welche jener Quotient eine doppelt periodische Function wird. Es genügt zu dem Ende, x so zu bestimmen, dafs der Exponentialfactor auf der rechten Seite von (VI.) $=+1$ wird; setzt man z. B. $x=\frac{1}{2}\alpha$, so ist $\frac{\varphi(\gamma-\frac{1}{2}\alpha)}{\varphi(\gamma)}$ eine doppelt periodische Function von γ mit den beiden Moduln α und 2β, und allgemein ist

---

*) Dies zeigt sich sogleich, wenn man in dem unendlichen Doppelproduct $m \backsim -m$, $n \backsim -n$ setzt, und bedenkt, dafs für diese Transformation der Indices $\nu=0$ ist, also in der Formel (VIII.) der hinzutretende Exponentialfactor sich auf die Einheit reducirt.

$\dfrac{\varphi\left(\gamma-\frac{\alpha}{h}\right)}{\varphi(\gamma)}$ eine doppelt periodische Function von γ mit den beiden Moduln α und $h\beta$; nur darf man nicht $h=1$ annehmen, weil die Function sich dann auf eine Constante reducirt. Durch Transformation von α, β in α' resp. β' und Anwendung der Formel (XII.) kann man eine Reihe von unendlich vielen doppelt periodischen Quotienten finden; doch ist die Ausführung dieses Gegenstandes nach den hier angewandten Principien zu leicht, als dafs es nöthig wäre, mich länger bei demselben aufzuhalten.

5.

Die Kreisfunctionen entstehen aus Functionen von der Form $\frac{1}{x^g}$ als erzeugenden Functionen, indem man statt x alle Werthe von der Form $x+m$ setzt, in welchen m alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis ∞ durchläuft, und alle daraus hervorgehenden Werthe der erzeugenden Function addirt. Allgemeiner entstehen die Kreisfunctionen durch einfache Summation, wenn man in der erzeugenden Function $\frac{1}{x^g}$, $x \backsim x+\alpha m$ setzt; was ich die Entstehung durch *einfache Erzeugung* nach dem Modul α nennen will. Aus denselben erzeugenden Functionen $\frac{1}{x^g}$ entstehen die elliptischen Functionen durch *doppelte Erzeugung* nach den beiden Moduln α und β, d. h. durch doppelte Summation von $-\infty$ bis ∞ nach den beiden Indices m und n, wenn man $x \backsim x+\alpha m+\beta n$ setzt. Aus jeder rationalen Function von x, in welcher der Grad des Zählers kleiner ist als der des Nenners, entstehen im Allgemeinen durch einfache Erzeugung Kreisfunctionen, durch doppelte Erzeugung elliptische Functionen; denn jede solche rationale Function läfst sich in Partialbrüche von der Form $\frac{C}{(x-c)^g}$ zerlegen, wo C und c von x unabhängig sind und g positive ganze Werthe hat, und die erzeugte Function zerfällt dadurch in ein Aggregat von Functionen, welche erzeugende Functionen von der einfachen Form $\frac{1}{(x-\alpha)^g}$ haben. Bei der einfachen Erzeugung sind die Functionen stets einfach periodisch, und die Summen sind unabhängig von der Anordnung der Glieder, wenn alle Werthe von g, welche in den Partialbrüchen erscheinen, >1 sind; letzteres geschieht, wenn die erzeugende rationale Function der vollständige Differentialquotient einer andern rationalen Function ist; in jedem anderen Falle können jedoch, bei jeder Änderung des Arrangements der Glieder in den einfachen Summen, die Functionen, welche durch diese Summen repräsentirt werden, nur einen constanten von x unabhängigen Zuwachs erhalten, und dieser Zuwachs rührt einzig und allein von denjenigen Termen der erzeugenden rationalen Function her, in welchen $g = 1$ ist. Die durch doppelte Erzeugung entstehenden Functionen sind doppelt periodisch nach den beiden Moduln α und β, wenn alle $g > 1$, unabhängig von der Anordnung der Glieder in den Doppelsummen, wenn alle $g > 2$ sind, in welchem Falle die erzeugende Function der zweite Differentialquotient einer rationalen Function ist, und im Allgemeinen kann der Zuwachs, welcher bei verändertem Arrangement aus den $g = 1$ und $g = 2$ entsprechenden Gliedern entspringt, nur eine ganze Function ersten Grades von x sein, welche sich auf eine Constante reducirt, wenn alle $g > 1$ sind. Die Richtigkeit dieser letztern Behauptungen ergiebt sich unmittelbar aus den im Vorhergehenden auseinandergesetzten Principien.

Der Hauptgegenstand dieses Paragraphen besteht darin, nachzuweisen, dafs die durch doppelte Erzeugung aus den rationalen Functionen entstehenden Functionen, welche gleichzeitig auch aus den Kreisfunctionen durch einfache Erzeugung entstehen, wirklich elliptische Functionen sind, d. h. den Differentialgleichungen genügen, durch welche die elliptischen Functionen definirt werden; und ferner zu zeigen, wie aus denselben Betrachtungen, welche zu diesem Resultate führen, zugleich die Fundamental-Eigenschaften der elliptischen Functionen hervorgehen. Der Weg ist ganz derselbe, wie derjenige, welchen ich im vorigen Paragraphen für die Kreisfunctionen, als der durch einfache Erzeugung aus den rationalen entstehenden Functionen eingeschlagen habe; von den Eigenschaften der erzeugenden Functionen ausgehend, gelangt man zu denjenigen der erzeugten Functionen. Es lag ursprünglich in dem Plane dieser Arbeit, den betreffenden Gegenstand mit aller Ausführlichkeit zu behandeln, indessen werde ich durch Mangel an Raum gezwungen, mich auf die Hauptpuncte und die allgemeinsten Principien zu beschränken. Übrigens glaube ich, dafs es nicht leicht einen andern Gang in dieser Theorie geben möchte, bei welchem mit derselben Klarheit und Anschaulichkeit die Analogie der rationalen, Kreis- und elliptischen Functionen in die Augen fällt, und bei welchem die Eigenschaften dieser drei Arten von Functionen gewissermafsen aus derselben Quelle fliefsen und auf demselben Wege angetroffen werden.

Man setze der Kürze wegen $\alpha m + \beta n = w$, in welchem Ausdrucke m und n unabhängig von einander alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen; kommen mehrere Ausdrücke von dieser Form vor, so werden sie durch w_1, w_2, u. s. w. bezeichnet. Die Haupt-Eigenschaft dieser Ausdrücke, welche sie mit den ganzen Zahlen theilen, und auf welcher alles Folgende wesentlich beruht, besteht darin, dafs die Summe irgend zweier wieder einen Ausdruck von derselben Form hervorbringt, und dafs, wenn w_1 alle seine Werthe, w_2 dagegen einen stehenden Werth erhält, die Summe w_1+w_2 wieder genau dieselben Werthe wie w_1 durchläuft; diejenige Eigenschaft der ganzen Zahlen aber, vermöge welcher sie sich durch Multiplication reproduciren, besitzen die Ausdrücke w nur für specielle Werthe von α und β, z. B., wenn $\alpha=1$, $\beta=i$ ist, oder wenn $\alpha=1$, und β einer dritten Wurzel der Einheit gleich ist.

Um die Analogie mit den Kreisfunctionen auch durch die Bezeichnung hervortreten zu lassen, setze man die Doppelsumme

$$\Sigma\frac{1}{(x+w)^g}=(g,x).$$

Zunächst können die Functionen $(1,x)$, $(2,x)$, $(3,x)$, etc. aus einander durch Differentiation nach x abgeleitet werden, und zwar nach den Formeln

$$\partial(1,x)=-(2,x),\quad \partial(2,x)=-2(3,x),\;\ldots.\;\partial(g,x)=-g(g+1,x),$$

in welchen zur Erleichterung des Druckes die Nenner ∂x weggelassen sind. — Setzt man in der Formel

$$\frac{1}{p^3}\cdot\frac{1}{q^3}=\frac{1}{(p+q)^3}\left\{\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right\}+\frac{3}{(p+q)^4}\left\{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right\}+\frac{6}{(p+q)^5}\left\{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right\},$$

$p=x+w_1$, $q=-x-w_2$, $p+q=w_1-w_2$, und summirt über alle Werthe von w_1 und w_2, mit Ausnahme der Combinationen $w_1=w_2$, so erhält man links eine von der Anordnung der Glieder unabhängige vierfache Summe, welche

$$=-\{(3,x)^2-(6,x)\}\text{ ist;}$$

rechts betrachte man w_1-w_2 als einen Ausdruck, welcher für jeden stehenden Werth von w_2 wiederum alle Werthe von w, mit Ausschlufs von $w=0$, d. h. mit Ausschlufs der Combination $m=0$, $n=0$ durchläuft. Setzt man $w_1-w_2=w$, $w_1=w_2+w$ und summirt zuerst über alle Werthe von w_2, so ergiebt sich

$$-\frac{1}{w^3}\{(3,x+w)-(3,x)\}+\frac{3}{w^4}\{(2,x+w)+(2,x)\}-\frac{6}{w^5}\{(1,x+w)-(1,x)\}.$$

Wegen der eigentlichen Periodicität von $(3,x)$ und $(2,x)$ ist nun $(3,x+w)=(3,x)$, $(2,x+w)=(2,x)$ und wegen der uneigentlichen Periodicität von $(1,x)$ ist $(1,x+w)=(1,x)+\delta\frac{2n\pi i}{\alpha}$, wenn $w=\alpha m+\beta n$ gesetzt wird.

Hierdurch reducirt sich das so eben gefundene Resultat auf

$$\frac{6(2,x)}{w^4}-\frac{12\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{w^5}.$$

Die Summation über die Werthe von w, welche noch auszuführen ist, bezieht sich nur auf die allgemeinen Glieder $\frac{1}{w^4}$ und $\frac{n}{w^5}$. Setzt man $\overset{*}{\Sigma}\frac{1}{(\alpha m+\beta n)^4}=(4^*,0)$ und $\delta\frac{2\pi i}{\alpha}\overset{*}{\Sigma}\frac{n}{(\alpha m+\beta n)^5}=c$, wo der Stern über dem Summenzeichen die Ausschliefsung der Combination $m=0$, $n=0$ andeutet, so erhält man schliefslich rechts

$$6(4^*,0)(2,x)-6c;$$

also hat man die Gleichung

$$(1.)\qquad (6,x)=(3,x)^2+6(4^*,0)(2,x)-6c$$

gefunden. Das Erscheinen der eigenthümlichen Constante c weiset auf diejenigen Functionen hin, welche die Differentialquotienten von (g,x) nach β sind. Setzt man $p=w_1$, $q=x+w_2$, $p+q=x+w_1+w_2$ und summirt über w_1 und w_2, indem man $w_1=0$ ausschliefst, so kommt links $(3^*,0)(3,x)$; rechts setzt man $w_1+w_2=w$, $w_1=w-w_2$ und erhält durch Summation über w_2, wobei $w_2=w$ auszuschliefsen:

$$\frac{1}{(x+w)^3}\left\{-(3^*,-w)+(3,x)-\frac{1}{(x+w)^3}\right\}+\frac{3}{(x+w)^4}\left\{(2^*,-w)+(2,x)-\frac{1}{(x+w)^2}\right\}$$
$$+\frac{6}{(x+w)^5}\left\{-(1^*,-w)+(1,x)-\frac{1}{x+w}\right\}.$$

Berücksichtigt man hierbei die Periodicität der Functionen, und dafs $(3^*,0)=0$, $(1^*,0)=0$ ist, so kommt

$$\frac{(3,x)}{(x+w)^3}+\frac{3(2^*,0)+3(2,x)}{(x+w)^4}+\frac{12\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{(x+w)^5}+\frac{6(1,x)}{(x+w)^5}-\frac{10}{(x+w)^6}:$$

summirt man nun nach w, bedenkt, dafs

$$\frac{\partial(4,x)}{\partial\beta}=-4\Sigma\frac{\partial w}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{(x+w)^5}=-4\Sigma\frac{n}{(x+w)^5},$$

und vergleicht mit dem Resultate auf der linken Seite $(3^*,0)(3,x)$, welches sich auf 0 reducirt, so erhält man die zweite Gleichung

$$(2.)\qquad 10(6,x)+\frac{3\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(4,x)}{\partial\beta}$$
$$=(3,x)^2+3(2^*,0)(4,x)+3(2,x)(4,x)+6(1,x)(5,x).$$

Eine ähnliche Behandlung der Formel

$$\frac{1}{p^4q^3}-\frac{1}{p^3q^4}=\frac{1}{r^3}\left(\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}\right)+\frac{2}{r^4}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\frac{2}{r^5}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right),$$

in welcher $r = p + q$ ist, liefert die beiden Gleichungen:

$$(3.)\quad (7, x) = (3, x)\{(4, x) + 2(4^*, 0)\},$$

$$(4.)\quad 5(7, x) = 2(5, x)\{(2, x) - (2^*, 0)\} + 3(3, x)(4, x);$$

auch geht (3.) aus (1.) durch Differentiation nach x hervor. Die Gleichungen (1., 3. und 4.) kann man als totale Differentialgleichungen zur Bestimmung von $(2, x)$ betrachten; (2.) dagegen ist eine partielle Differentialgleichung. Im Allgemeinen führen die identischen Gleichungen von der Form der beiden hier benutzten stets zu totalen Differentialgleichungen, wenn in ihnen die Terme $\frac{1}{p}$ und $\frac{1}{q}$ fehlen; kommen aber diese Terme vor, so können die identischen Formeln zum Theil auf partielle Differenzialgleichungen führen. Man kann sich auf diese Weise bald so viele oder mehr Gleichungen verschaffen, als unbekannte Functionen vorhanden sind; einige der Gleichungen gehen aus andern durch Differentiiren hervor. Übrigens gelten hier genau dieselben Bemerkungen, welche über den analogen Gegenstand im vorigen Paragraphen gemacht worden sind.

Differentiirt man jede der beiden Gleichungen (3. und 4.) noch zweimal nach x, so hat man, (1.) mitgerechnet, 7 Gleichungen, aus welchen man die 6 Functionen $(4, x)$ bis $(9, x)$ eliminiren kann. Diese Elimination ist gar nicht mühsam, wenn man sie geschickt anstellt. Man verschafft sich zunächst aus (3.) und (4.) die Gleichung

$$\{(2, x) - (2^*, 0)\}^2 = (4, x) + 5(4^*, 0) \text{ *)},$$

und verbindet dann dieselbe mit (1.). Das Resultat der Elimination ist

$$(5.)\quad (3, x)^2 = \{(2, x) - (2^*, 0)\}^3 - 15(4^*, 0)\{(2, x) - (2^*, 0)\} + 10\{c - (2^*, 0)(4^*, 0)\}.$$

Man sieht also, dafs das Quadrat von $(3, x)$ einer ganzen Function von $(2, x)$ dritten Grades gleich ist, deren höchster Term den Coëfficienten 1 hat. Um dieser Function dritten Grades eine elegantere Form zu geben, suche man ihre Wurzelwerthe auf; zu dem Ende darf man nur drei von einander unabhängige Werthe von x aufsuchen, welche $(3, x) = 0$ machen; solche sind $x = \frac{\alpha}{2}$, $x = \frac{\beta}{2}$ und $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, wie man sogleich sieht, wenn man die Eigenschaft der Periodicität mit der Relation $(3, -x) = -(3, x)$ verbindet. Diese Werthe von x in $(2, x)$ gesetzt, geben die Wurzelwerthe der Function dritten Grades von $(2, x)$ und man erhält folglich

$$(6.)\quad (3, x)^2 = \left\{(2, x) - \left(2, \frac{\alpha}{2}\right)\right\}\left\{(2, x) - \left(2, \frac{\beta}{2}\right)\right\}\left\{(2, x) - \left(2, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right\}.$$

*) S. a. Schlufs.

Setzt man daher $(2,x)=y$, $\left(2,\frac{\alpha}{2}\right)=a$, $\left(2,\frac{\beta}{2}\right)=a'$, $\left(2,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=a''$, so wird $(3,x)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ und

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))},$$

$$2x = \int\frac{\partial y}{\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))}} + \text{Const.}$$

Die Function $(2,x)$ ist demnach in der That eine ***elliptische Function erster Gattung*** von x, und da

$$(1,x) = -\int(2,x)\partial x = -\int y\partial x = -\int\frac{y\partial y}{2\sqrt{((y-a)(y-a')(y-a''))}},$$

so ist $(1,x)$ eine ***elliptische Function zweiter Gattung.*** Durch nochmalige Integration und den Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen, was man die exponentielle Integration nennen kann, gelangt man einerseits zu den unendlichen Doppelproducten, andrerseits zu den von ***Jacobi*** statt der dritten Gattung eingeführten und von ihm durch Ω bezeichneten Funtionen. Der Zusammenhang zwischen den doppelt periodischen Quotienten aus unendlichen Doppelproducten und den hier betrachteten Doppelsummen ergiebt sich durch Zerfällung jener Quotienten in Partialbrüche.

Man kann zu der Fundamentalgleichung (5.), welche den Zusammenhang unserer Doppelsummen mit den elliptischen Functionen nachweiset, auf kürzerem Wege gelangen, wenn man mit der ***Elimination*** die ***Integration*** der Differentialgleichungen verbindet; aber da die Bestimmung der willkürlichen Constanten wegen der Discontinuität der Functionen einige Schwierigkeiten macht, so suche ich, so oft es angeht, jede Integration zu vermeiden.

Die Zusammenstellung von (5.) und (6.) führt zu Relationen zwischen den Constanten, wie z. B.

$$a+a'+a'' = 3(2^*,0), \text{ u. s. w.};$$

man kann unendlich viele Relationen zwischen solchen Constanten finden, wenn man sowohl in den bereits entwickelten Gleichungen, als auch in allen andern, welche dieselbe Methode ergiebt, für x specielle Werthe setzt.

Die Gleichung (2.), und eine Reihe anderer von ähnlicher Art, dienen zur Bestimmung der Ableitungen der elliptischen Functionen nach β, und wenn man α mit β vertauscht (§. 3.), auch derer nach α.

Unter der grofsen Masse von Formeln, welche aus algebraischen Relationen durch den Procefs der doppelten Erzeugung für elliptische Functionen hervorgehen, kann ich hier nur einige von sehr allgemeiner Form herausheben und mufs es einer spätern Gelegenheit überlassen, einige Ordnung in diese Masse zu bringen; denn die Fruchtbarkeit dieses Gegenstandes ist so grofs, dafs die eigentliche Schwierigkeit hier in einer zweckmäfsigen Beschränkung besteht.

Da die aus $\frac{1}{x}$ durch doppelte Erzeugung hervorgehende Doppelreihe bei jeder Veränderung des Arrangements der Glieder nur um eine ganze Function ersten Grades von x wachsen kann, so wird die aus dem Aggregate

$$\frac{a}{x}+\frac{a'}{x'}+\frac{a''}{x''}+\text{etc.}$$

entspringende Doppelreihe *) gänzlich unabhängig von der Anordnung der Glieder sein, wenn man die Constanten und die Variabeln den Bedingungen

$$a+a'+a''+\ldots. = 0 \quad \text{und} \quad ax+a'x'+a''x''+\ldots. = 0$$

unterwirft **). Multiplicirt man daher die beiden Ausdrücke

$$\left\{\frac{a}{x}+\frac{a'}{x'}+\frac{a''}{x''}\ldots.\right\}\left\{\frac{b}{y}+\frac{b'}{y'}+\frac{b''}{y''}+\ldots.\right\}$$

und zerfällt jeden Term des Products nach der Formel

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x+y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

so ist es erlaubt, auf die hieraus hervorgehende algebraische Relation das Princip der doppelten Erzeugung anzuwenden, sobald aufser den obigen beiden Bedingungen auch die beiden folgenden analogen

$$b+b'+b''+\ldots. = 0, \quad by+b'y'+b''y''+\ldots. = 0$$

erfüllt sind. Der Algorithmus, zu welchem dieses Princip führt, ist, wie ich glaube, durch das Obige hinlänglich klar geworden, und ich brauche daher wohl nur das Resultat hinzuschreiben; dasselbe ist

$$\begin{aligned}\{a(1,x)+a'(1,x')+a''(1,x'')+\ldots.\}\{b(1,y)+b'(1,y')+b''(1,y'')+\ldots.\}\\ = \underset{\mu,\nu}{S}\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(1,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(1,x^{(\mu)})+(1,y^{(\nu)})]\}\\ +\Sigma\underset{\mu,\nu}{S}\left\{\frac{2\delta\pi i}{\alpha}a^{(\mu)}b^{(\nu)}.\frac{n}{x^{(\mu)}+y^{(\nu)}+\alpha m+\beta n}\right\},\end{aligned}$$

---

*) Wenn man nämlich $x \backsim x+w$, $x' \backsim x'+w$, $x'' \backsim x''+w$, etc. setzt und die doppelte Summation über alle Werthe von w ausführt.

**) Wie auch aus der Form des allgemeinen Gliedes nach den Principien von §. 1. und §. 3. mit Strenge hervorgeht; denn entwickelt man das allgemeine Glied nach fallenden Potenzen von w, so fehlen die Terme $\frac{1}{w}$ und $\frac{1}{w^2}$.

wo das Summenzeichen S sich auf alle Combinationen von μ und ν bezieht. Übrigens läfst sich der zweite Theil rechts, wenn durch φ dieselbe Function wie im vorhergehenden Paragraphen bezeichnet wird, auch wie folgt schreiben:

$$\underset{\mu,\nu}{S}\left\{\frac{2\delta\pi i}{\alpha}a^{(\mu)}b^{(\nu)}.\frac{\partial \log\varphi(x^{(\mu)}+y^{(\nu)})}{\partial\beta}\right\}.$$

Ebenso kann man auch von Aggregaten von der Form

$$\frac{a}{x^2}+\frac{a'}{x'^2}+\frac{a''}{x''^2}+\text{etc.}$$

ausgehen, für welche die einzige Bedingung $a+a'+a''+\ldots.=0$ erfüllt sein mufs, damit die aus ihnen entspringenden Doppelsummen von der Anordnung der Glieder unabhängig seien, und man gelangt durch die identische Relation

$$\frac{1}{x^2y^2}=\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

und durch den Procefs der doppelten Erzeugung zu der neuen Formel:

$$\begin{aligned} S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(2,x^{(\mu)})(2,y^{(\nu)})\} = & \; S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(2,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(2,x^{(\mu)})+(2,y^{(\nu)})]\} \\ & +2S\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}(3,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})[(1,x^{(\mu)})+(1,y^{(\nu)})]\} \\ & -\frac{2\delta\pi i}{\alpha}S\left\{a^{(\mu)}b^{(\nu)}\frac{\partial(2,x^{(\mu)}+y^{(\nu)})}{\partial\beta}\right\}. \end{aligned}$$

Viel allgemeinere transcendente Formeln, und welche die eben abgeleiteten als specielle Fälle umfassen, erhält man, wenn man von irgend einer rationalen Function $F(w)$ von w ausgeht (welche aufser w beliebig viele andere Gröfsen enthalten kann), in der der Grad des Nenners den des Zählers um mindestens 3 Einheiten übertrifft, und welche daher, nach fallenden Potenzen von w entwickelt, erst mit dem Term $\frac{1}{w^3}$ anfängt. Unter der letzteren Voraussetzung wird $\Sigma F(w)$, welches sich über alle Werthe von w erstreckt, von der Anordnung der Glieder unabhängig sein, und diese Summe wird sich, wenn man $F(w)$ in Partialbrüche zerfället, durch lauter Functionen von der Form (g, x) ausdrücken lassen, in denen g sowohl als x verschiedene Werthe erhalten. Sind nun F_1 und F_2 zwei solche rationale Functionen, welche der eben festgestellten Bedingung Genüge leisten, setzt man in der einen $w \backsim w_1$, in der andern $w \backsim w_2$ und bildet das Product $F_1(w_1)F_2(w_2)$, so ist die vierfache Summe $\Sigma F_1(w_1)F_2(w_2)$, welche in das Product der beiden Doppelsummen $\Sigma F_1(w_1)$ und $\Sigma F_2(w_2)$ zerfällt und daher vollständig durch elliptische Functionen ausgedrückt werden kann, unabhängig von der Anordnung der Glieder, und man darf daher in derselben neue Indices statt der ursprünglichen einführen. Wenn man F_1 und F_2 in Partialbrüche zerfället und die beiden Zerfällungen in einander multiplicirt, so werden alle Terme des Products von der Form

$$\frac{1}{(x_1+w_1)^{g_1}}\cdot\frac{1}{(x_2+w_2)^{g_2}}$$

sein, und dieses letztere Product in Partialbrüche zerfället, liefert wiederum lauter Terme von den Formen

$$(a.)\quad \frac{1}{(y+w_1+w_2)^h}\cdot\frac{1}{(z+w_1)^k}\quad \text{oder}\quad (b.)\quad \frac{1}{(y+w_1+w_2)^h}\cdot\frac{1}{(z-w_2)^k}.$$

Setzt man nun $w_1+w_2=w$, indem man w_2 in der Form $w-w_1$ schreibt, so giebt die Form $(a.)$, nach w_1 summirt, unmittelbar $\frac{(k,z)}{(y+w)^h}$, und die Form $(b.)$ nach w_1 summirt $\frac{(k,z-w)}{(y+w)^h}$. Nun ist, wegen der Periodicität $(k,z-w)=(k,z)$, wenn $k>1$, und wenn $k=1$, so tritt das Glied $-\delta\frac{2n\pi i}{\alpha}=-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$ hinzu; die noch auszuführende Summation nach w giebt daher für die Form $(a.)$ $(k,z)(h,y)$ und für die Form $(b.)$ entweder $(k,z)(h,y)$ oder $(k,z)(h,y)$ $+\frac{2\delta\pi i}{(h-1)\alpha}\cdot\frac{\partial(h-1,y)}{\partial\beta}$, je nachdem $k>1$ oder $k=1$ ist; wenn aufser $k=1$ auch $h=1$ ist, so erhält man als allgemeines Glied der für die Form $(b.)$ zu $(k,z)(h,y)$ noch hinzutretenden Reihe $-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log(y+w)}{\partial\beta}$ und man mufs alle Glieder dieser Form vereinigen, um eine convergente Reihe zu erhalten. Auf diese Weise findet man also für dieselbe vierfache Summe von sehr allgemeiner Form einen doppelten Ausdruck durch elliptische Functionen. Will man übrigens die Differentialquotienten der elliptischen Functionen nach β vermeiden, so mufs man von solchen algebraischen Relationen ausgehen, in welchen alle $k>1$ sind. Noch allgemeinere Formeln erhält man, wenn man mehr als zwei rationale Functionen von der Form F, welche sich der Reihe nach und resp. auf w_1, w_2, w_3, u. s. w. beziehen, mit einander multiplicirt und auf ähnliche Art, wie bei dem Producte zweier verfährt. Es ist nicht schwer, nach Dem was hier und schon im vorigen Paragraphen gesagt wurde, auch solche Formeln aufzustellen, welche ihre Geltung behalten, man mag die darin vorkommenden Functionen elliptische, Kreis- oder algebraische Functionen bedeuten lassen.

Man kann versichern, dafs durch Anwendung der hier auseinandergesetzten Principien und durch rein algebraische Verbindung der Formeln, so wie durch Einsetzung specieller Werthe für die vorkommenden Gröfsen, die

Additionstheoreme der drei Gattungen, so wie eine Menge der wichtigsten Fundamentalgleichungen für elliptische Functionen abgeleitet werden können; aber da ich zu andern Untersuchungen übergehen mufs, so sehe ich mich genöthigt, die Ausführung dieses reichhaltigen Gegenstandes auf eine spätere Gelegenheit zu verschieben. Ich bemerke nur noch, dafs ein wichtiges Hülfsmittel zur Ableitung neuer Formeln aus den schon gefundenen darin besteht, dafs man einen der vorkommenden Variabeln unendlich klein setzt und auf beiden Seiten nach dessen steigenden Potenzen entwickelt, um die Coëfficienten derselben Potenzen einander gleich zu setzen. Auch mache ich noch auf den wichtigen Umstand aufmerksam, dafs die Reihe für $(1, x)$ nur einen constanten Zuwachs erhält und die für $(2, x)$ sich gar nicht ändert, wenn man in $w = \alpha m + \beta n$ blofs die Werthe von m unter einander und blofs die Werthe von n unter einander permutirt, ohne jedoch die Werthe von m mit denen von n irgend wie zu verwechseln; hierdurch wird es möglich, bei den obigen Betrachtungen auch solche rationale Functionen einzuführen, bei welchen der Grad des Nenners den des Zählers nur um 2 Einheiten übertrifft.

6.

Es scheint hier der passende Ort zur Behandlung desjenigen Problems zu sein, welches am Schlusse von §. 3. in Anregung gebracht worden ist. Wenn man auch nicht durch die beiden Formen $\lambda m' + \mu n'$ und $\nu m' + \varrho n'$ alle Combinationen von zwei ganzen Zahlen m, n darstellen kann, sobald die Determinante $\lambda\varrho - \mu\nu = \varepsilon$ von ± 1 verschieden ist, so kann man dies doch durch den Complex von ε ($\pm\varepsilon$ je nachdem ε positiv oder negativ) Systemen von der Form $\lambda m' + \mu n' + \sigma$, $\nu m' + \varrho n' + \tau$ erreichen, welche sich unter einander durch verschiedene Combinationen σ, τ unterscheiden und in deren jedem m' und n' alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen. Für σ müssen nach und nach alle Glieder eines vollständigen Restensystems mod. ϑ gesetzt werden, wenn ϑ der gröfste positive gemeinschaftliche Theiler der beiden ganzen Coëfficienten λ und μ ist, und für τ alle Glieder eines vollständigen Restensystems mod. $\frac{\pm\varepsilon}{\vartheta} = \vartheta'$, wo ϑ' so wie ϑ positiv ist. In der That stellt $\lambda m' + \mu n'$ alle ganzen Zahlen dar, welche durch ϑ theilbar sind, aber nur diese, und da jede ganze Zahl einem und nur einem Gliede eines vollständigen Restensystems mod. ϑ congruent ist, so wird die Gesammtheit der Ausdrücke $\lambda m' + \mu n' + \sigma$, wenn σ nach und nach alle Glieder eines solchen Restensystems durchläuft, wirklich alle ganzen Zahlen ohne Ausnahme darstellen; auch ist jede nur durch einen dieser ϑ Ausdrücke darstellbar. Es sei m eine *gegebene* Zahl und man setze $m = \lambda m' + \mu m' + \sigma$; es sei ferner m'_0 und n'_0 irgend ein System von ganzen Werthen von m' und n', welches dieser Gleichung genügt; dann sind alle derselben genügenden Systeme durch die Formeln

$$m' = m'_0 - k\frac{\mu}{\vartheta}, \qquad n' = n'_0 + k\frac{\lambda}{\vartheta}$$

gegeben, wo k alle ganzen Werthe haben kann. Der *Ausdruck* $\nu m' + \varrho n' + \tau$ wird durch Substitution dieser Werthe

$$\nu m'_0 + \varrho n'_0 + k\frac{\lambda\varrho - \mu\nu}{\vartheta} + \tau = \nu m'_0 + \varrho n'_0 + k\vartheta' + \tau,$$

und es ist klar, dafs immer ein und nur ein Werth von τ aus einem vollständigen Restensysteme mod. ϑ' und dann immer ein und nur ein zugehöriger ganzer Werth von k existirt, für welchen dieser Ausdruck irgend einer ganzen Zahl n gleich wird, während m unverändert bleibt. Zugleich sieht man, dafs, um zu jedem m alle ganzen Werthe von n zu erschöpfen, τ wirklich *alle* Glieder des vollständigen Restensystems mod. $\vartheta' = \frac{\pm\varepsilon}{\vartheta}$ durchlaufen mufs. Es ist somit bewiesen, dafs die beiden Ausdrücke

$$m = \lambda m' + \mu n' + \sigma \quad \text{und} \quad n = \nu m' + \varrho n' + \tau$$

wirklich alle Combinationen von zwei ganzen Zahlen m, n und jede Combination nur einmal darstellen, wenn man in ihnen σ und τ unabhängig von einander, ersteres ein vollständiges Restensystem mod. ϑ, letzteres ein vollständiges Restensystem mod. ϑ', und m' und n', ebenfalls unabhängig von einander und unabhängig von σ und τ, alle ganzen Werthe von $-\infty$ bis ∞ durchlaufen läfst; und man kann diese Substitution für m und n als eine Eintheilung aller Combinationen m, n in eine Anzahl $\vartheta\vartheta' = \pm\varepsilon$ Partialgruppen betrachten, welche sich unter einander durch die Werthe von σ und τ unterscheiden, in deren jeder aber σ und τ einen stehenden Werth haben, während m' und n' alle ganzen Werthe durchlaufen.

Führt man wirklich die hiernach satthafte Transformation der Indices

$$m \backsim \lambda m + \mu n + \sigma, \qquad n \backsim \nu m + \varrho n + \tau$$

in die Reihen (g, γ) und in das unendliche Doppelproduct $f(x, y)$ ein, so erhält man

$$\alpha m + \beta n + \gamma \backsim \alpha' m + \beta' n + \gamma', \quad \text{wo}$$

$$\alpha' = \lambda\alpha + \nu\beta, \quad \beta' = \mu\alpha + \varrho\beta \quad \text{und} \quad \gamma' = \gamma + \sigma\alpha + \tau\beta,$$

und wenn man daher jedesmal alle Glieder, für welche σ und τ denselben Werth behalten, zu einer Partialreihe oder einem Partialproducte zusammenfafst, so erhält man nach den Principien in §. 3. die folgenden Transformationsformeln:

$$(A.)\qquad S(g,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = (g,\gamma)+\nabla(g,\gamma),$$
$$(B.)\qquad Pf'(x,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta) = e^{-\nabla(1,\gamma)x-\frac{1}{2}\nabla(2,\gamma)x^2}f(x,\gamma),$$

wo die durch lateinische Lettern ausgedrückten Summen- und Productenzeichen S und P eine endliche Summe, resp. ein endliches Product von ε *) Termen bezeichnen, und sich über alle ε Combinationen σ, τ erstrecken; durch $(g,\gamma)'$ und f' wird ferner angezeigt, was aus (g,γ) resp. f wird, wenn man $\alpha \backsim \alpha'$, $\beta \backsim \beta'$ setzt, und alles Übrige ungeändert läfst. Ich werde sagen, dafs diese Transformationsformeln dem linearen Systeme $\begin{pmatrix}\lambda, \mu\\ \nu, \varrho\end{pmatrix}$ und der Determinante ε zugordnet seien.

Da σ irgend ein beliebiges Restensystem mod. ϑ, und τ irgend ein beliebiges Restensystem mod. ϑ' durchlaufen kann, so will ich, ehe ich zu der Bestimmung von ∇ übergehe, zuvor die Modificationen untersuchen, welche die endliche Summe auf der linken Seite von (A.) erleidet, wenn man von einem Restensysteme sowohl mod. ϑ als mod. ϑ' zu andern übergeht. Wenn $g=1$ ist, so erlangt jene Summe durch diesen Übergang einen constanten, von γ unabhängigen Zuwachs und bleibt folglich für gröfsere Werthe von g ungeändert. In der That seien σ_1 und σ_2 die allgemeinen Glieder zweier verschiedenen Restensysteme (mod. ϑ) und τ_1, τ_2 die allgemeinen Glieder zweier verschiedenen Restensysteme (mod. ϑ'); es werden sich demnach die Zahlen σ_1 mit denen σ_2 und die Zahlen τ_1 mit denen τ_2 zu zweien zusammenstellen lassen, deren Differenz durch ϑ resp. ϑ' theilbar ist. Betrachtet man einerseits die Reihe der ε Gröfsen $\sigma_1\alpha+\tau_1\beta$, andrerseits die Reihe der ε Gröfsen $\sigma_2\alpha+\tau_2\beta$, so behaupte ich, dafs jedes Glied in der einen Reihe eines und nur eines in der andern findet, welches sich von ihm um einen Ausdruck von der Form $k\alpha'+l\beta'$ unterscheidet, wo k und l ganze Zahlen sind; denn sobald wirklich

$$(c.)\qquad \sigma_2\alpha+\tau_2\beta-(\sigma_1\alpha+\tau_1\beta) = k\alpha'+l\beta' = (\lambda k+\mu l)\alpha+(\nu k+\varrho l)\beta$$

werden soll, so hat man nur $\sigma_2-\sigma_1=\lambda k+\mu l$, $\tau_2-\tau_1=\nu k+\varrho l$ zu setzen; die Möglichkeit dieser beiden Gleichungen ist schon oben untersucht; es mufs

*) Es sei hier ein für allemal bemerkt, dafs, wenn der Kürze wegen eine negative Zahl als Anzahl eingeführt wird, stets ihr absoluter Werth zu verstehen ist.

zunächst $\sigma_2 \equiv \sigma_1 \pmod{\vartheta}$ sein, und unter den unendlich vielen Paaren k, l, welche unter dieser Voraussetzung der ersten Gleichung genügen, findet sich eins, welches auch die zweite erfüllt, wenn man nur $\tau_2 - \tau_1$ durch eine passende Congruenz mod. ϑ' bestimmt. Nach §. 3. ist nun jedesmal, so oft die Gleichung (*c.*) erfüllt ist, auch

$$(d.) \quad (1, \gamma + \sigma_2\alpha + \tau_2\beta)' - (1, \gamma + \sigma_1\alpha + \tau_1\beta)' = \delta' \frac{2l\pi i}{\alpha'};$$

d. h. diese Differenz wird gefunden, wenn man die Differenz zwischen $\sigma_2\alpha + \tau_2\beta$ und $\sigma_1\alpha + \tau_1\beta$ auf die Form $k\alpha' + l\beta'$ bringt und $\frac{2\delta'\pi i}{\alpha'}$ mit dem Coëfficienten von β' in jener Form multiplicirt. Die Differenz zwischen den beiden Summen

$$(e.) \quad S(1, \gamma + \sigma_2\alpha + \tau_2\beta)' - S(1, \gamma + \sigma_1\alpha + \tau_1\beta)' = D,$$

wird folglich gefunden, wenn man von der Summe aller ε Ausdrücke von der Form $\sigma_2\alpha + \tau_2\beta$ die Summe aller ε Ausdrücke von der Form $\sigma_1\alpha + \tau_1\beta$ abzieht, die Differenz auf die Form $K\alpha' + L\beta'$ bringt, wo K die Summe aller k und L die Summe aller l in (*c.*) ist, und dann $D = \delta' \frac{2L\pi i}{\alpha'}$ setzt. Nun ist $S\{(\sigma_2 - \sigma_1)\alpha + (\tau_2 - \tau_1)\beta\} = \vartheta' \Sigma(\sigma_2 - \sigma_1) \cdot \alpha + \vartheta \Sigma(\tau_2 - \tau_1) \cdot \beta$; denn wenn man in einem Ausdrucke wie $\sigma\alpha + \tau\beta$ jeden Werth von σ mit jedem Werthe von τ combinirt, so erhält man zunächst für jeden stehenden Werth von τ, durch Addition über alle Werthe von σ, deren Anzahl $= \vartheta$ ist, $\Sigma\sigma \cdot \alpha + \vartheta\tau \cdot \beta$ und hieraus, wiederum durch Addition über alle τ, deren Anzahl ϑ' ist, $\vartheta' \Sigma\sigma \cdot \alpha + \vartheta \Sigma\tau \cdot \beta$. Da nun ferner $\varepsilon\alpha = \varrho\alpha' - \nu\beta'$, $\varepsilon\beta = -\mu\alpha' + \lambda\beta'$ ist, und der eben gefundene Ausdruck deshalb und wegen $\vartheta\vartheta' = \pm\varepsilon$ auf die Form

$$\pm\left\{\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta} \cdot \varepsilon\alpha + \frac{\Sigma\tau}{\vartheta'} \cdot \varepsilon\beta\right\} = \pm\left\{\left(\varrho\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta} - \mu\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\alpha' + \left(-\nu\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\beta'\right\}$$

gebracht werden kann, so erhält man endlich

$$K = \pm\left(\varrho\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} - \mu\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right),$$

$$L = \pm\left(-\nu\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right);$$

wo $\pm$ das Vorzeichen von ε ist; und da $\delta' = +\delta$ oder $= -\delta$, je nachdem ε positiv oder negativ ist, so ergiebt sich

$$(f.) \quad D = \delta\left(-\nu\frac{\Sigma(\sigma_2 - \sigma_1)}{\vartheta} + \lambda\frac{\Sigma(\tau_2 - \tau_1)}{\vartheta'}\right) \cdot \frac{2\pi i}{\alpha'}.$$

Hiernach ist die Bestimmung von ∇ in (*A.*) sehr leicht, da man schon weifs, dafs $\nabla(1, \gamma)$ von der linearen Form $a - b\gamma$ ist und dafs dann $\nabla(2, \gamma) = b$

und alle folgenden $\nabla(3,\gamma)$ u. s. w. $=0$ sind. Setzt man in $(A.)$ $g=1$ und überall $\gamma \backsim \gamma+\alpha'$, so bleibt links Alles ungeändert, weil α' *eigentlicher* Modul der Periodicität für die Function $(1,\gamma)'$ ist; rechts erhält $(1,\gamma)$ den Zuwachs $\delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}$, wie zu sehen, wenn man α' in der Form $\lambda\alpha+\nu\beta$ schreibt. Man erhält folglich durch Subtraction der ursprünglichen Formel von der neuen:

$$0 = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha}+\{a-b(\gamma+\alpha')\}-\{a-b\gamma\},$$

mithin

$$(g.)\qquad b = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}.$$

Setzt man ferner $\gamma \backsim -\gamma$ in $(A.)$ für $g=1$, und addirt die hieraus entstehende Formel zu $(A.)$, indem man erwägt, dafs

$$(1,-\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = -(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta) \quad\text{und}\quad (1,-\gamma) = -(1,\gamma)$$

ist, so erhält man

$$S(1,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-S(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)' = a-b\gamma+a+b\gamma = 2a.$$

Da nun $-\sigma$ eben so wohl ein vollständiges Restensystem (mod. ϑ) wie σ, und $-\tau$ eben so ein vollständiges Restensystem (mod. ϑ') wie τ repräsentirt, so ist die so eben hingeschriebene Differenz $S-S$ von der Form D, und man erhält folglich nach $(f.)$

$$(h.)\qquad a = \delta\left(-\nu\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}+\lambda\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}\right)\cdot\frac{2\pi i}{\alpha'}.$$

Wenn ε ungerade ist, kann man immer die σ und die τ auf unendlich viele Arten so annehmen, dafs $\Sigma\sigma=0$, $\Sigma\tau=0$, also auch $a=0$ ist. Übrigens ist klar, dafs $2\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta}$ und $2\frac{\Sigma\tau}{\vartheta'}$ stets ganze Zahlen sein werden.

Ich kann nur noch in aller Kürze folgende Bemerkungen zu dieser Theorie der Transformation hinzufügen. Der Zusammensetzung der linearen Systeme entspricht die Zusammensetzung der Transformationen, welche ihnen zugeordnet sind; alle zur Determinante ε gehörigen unendlich vielen linearen Systeme lassen sich aus einer endlichen Anzahl reducirter Systeme von der Form

$$\begin{pmatrix}\vartheta, & 0\\ \xi, & \pm\vartheta'\end{pmatrix},$$

wo ξ jede ganze Zahl $\geqq 0$ und $<\vartheta'$ sein kann, durch Zusammensetzung der letztern mit Systemen, deren Determinante $=1$ ist, ableiten; die Anzahl der reducirten Systeme ist gleich der Factorensumme der Zahl ε; eben so grofs ist die Anzahl der wesentlich verschiedenen Transformationen für die Determinante ε, d. h. derjenigen, welche nicht aus einander durch Transformationen abgeleitet werden können, welche zur Determinante 1 gehören. Ist die Determinante ε ein Quadrat, so tritt das System

$$\begin{pmatrix}\sqrt{\varepsilon}, & 0\\ 0, & \sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix}$$

als das einfachste vor den andern heraus und liefert die Multiplication. Kehrt man irgend ein lineares System $\begin{pmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{pmatrix}$ um, und multiplicirt alle Coëfficienten des umgekehrten Systems mit ε, so erhält man $\begin{pmatrix}\varrho, & -\nu\\ -\mu, & \lambda\end{pmatrix}$, und setzt man dieses und das ursprüngliche zusammen, so erhält man das System $\begin{pmatrix}\varepsilon, & 0\\ 0, & \varepsilon\end{pmatrix}$. Auf diese Weise erklärt sich die Zusamensetzung der Multiplication aus zwei reciproken Transformationen, welche ***Jacobi*** besonders hervorgehoben hat. Man kann solche Systeme, welche durch Zusammensetzung mit Systemen mit der Determinante 1 (Einheiten unter den Systemen) aus einander hervorgehen, äquivalente Systeme nennen. Setzt man ***dieselben*** Systeme in ***verschiedener*** Ordnung zusammen und gestattet sich dabei, für jedes System beliebig ein ihm äquivalentes zu setzen, so entspringen Systeme, welche zwar verschieden sind, aber stets einander äquivalent gemacht werden können; und die ihnen zugeordneten Transformationen sind nicht wesentlich von einander verschieden.

Auch hier, bei der allgemeinen Transformation, ist der Fall von besonderem Interesse, welchen ich schon in §. 3. für $\varepsilon = \pm 1$ betrachtet habe, wenn nämlich die Proportion $\alpha:\beta = \alpha':\beta'$ Statt findet. Dieser Fall liefert diejenigen Transformationen, welche man die Scale der ***complexen*** Multiplicationen nennen kann; man findet hier für ω und ϖ dieselben quadratischen Gleichungen, wie in §. 3., nur kann hier ϖ desto mehr Werthe haben, je gröfser ε ist. Da, wenn man die dortige Bezeichnung beibehält,

$$\varDelta = (\lambda + \varrho)^2 - 4\varepsilon$$

negativ sein mufs, so mufs ε nothwendig positiv sein und $\lambda + \varrho$ kann dann alle positiven und negativen Werthe erhalten, welche, abgesehen vom Zeichen, $< 2\sqrt{\varepsilon}$ sind; zu jedem postiven Werthe von ε gehören also eine endliche Anzahl von Werthen von $\varDelta$ und eine endliche Anzahl zugehöriger Werthe von $\varpi = \frac{\lambda + \varrho \pm \sqrt{\varDelta}}{2}$, wo übrigens $\lambda + \varrho \equiv \varDelta$ (mod. 2) ist. Man kann aber auch die Transformationen nach den Werthen von $\varDelta$ ordnen, und zu jedem $\varDelta$ von der Form $4n$ oder $4n+1$ gehören dann unendlich viele in der so eben hingeschriebenen Form enthaltene Werthe von ϖ und unendlich viele Werthe von

$$\varepsilon = \frac{\lambda+\varrho+\sqrt{\varDelta}}{2}\cdot\frac{\lambda+\varrho-\sqrt{\varDelta}}{2} = \varpi\varpi'.$$

Als Beispiel, jedoch aus einem etwas andern Gesichtspuncte betrachtet, werde ich die Werthe $\varDelta=-3$ und $\varDelta=-4$ nehmen.

Wenn man $\alpha=1$ und β einer imaginären dritten oder vierten Wurzel der Einheit gleich setzt, also $\beta=i$ oder $\beta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=r=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, so durchläuft $w=\alpha m+\beta n$ alle ***complexen ganzen*** Zahlen, welche aus dritten und resp. vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind, und man hat diejenigen Functionen, welche am Schlusse von §. 3. besonders hervorgehoben wurden. Es bedeute in der That w die Totalität aller ganzen complexen Zahlen (aus dritten oder vierten Wurzeln der Einheit) und k eine bestimmte ganze complexe Zahl, ferner $\varkappa$ ein vollständiges ***complexes*** Restensystem (mod. k), d. h. eine Reihe von $N(k)=M(k)^2$ ganzen complexen Zahlen, welche unter einander incongruent sind und deren einer und nur einer jede complexe Zahl (mod. k) congruent ist: dann repräsentirt der Ausdruck

$$kw+\varkappa,$$

eben so wohl als w selbst, die Totalität aller ganzen complexen Zahlen, und man kann folglich in den Doppelsummen, so wie in dem unendlichen Doppelproduct, für diesen Fall $w \backsim kw+\varkappa$ setzen; wodurch nach den verschiedenen Werthen von $\varkappa$, die Summen in $N(k)$ Partialsummen und das Product in $N(k)$ Partialproducte zerfallen. Durch die Substitution $w \backsim kw+\varkappa$ wird

$$w+k\gamma \backsim kw+k\gamma+\varkappa = k\left(w+\gamma+\frac{\varkappa}{k}\right), \quad (w+k\gamma)^g \backsim k^g\left(w+\gamma+\frac{\varkappa}{k}\right)^g,$$

$$1-\frac{kx}{w+k\gamma} \backsim 1-\frac{x}{w+\gamma+\frac{\varkappa}{k}}, \quad \text{folglich}$$

$$(g, k\gamma) \backsim \frac{1}{k^g}\mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa}\left(g, \gamma+\frac{\varkappa}{k}\right), \qquad f(kx, k\gamma) \backsim \mathop{\boldsymbol{P}}_{\varkappa} f\left(x, \gamma+\frac{\varkappa}{k}\right).$$

Es sei hiernach

$$\frac{1}{k}\mathop{\mathrm{S}}_{\varkappa}\left(1, \gamma+\frac{\varkappa}{k}\right) = (1, k\gamma)+a-bk\gamma,$$

und man setze in dieser Gleichung $\gamma \backsim \gamma+1$; die linke Seite bleibt hierbei unverändert, die rechte erhält, da $\delta=-1$ ist*), den Zuwachs $-2h\pi i-bk$,

*) δ hat das entgegengesetzte Zeichen des Coëfficienten von i in $\frac{\beta}{\alpha}$, und dieser Coëfficient ist hier $=1$, wenn es sich um die lemniscatischen, und $=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, wenn es sich

wenn h der Coëfficient von i und resp. von r in k ist; man erhält demnach $kb = -2h\pi i$. Setzt man ferner in der obigen Gleichung $\gamma \backsim -\gamma$, bedenkt dafs allgemein $\left(1, -\gamma+\frac{x}{k}\right) = -\left(1, \gamma-\frac{x}{k}\right)$, $(1, -k\gamma) = -(1, k\gamma)$ ist und dafs jede Zahl aus der Reihe $-x$ eine und nur eine ihr congruente (mod. k) in der Reihe x findet, so erhält man durch Addition der aus der Substitution $\gamma \backsim -\gamma$ entspringenden zu der ursprünglichen Gleichung: $ka = -2H\pi i$, wo H der Coëfficient von i und resp. r in $\frac{\mathrm{S}x}{k}$ ist. Wenn k nicht durch $1+i$ und resp. durch $1-r$ oder 2 theilbar ist, so kann man das Restensystem so annehmen, dafs immer gleichzeitig die vier Glieder $\pm x$, $\pm ix$, resp. die sechs Glieder $\pm x$, $\pm rx$, $\pm r^2 x$ vorkommen; dann ist nicht blofs $H = 0$ und $a = 0$, sondern man hat auch diejenige Darstellung des Restensystems, welche in der Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen von besonderer Wichtigkeit ist. Wenn $k = 1+i$ resp. $= 1-r$ ist, so kann man das Restensystem durch die beiden Werthe $x = 0, 1$ und resp. durch die drei Werthe $x = 0, \pm 1$ darstellen.

Nachdem auf diese Weise ∇ für die hier angewandte Substitution bestimmt ist, erhält man nach den Principien von §. 3.:

$$(C.)\quad \begin{aligned} (1, k\gamma) &= \frac{1}{k}\mathrm{S}\left(1, \gamma+\frac{x}{k}\right) + \frac{2\pi i}{k}\mathfrak{C}\left(\frac{\mathrm{S}x}{k}\right) - 2\pi i\,\mathfrak{C}(k)\cdot\gamma, \\ (2, k\gamma) &= \frac{1}{k^2}\mathrm{S}\left(2, \gamma+\frac{x}{k}\right) + \frac{2\pi i}{k}\mathfrak{C}(k), \\ (g, k\gamma) &= \frac{1}{k^g}\mathrm{S}\left(g, \gamma+\frac{x}{k}\right), \text{ wenn } g > 2 \text{ ist,} \end{aligned}$$

$$(D.)\quad \log f(kx, k\gamma)$$

$$= \mathrm{S}\log f\left(x, \gamma+\frac{x}{k}\right) - \left\{2\pi i\,\mathfrak{C}\left(\frac{\mathrm{S}x}{k}\right) - 2\pi i\,\mathfrak{C}(k)k\gamma\right\}x - \pi i\,\mathfrak{C}(k)kx^2;$$

wo das Zeichen S sich auf alle Werthe von x, die ein vollständiges Restensystem mod. k erschöpfen, erstreckt, und wo der Kürze wegen durch $\mathfrak{C}$ der Coëfficient von i und resp. von r in einer ganzen complexen Zahl aus vierten und resp. aus dritten Wurzeln der Einheit angedeutet wird, so dafs z. B.

$$\mathfrak{C}(2+3i) = 3,\quad \mathfrak{C}(4+5r) = 5,\quad \mathfrak{C}(i) = 1,\quad \mathfrak{C}(-i) = -1,\quad \mathfrak{C}(r) = 1,$$
$$\mathfrak{C}(r^2) = \mathfrak{C}(-1-r) = -1 \text{ ist.}$$

---

um die mit den dritten Wurzeln der Einheit zusammenhangenden Functionen handelt, ist also in beiden Fällen positiv; hätte man $w = m - ni$ oder $w = m - nr$, $w = m + nr^2$ gesetzt, so würde $\delta = +1$ sein.

Noch will ich die Multiplicationsformeln, welche sich auf den complexen Multiplicator k beziehen, für die am Schlusse von §. 4. eingeführte Function $\varphi(x) = \{-\gamma f(x,\gamma)\}_{\gamma=0}$ aufstellen. In dieser Function ist ebenfalls entweder $\alpha = 1$, $\beta = i$, oder $\alpha = 1$, $\beta = r = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ zu setzen. Ich werde diese Untersuchung mit einiger Ausführlichkeit anstellen, da auf ihr die im folgenden Paragraphen zu machenden arithmetischen Anwendungen beruhen. Nach (*D.*) hat man

$$(\alpha.)\qquad f(kx, k\gamma) = e^{T}\,\mathbf{P} f\left(x, \gamma + \frac{\varkappa}{k}\right),$$

$$\text{wo}\quad T = -2\pi i\left\{\mathfrak{C}\left(\frac{\mathrm{S}\varkappa}{k}\right) - \mathfrak{C}(k)\cdot k\gamma\right\}x - \pi i\,\mathfrak{C}(k)\cdot kx^2.$$

Giebt man in dieser Formel (α.) $\varkappa$ aufser seinen übrigen $N(k)-1$ Werthen, deren Inbegriff durch $\varkappa'$ bezeichnet wird, auch den Werth Null, zieht aus dem Producte rechts den Factor $f(x,\gamma)$ heraus, multiplicirt die Formel auf beiden Seiten mit $-k\gamma$ und setzt dann $\gamma = 0$ (wobei zu bemerken, dafs $-k\gamma f(kx, k\gamma)$ in $\varphi(kx)$ und $-\gamma f(x,\gamma)$ in $\varphi(x)$ übergeht), so erhält man

$$(\beta.)\qquad \varphi(kx) = e^{T_0}\cdot k\,\varphi(x)\,\mathbf{P} f\left(x, \frac{\varkappa'}{k}\right).$$

Nun ist $f\left(x, \frac{\varkappa'}{k}\right) = \dfrac{\varphi\left(x - \frac{\varkappa'}{k}\right)}{\varphi\left(\frac{-\varkappa'}{k}\right)}$, und wenn man noch, was erlaubt ist, $\varkappa' \backsim -\varkappa'$ setzt, so ergiebt sich

$$(\gamma.)\qquad \varphi(kx) = e^{U}\cdot k\,\mathbf{P}\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right) : \mathbf{P}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right);$$

wo $U = 2\pi i\,\mathfrak{C}\left(\frac{\mathrm{S}\varkappa'}{k}\right)x - \pi i\,\mathfrak{C}(k)\cdot kx^2$ ist.

Man nehme irgend eine reelle ganze Zahl t, von der wir zunächst nur voraussetzen, dafs sie nicht durch k oder vielmehr durch $N(k)$ theilbar sein soll; später wird diese reelle ganze Zahl t noch anderen Beschränkungen unterworfen werden. Setzt man in (γ.) $x \backsim tx$ und $\varkappa \backsim t\varkappa$, $\varkappa' \backsim t\varkappa'$, so wird $U \backsim t^2 U$; denn da t reell ist, so ist $\mathfrak{C}\left(\frac{t\mathrm{S}\varkappa'}{k}\right) = t\,\mathfrak{C}\left(\frac{\mathrm{S}\varkappa'}{k}\right)$, und führt man die neue Function $F(x) = \varphi(tx)$ ein, so wird $\varphi(kx) \backsim \varphi(ktx) = F(kx)$, $\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right) \backsim \varphi\left(tx + \frac{t\varkappa}{k}\right) = F\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right)$, $\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right) \backsim \varphi\left(\frac{t\varkappa'}{k}\right) = F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$, folglich erhält man

$$(\delta.)\qquad F(kx) = e^{t^2\cdot U} k\cdot\mathbf{P}F\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right) : \mathbf{P}F\left(\frac{\varkappa'}{k}\right).$$

Es wird sich bald der Nutzen der Einführung der beliebigen reellen ganzen Zahl t zeigen.

Es sei l eine andere complexe ganze Zahl, welche zu k relative Primzahl ist; es sei λ das allgemeine Glied eines vollständigen Restensystems (mod. l), welches die Null enthält, und λ' das allgemeine Glied eines reducirten Restensystems (mod. l), d. h. es repräsentire λ' diejenige Reihe von $N(l)-1$ Zahlen, welche verbleiben, wenn man von den $N(l)$ Zahlen λ die Null ausschliefst. Setzt man in (γ.) $x \backsim x+\frac{\lambda}{l}$ und multiplicirt über die $N(l)$ Werthe von λ, so erhält man

$$P_\lambda \varphi\left(kx+\frac{k\lambda}{l}\right) = e^{SU} k^{N(l)} P_\lambda P_\varkappa \varphi\left(x+\frac{\lambda}{l}+\frac{\varkappa}{k}\right) : \left\{P_{\varkappa'}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)\right\}^{N(l)},$$

wo $SU = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{S\varkappa'}{k}\right) S\left(x+\frac{\lambda}{l}\right) - \pi i \mathfrak{C}(k)\cdot k S\left(x+\frac{\lambda}{l}\right)^2$ ist. Nun ist, wenn man die Formel (γ.) auf die complexe Zahl l anwendet, indem man zugleich $x \backsim kx$ setzt und das Restensystem (mod. l) durch $k\lambda$ repräsentirt:

$$\varphi(klx) = e^{V'} l P_\lambda \varphi\left(kx+\frac{k\lambda}{l}\right) : P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right),$$

$$\text{wo } V' = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{kS\lambda'}{l}\right) kx - \pi i \mathfrak{C}(l)\cdot l k^2 x^2;$$

folglich erhält man durch Substitution

$$\varphi(klx) = e^{V'+SU}\cdot l k^{N(l)} \frac{P_\lambda P_\varkappa \varphi\left(x+\frac{\lambda}{l}+\frac{\varkappa}{k}\right)}{P_{\varkappa'}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^{N(l)}\cdot P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right)}.$$

Vertauscht man hier k und l mit einander, also auch $\varkappa$ und λ mit einander, dividirt die hieraus hervorgehende Formel durch die ursprüngliche und setzt nach geschehener Division x, welches sodann nur noch in der Exponentialgröfse vorkommt, $=0$, so erhält man

$$(\varepsilon.)\qquad e^{SU_0} k^{N(l)-1} P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} P_{\varkappa'}\varphi\left(\frac{l\varkappa'}{k}\right) = e^{SV_0} l^{N(k)-1} P_{\varkappa'}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)^{N(l)} P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right),$$

wo

$$SU_0 = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{S\varkappa}{k}\right) S\left(\frac{\lambda}{l}\right) - \pi i \mathfrak{C}(k) k S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right),$$

$$SV_0 = 2\pi i \mathfrak{C}\left(\frac{S\lambda}{l}\right) S\left(\frac{\varkappa}{k}\right) - \pi i \mathfrak{C}(l) l S\left(\frac{\varkappa^2}{k^2}\right) \text{ ist.}$$

Für die Anwendungen, welche ich im Auge habe, reicht es hin, in der Theorie der complexen Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit für k eine nicht durch $1+i$, und in der Theorie der complexen Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit, für k eine weder durch $1-r$, noch durch 2 theilbare Zahl anzunehmen; in diesem Falle kann man das Restensystem x', wie schon bemerkt, so annehmen, dafs es in vier, resp. sechs Theile zerfällt, welche aus einander durch Multiplication mit complexen Einheiten entstehen, d. h. dafs die Reihen, deren allgemeine Glieder $\pm x$, $\pm ix$, resp. $\pm x$, $\pm rx$, $\pm r^2 x$ sind, mit der Reihe zusammenfallen, deren allgemeines Glied x ist. Unter dieser Voraussetzung wird $\mathrm{S}x = 0$ und $\mathrm{S}x^2 = 0$, und dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke $\mathrm{S}U_0$ und $\mathrm{S}V_0$, indem $\mathrm{S}U_0 = -\pi i \mathfrak{C}(k) k \mathrm{S}\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)$ und $\mathrm{S}V_0 = 0$ wird. Setzt man jetzt, um die Function F in (ε.) einzuführen, $x \backsim tx$, so wird $\varphi\left(\frac{x'}{k}\right) \backsim F\left(\frac{x'}{k}\right)$, $\varphi\left(\frac{lx'}{k}\right) \backsim F\left(\frac{lx'}{k}\right)$, also erhält man

$$(\varepsilon'.)\qquad e^{\mathrm{S}U_0} k^{N(l)-1} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} P_{x'} F\left(\frac{lx'}{k}\right) = l^{N(k)-1} P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right)^{N(l)} P_{\lambda'} \varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right).$$

Dem Producte $P_{x'} F\left(\frac{lx'}{k}\right)$ mufs man eine einfachere Form geben. Es sei t *gerade*. Diese Annahme hindert nicht, nach dem was wir über die complexe Zahl k festgesetzt haben, dafs t zu k relative Primzahl sei. lx' durchläuft ebenso wie x' ein reducirtes Restensystem (mod. k) und jede Zahl in der Reihe, deren allgemeines Glied lx' ist, findet ihre congruente in der Reihe, deren allgemeines Glied x' ist; jenes Product läfst sich daher sehr einfach auf das Product $P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right)$ zurückführen. Nach (XI.) in §. 4. hat man allgemein

$$\varphi(x+g\alpha+h\beta) = (-1)^{g+h} e^{\delta\frac{h^2\beta+2hx}{\alpha}\pi i}.$$

Wenn daher $\alpha = 1$, $\beta = i$ oder $= r$ und t *gerade* ist, so hat man

$$\varphi(tx+tg+th\beta) = e^{-t^2(h^2\beta+2hx)\pi i}\varphi(tx),$$

also

$$(\zeta.)\qquad F(x+g+h\beta) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(x),$$

wo $\mathfrak{w}$ *von t unabhängig* ist. Hiernach findet sich

$$P_{x'} F\left(\frac{lx'}{k}\right) = e^{\mathfrak{w}t^2} P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right);$$

wo ebenfalls $\mathfrak{w}$ von t unabhängig ist; was wir für die folgenden Anwendungen nur zu wissen brauchen. Der Werth selbst von $\mathfrak{w}$ ist leicht anzugeben; zieht man nämlich von jedem Gliede der Reihe $\frac{lx'}{k}$ das ihm entsprechende der Reihe $\frac{x'}{k}$ ab, welches eine Differenz von der Form $g+h\beta$ giebt, wo g und h reelle ganze Zahlen sind, und bezeichnet durch h das allgemeine Glied der Coëfficienten von β ($=i$ resp. $=r$) in diesen Differenzen, so hat man

$$\mathfrak{w} = -(\mathrm{S}h^2\cdot\beta+2\mathrm{S}h\cdot x)\pi i.$$

Durch $\mathfrak{w}$ werde ich hier immer einen Ausdruck bezeichnen, um dessen Werth wir uns nicht weiter bekümmern, als dafs wir uns überzeugen, er sei von t unabhängig. Hiernach wird aus (ε'.):

$$(\varepsilon''.)\quad e^{\mathrm{S}U_0}e^{\mathfrak{w}t^2}k^{N(l)-1}P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)} = l^{N(k)-1}P_{x'}F\left(\frac{x'}{k}\right)^{N(l)-1}P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right).$$

Endlich kann man diese Formel noch dadurch vereinfachen, dafs man $P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right)$ auf $P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)$ zurückführt. Man bezeichne das allgemeine Glied der Differenzen, welche man erhält, wenn man von jedem Gliede der Reihe $k\lambda'$ das ihm congruente aus der Reihe λ' abzieht, durch $l(g+h\beta)$, so giebt (XI.) §. 4.:

$$P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{k\lambda'}{l}\right) = (-1)^{\mathrm{S}g+\mathrm{S}h}e^{-\left\{\mathrm{S}h^2\beta+2\mathrm{S}\left(\frac{h\lambda'}{l}\right)\right\}\pi i}P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right) = G\cdot P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right),$$

folglich

$$(\eta.)\quad e^{\mathrm{S}U_0}e^{\mathfrak{w}t^2}k^{N(l)-1}P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right)^{N(k)-1} = G\cdot l^{N(k)-1}P_{x'}F\left(\frac{x'}{k}\right)^{N(l)-1}.$$

Um hieraus den Werth des Products $P_{x'}F\left(\frac{x'}{k}\right)$ zu finden, auf welchen Alles ankommt, setze man statt l die speciellen Werthe $1+i$, $1-r$ und 2, letztere Zahl 2 als complexe Primzahl aus dritten Wurzeln der Einheit betrachtet. Wenn $l=1+i$, so hat λ' nur den einen Werth $\lambda'=1$, und da $k\equiv 1$ (mod. $1+i$) ist, so erhält man, wenn $k=a+bi$ gesetzt wird, $g+hi=\frac{a+bi-1}{1+i}$, $g=\frac{a+b-1}{2}$, $h=\frac{b-a+1}{2}$, also $(-1)^{g+h}=(-1)^b$. Der Exponent der Exponentialgröfse in G wird $-\left\{h^2i+2\frac{h}{1+i}\right\}\pi i = -\{h^2i+(1-i)h\}\pi i$; der imaginäre Bestandtheil dieses Exponenten ist $-h\pi i$, und wenn man seinen reellen Theil wegläfst, so läfst man von G einen *reellen und positiven* Factor weg, den ich mit $\mathfrak{p}$ bezeichne. Man erhält folglich

$$G = \mathfrak{p}(-1)^{g+h}e^{-h\pi i} = \mathfrak{p}(-1)^{g+2h} = \mathfrak{p}(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}.$$

Ferner ist

$$\mathrm{S}U_0 = -\pi i\mathfrak{C}(k)k\cdot\frac{1}{2i} = -\frac{\pi}{2}\cdot b(a+bi),$$

und der imaginäre Bestandtheil hiervon ist $-\frac{b^2\pi i}{2}$, also

$$e^{\mathrm{S}U_0} = \mathfrak{p}e^{-\frac{b^2\pi i}{2}} = \mathfrak{p}\cdot(-i)^{b^2}.$$

Nimmt man b gerade an, so wird $b^2 \equiv 0$ (mod. 4), $e^{\mathrm{S}U_0} = \mathfrak{p}$, und setzt man noch $a+b \equiv 1$ (mod. 4), so dafs k primär ist, in dem Sinne von *Gaufs*, so wird auch $G = \mathfrak{p}$, und nach (η.) hat man also für einen primären Werth von k, da $N(l) = 2$ ist:

$$(\vartheta_1.) \qquad P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right) = \mathfrak{p} \cdot e^{\mathfrak{w} t^2} k \varphi \left(\frac{1}{1+i}\right)^{N(k)-1} : (1+i)^{N(k)-1}.$$

Für $l = 1-r$, $N(l) = 3$ hat λ' die beiden Werthe ± 1. Man kann immer annehmen, dafs $k \equiv +1$ (mod. $1-r$); denn eine der beiden Zahlen $\pm k$ genügt sicher dieser Bedingung; dann ist $k\lambda' \equiv \lambda'$ (mod. $1-r$), nämlich $\pm k \equiv \pm 1$ (mod. $1-r$); g und h haben zwei einander entgegengesetzte Werthe, so dafs $\mathrm{S}g = 0$, $\mathrm{S}h = 0$. Der Exponent der in G vorkommenden Exponentialgröfse, welchen ich durch W bezeichnen will, ist

$$W = -\pi i \left\{ \mathrm{S} h^2 r + 2 \mathrm{S} \left(\frac{h\lambda'}{1-r}\right) \right\}.$$

Setzt man $k-1 = (1-r)(g+hr)$, so durchläuft h^2 in der Summe die beiden Werthe h^2, h^2, und $h\lambda'$ die beiden Werthe h, h, weil $\lambda' = +1$, $+h$ und $\lambda' = -1$, $-h$ entspricht. Erlaubt man sich nun, im Exponenten beliebig alle reellen Bestandtheile wegzulassen, so kommt $W = -\pi i \{-h^2 + 2h\}$, weil der reelle Bestandtheil von r, $= -\frac{1}{2}$, der von $\frac{2}{1-r}$, $= 1$ ist und in der Parenthese die imaginären Theile weggelassen werden können. Läfst man auch die ganzen Vielfachen von $2\pi i$ weg, so kommt $W = h^2 \pi i = h\pi i$, also $G = \mathfrak{p}(-1)^h$; und setzt man $k = a+br$, so ist $g+hr = \frac{1}{3}(a-1+br)(1-r^2)$, also $3g = 2a-b-2$, $3h = a+b-1$ und $G = \mathfrak{p}(-1)^{a+b-1}$. Dasselbe findet man, wenn $k \equiv -1$ (mod. $1-r$). Ferner ist $\mathrm{S}U_0 = \frac{2\pi i}{3} b(ar^2+b)$, und der imaginäre Theil hiervon ist $\frac{\pi i}{3} b(2b-a)$, folglich $e^{\mathrm{S}U_0} = \mathfrak{p}(-1)^{ab} r^{b(a+b)}$; vereinigt man ab mit $a+b-1$ in G zu $(a-1)(b-1)$, welches *gerade* ist, da nicht a und b beide gerade sein sollen, so erhält man

$$(\vartheta_2.) \qquad P_{x'} F\left(\frac{x'}{k}\right)^2 = \mathfrak{p}\, e^{\mathfrak{w} t^2} r^{b(a+b)} k^2 P_{\lambda'} \varphi \left(\frac{\lambda'}{1-r}\right)^{N(k)-1} : (1-r)^{N(k)-1}.$$

Wenn endlich $l = 2$ gesetzt wird und die ähnlichen Berechnungen gemacht werden, so erhält man eine Formel zur Bestimmung der dritten Potenz des in (ϑ_2.) zur Linken befindlichen Products, und wenn man diese durch (ϑ_2.) dividirt, so erhält man die erste Potenz jenes Products für den Fall der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten complexen Zahlen.

Diese Untersuchungen gewinnen auf nachstehende Art eine noch grösere Übersichtlichkeit, und man sieht zugleich, dafs zur vollständigen Darstellung der in den folgenden Paragraphen gegebenen Beweise der Reciprocitätsgesetze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen nur eine geringe Zahl von Betrachtungen erforderlich ist.

Wenn $\alpha = 1$, $\beta = i$ oder $= r$, also $\delta = -1$, und w die Totalität aller complexen ganzen Zahlen von der Form $m + n\beta$ darstellt, und wenn ferner k eine ganze complexe Zahl $a + b\beta$, $\varkappa$ ein vollständiges, $\varkappa'$ ein reducirtes complexes Restensystem mod. k ist, so stellt $kw + \varkappa$ ebenfalls die Totalität aller complexen ganzen Zahlen dar und es kann statt w in das unendliche Doppelproduct $f(x, y)$ gesetzt werden, wodurch dasselbe in ein Product von $N(k)$ Doppelproducten $f\left(\frac{x}{k}, \frac{y+\varkappa}{k}\right)$ zerfällt. Die Modification von $\log f(x, y)$ ist $= -\nabla(1, y)x - \frac{1}{2}\nabla(2, y)x^2$; $\nabla(2, y)$ ist gleich dem Coëfficienten von y in $\nabla(1, y)$ mit entgegengesetztem Zeichen genommen, und $\nabla(1, y)$, dessen lineare Form in Bezug auf y man schon kennt, findet sich, wenn man in die Formel $\frac{1}{k}\mathrm{S}\left(1, \frac{y+\varkappa}{k}\right) = (1, y) + \nabla(1, y)$ zuerst $y \backsim y + k$, dann $y \backsim -y$ setzt und die uneigentliche Periodicität von $(1, y)$ berücksichtigt, nach welcher $(1, y + g + h\beta) = (1, y) - 2h\pi i$ ist. Man findet auf diese Weise

$$\nabla(1, y) = \frac{-2\pi i}{k}\left(\mathfrak{S}\,\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right) - \mathfrak{S}(k)y\right), \qquad \nabla(2, y) = \frac{-2\pi i}{k}\mathfrak{S}(k),$$

$$\nabla \log f(x, y) = \frac{2\pi i}{k}\left(\left(\mathfrak{S}\,\mathrm{S}\,\frac{\varkappa}{k} - \mathfrak{S}k \cdot y\right)x + \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}k \cdot x^2\right),$$

$$P_\varkappa f\left(\frac{x}{k}, \frac{y+\varkappa}{k}\right) = e^{\nabla \log f(x, y)} f(x, y), \qquad P_\varkappa f\left(x, y + \frac{\varkappa}{k}\right) = e^{\nabla \log f(kx, ky)} f(kx, ky).$$

Multiplicirt man letztere Gleichung auf beiden Seiten mit $-ky$, stellt die $N(k)$ Zahlen $\varkappa$ aus der Null und den $N(k) - 1$ Zahlen $\varkappa'$ zusammen und setzt zuletzt $y = 0$ und $x \backsim -x$, indem man die aus der Definition der unendlichen Doppelproducte von selbst hervorgehenden Relationen $-yf(x, y) = \varphi(x)$, $f\left(x, \frac{\varkappa'}{k}\right) = \dfrac{\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k} - x\right)}{\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)}$, $-kyf(kx, ky) = \varphi(kx)$, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ berücksichtigt, so ergiebt sich:

$$(1.) \qquad e^{\nabla \log f(-kx, 0)}\varphi(kx) = \frac{kP\varphi\left(x + \frac{\varkappa}{k}\right)}{P\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)};$$

wo $\nabla \log f(-kx, 0) = 2\pi i\left(-\mathfrak{S}\,\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right)x + \frac{1}{2}\mathfrak{S}(k) \cdot kx^2\right)$.

Es sei l eine zweite complexe ganze Zahl, welche mit k keinen gemeinschaftlichen Theiler hat; λ sei ein vollständiges, λ' ein reducirtes Restensystem (mod. l); ferner sei $N(k)=p$, $N(l)=q$, und man setze der Kürze wegen die Producte

$$P_{\varkappa'}\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right) = \psi(k), \qquad P_{\lambda'}\varphi\left(\frac{\lambda'}{l}\right) = \psi(l),$$

$$P_{\lambda}\varphi\left(kx+\frac{k\lambda}{l}\right)=A, \quad P_{\lambda}\varphi\left(kx+\frac{\lambda}{l}\right)=B, \quad P_{\varkappa}P_{\lambda}\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}+\frac{\lambda}{l}\right)=C.$$

Da die Vielfachen $k\lambda'$, wenn man sie durch den mod. l dividirt, ihre Reste, welche sämmtlich verschieden sind, in der Reihe λ' finden, so sei

$$k\lambda' \equiv \lambda_1 \,(\text{mod.}\, l) \quad \text{und} \quad k\lambda' = \lambda_1+(\nu_0+\nu\beta)l,$$

wo λ_1 unter den λ' befindlich ist, und alle λ_1 mit allen λ', wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen. Auf ähnliche Weise sei, da die Vielfachen $l\varkappa'$ (mod. k) ihre Reste unter den $\varkappa'$ haben, und diese Reste die sämmtlichen $\varkappa'$ erschöpfen,

$$l\varkappa' \equiv \varkappa_1 \,(\text{mod.}\, k) \quad \text{und} \quad l\varkappa' = \varkappa_1+(\mu_0+\mu\beta)k;$$

wo alle $\varkappa_1$ mit allen $\varkappa'$, wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen. Da hiernach $\frac{k\lambda'}{l}=\frac{\lambda_1}{l}+\nu_0+\nu\beta$ ist, so folgt aus der uneigentlichen Periodicität der Function φ:

$$\varphi\left(kx+\frac{k\lambda'}{l}\right) = (-1)^{\nu_0+\nu}e^{-2\pi i\left(\frac{1}{2}\nu^2\beta+\frac{\nu\lambda_1}{l}+\nu kx\right)}\varphi\left(kx+\frac{\lambda_1}{l}\right).$$

Setzt man für λ alle seine q Werthe und jedesmal die entsprechenden Werthe von λ_1, ν_0 und ν, so kommt, da alle λ_1 mit allen λ' zusammenfallen:

$$A = e^{2\pi i.V}B, \quad \text{wo} \quad V = \tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu_0+\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu-\tfrac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2\beta-\frac{\mathrm{S}(\nu\lambda_1)}{l}-\mathrm{S}\nu\cdot kx.$$

Aus (1.) erhält man, wenn $x \backsim x+\frac{\lambda}{l}$ gesetzt und über alle Werthe von λ multiplicirt wird:

$$e^{2\pi i.W}.A = \frac{k^q}{\psi(k)^q}C;$$

wo $W=-\mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right)\cdot\mathrm{S}\left(x+\frac{\lambda}{l}\right)+\frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\mathrm{S}\left(x+\frac{\lambda}{l}\right)^2$. Endlich erhält man aus (1.), wenn man $k \backsim l$, also auch $\varkappa \backsim \lambda$, $\varkappa' \backsim \lambda'$, und aufserdem $x \backsim kx$ setzt:

$$e^{2\pi i.Z}\varphi(klx) = \frac{l}{\psi(l)}B, \quad \text{wo} \quad Z=-\mathfrak{C}\mathrm{S}\left(\frac{\lambda}{l}\right)kx+\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(l)lk^2x^2,$$

und aus der Verbindung dieser drei Formeln $A = e^{2\pi i . V} B$, $e^{2\pi i . W} A = \frac{k^q}{\psi(k)^q} C$ und $e^{2\pi i . Z} \varphi(klx) = \frac{l}{\psi(l)} B$ folgt

$$\frac{\varphi(klx)}{C} = \frac{l}{\psi(l)} \cdot \frac{k^q}{\psi(k)^q} e^{2\pi i(-V-W-Z)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung bleibt unverändert, wenn man k mit l vertauscht; dasselbe mufs also auch rechts der Fall sein. Zunächst müssen daher die Coëfficienten von x und x^2 in $-V-W-Z$ bei der Vertauschung von k mit l unverändert bleiben, was sich auch leicht a posteriori verificiren läfst. Setzt man ferner das constante Glied in $-V-W-Z$, welches von rein arithmetischer Form ist, $= [l; k]$, nämlich

$$[l; k] = \mathfrak{E} \mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right) \cdot \mathrm{S}\left(\frac{\lambda}{l}\right) - \tfrac{1}{2} \mathfrak{E}(k) k \mathrm{S}\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right) - \tfrac{1}{2} \mathrm{S} \nu_0 - \tfrac{1}{2} \mathrm{S} \nu + \tfrac{1}{2} \mathrm{S} \nu^2 \beta + \frac{\mathrm{S}(\nu \lambda_1)}{l},$$

und in ähnlicher Weise

$$[k; l] = \mathfrak{E} \mathrm{S}\left(\frac{\lambda}{l}\right) \cdot \mathrm{S}\left(\frac{\varkappa}{k}\right) - \tfrac{1}{2} \mathfrak{E}(l) l \mathrm{S}\left(\frac{\varkappa^2}{k^2}\right) - \tfrac{1}{2} \mathrm{S} \mu_0 - \tfrac{1}{2} \mathrm{S} \mu + \tfrac{1}{2} \mathrm{S} \mu^2 \beta + \frac{\mathrm{S}(\mu \varkappa_1)}{k},$$

so erhält man durch Vertauschung von k mit l, aus obiger Gleichung:

$$\frac{l}{\psi(l)} \cdot \frac{k^q}{\psi(k)^q} e^{2\pi i . [l; k]} = \frac{k}{\psi(k)} \cdot \frac{l^p}{\psi(l)^p} e^{2\pi i . [k; l]}, \quad \text{also}$$

$$(2.) \qquad \frac{k^{q-1}}{\psi(k)^{q-1}} = e^{2\pi i [k; l]} e^{-2\pi i [l; k]} \frac{l^{p-1}}{\psi(l)^{p-1}}.$$

Aus dieser Gleichung läfst sich für unendlich viele Werthe von $q-1$ die $(q-1)$te Potenz von $\frac{k}{\psi(k)}$ finden, wenn man l specielle Werthe giebt; aber da die Darstellung von $\frac{k}{\psi(k)}$ durch Wurzelgröfsen und namentlich durch solche, deren Wurzel-Exponenten durch 2 oder 3 theilbar sind, für die nachfolgende Anwendung gänzlich unbrauchbar ist, so mufs man einen Werth von l suchen, oder solche Werthe von l combiniren, durch welche die Darstellung von $\frac{k}{\psi(k)}$ in rationaler und unzweideutiger Form möglich wird. Wenn $\beta = i$ ist, so ist $l = 1 + i$ ein Werth, für welchen unmittelbar $q - 1 = 1$ wird. Wenn $\beta = r$ ist, so hat man die beiden Werthe $l = 1 - r$ und $l = 2$, für welche $q - 1 = 2$ resp. $q - 1 = 3$ ist, und man erhält die 2te und die 3te Potenz des oft erwähnten Quotienten, und durch deren Combination (Division) die erte Potenz jenes Quotienten.

Die Ausdrücke $[l;k]$ und $[k;l]$ vereinfachen sich für specielle Formen, die sich den Restensystemen geben lassen. Wenn zunächst mit jedem $\varkappa$ auch sein entgegengesetzter Werth $-\varkappa$ in dem Restensysteme (mod. k) vorkommt, so ist $S\varkappa=0$, und da aus $\varkappa \backsim -\varkappa$; $\mu_0 \backsim -\mu_0$, $\mu \backsim -\mu$ folgt, so ist auch $S\mu_0=0$, $S\mu=0$. Wenn ferner für $\beta=r$ immer gleichzeitig $\varkappa$, $r\varkappa$, $r^2\varkappa$ vorkommen, so ist ebenfalls $S\varkappa=0$ und auch $S\varkappa^2=0$; und da unter dieser Voraussetzung immer drei Werthe von $\mu_0+\mu r$, wie $\mu_0+\mu r$, $-\mu+(\mu_0-\mu)r$, $(\mu-\mu_0)-\mu_0 r$, zusammengehören, deren Summe verschwindet, so ist $S\mu_0=0$, $S\mu=0$. Wenn endlich für $\beta=i$ immer gleichzeitig die vier Werthe $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$ von $\varkappa$ vorkommen, so ist $S\varkappa=0$, $S\varkappa^2=0$, $S\mu_0=0$, $S\mu=0$. Nimmt man demnach an, das Restensystem mod. k sei so construirt, dafs für $\beta=i$ immer gleichzeitig die vier associirten Reste $\pm\varkappa$, $\pm i\varkappa$ und für $\beta=r$ immer gleichzeitig die sechs associirten Reste $\pm\varkappa$, $\pm r\varkappa$, $\pm r^2\varkappa$ vorkommen, wenn $\varkappa$ vorkommt, welche Constructionsweise sich beiläufig die Eintheilung des Restensystems in seine vier, resp. sechs *associirten* Theile nennen läfst, so nehmen $[l;k]$ und $[k;l]$ folgende einfachere Form an:

$$[l;k] = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\,S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)-\tfrac{1}{2}S\nu_0-\tfrac{1}{2}S\nu+\tfrac{1}{2}S\nu^2\cdot\beta+\frac{S(\nu\lambda_1)}{l},$$

$$[k;l] = \tfrac{1}{2}S\mu^2\cdot\beta+\frac{S(\mu\varkappa_1)}{k}.$$

Diese Annahme schliefst die Fälle aus, wenn k durch $1+i$, für $\beta=i$, und wenn k durch $1-r$, oder durch 2, für $\beta=r$, theilbar ist. Man bemerke (was für das Folgende von besonderer Wichtigkeit ist), dafs in dieser Form $[k;l] \backsim t^2[k;l]$, wenn $\varkappa \backsim t\varkappa$ gesetzt wird, wo t reell und ganz, und nicht durch p theilbar ist: denn aus $\varkappa \backsim t\varkappa$ folgt $\varkappa_1 \backsim t\varkappa_1$ und, da t reell angenommen wird, $\mu \backsim t\mu$, $\mu^2 \backsim t^2\mu^2$, $\mu\varkappa_1 \backsim t^2\mu\varkappa_1$, also $S\mu^2 \backsim t^2 S\mu^2$ und $S(\mu\varkappa_1) \backsim t^2 S(\mu\varkappa_1)$.

Ich komme zu der übersichtlichen Darstellung der Berechnung von $[1+i;k]$, $[1-r;k]$ und $[2;k]$.

Erstens, für $\beta=i$, $l=1+i$ ist $\lambda'=1$, $\nu_0+\nu i=\frac{k-1}{1+i}$, also wenn $k=a+bi$ gesetzt wird, $\nu_0=\frac{a+b-1}{2}$, $\nu=\frac{b-a+1}{2}$; $-\frac{1}{2}\mathfrak{C}(k)k\,S\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)=$ $-\frac{1}{2}b(a+bi)\cdot\frac{1}{2i}=\frac{1}{4}(-b^2+abi)$, $-\frac{1}{2}S\nu_0-\frac{1}{2}S\nu=-\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}S\nu^2\beta=\frac{1}{8}(b-a+1)^2\cdot i$, $\frac{S(\nu\lambda_1)}{l}=\frac{b-a+1}{2(1+i)}=\frac{1}{4}(b-a+1)-\frac{1}{4}(b-a+1)i$, mithin

$$[1+i;k] = -\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1)+\tfrac{1}{8}i(2ab+(b-a+1)^2-2(b-a+1)).$$

Nun ist $(b-a+1)^2-2(b-a+1)=(b-a)^2-1$, also der Coëfficient von $\frac{1}{8}i$, $=2ab+(b-a)^2-1=a^2+b^2-1=p-1$, folglich

$$[1+i;k]=-\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1)+\tfrac{1}{8}(p-1)i.$$

Zweitens, für $\beta=r$, $l=1-r$ ist $\lambda'=\pm1$, also zunächst $\mathrm{S}\nu_0=0$, $\mathrm{S}\nu=0$, $[1-r;k]=-\frac{1}{2}\mathfrak{E}(k)k\mathrm{S}\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2\cdot r+\frac{\mathrm{S}\nu\lambda_1}{l}$. Nimmt man $k\equiv1\ (\mathrm{mod.}\,1-r)$ an und setzt

$k=a+br$, $\frac{k-1}{1-r}=g+hr=\frac{1}{3}(a-1+br)(1-r^2)=\frac{1}{3}(2a-b-2)+\frac{1}{3}(a+b-1)r$,

so sind $\nu=\pm h$ die beiden Werthe von ν, und $\lambda_1=\lambda'=\pm1$ die entsprechenden Werthe von λ_1. Hiernach ist $\mathrm{S}\lambda^2=2$, $\mathrm{S}\nu^2=2h^2$, $\mathrm{S}(\nu\lambda_1)=2h$, $-\frac{1}{2}\mathrm{S}\left(\frac{\lambda^2}{l^2}\right)$ $=\frac{-1}{(1-r)^2}=\frac{1}{3}r^2$, $\frac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2\cdot r=h^2r$, $\frac{\mathrm{S}\nu\lambda_1}{l}=\frac{2h}{1-r}=\frac{2}{3}h(1-r^2)$, also $[1-r;k]$ $=\frac{1}{3}b(a+br)r^2+h^2r+\frac{2}{3}h(1-r^2)=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{3}h+h^2r+\frac{1}{3}(ab-2h)r^2=$ $\frac{1}{3}(b^2-ab+4h)+(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)r=\frac{1}{3}(b^2-ab+4h)-\frac{1}{2}(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)$ $+\frac{1}{2}(h^2+\frac{2}{3}h-\frac{1}{3}ab)\sqrt{-3}$. Nun ist $h^2+\frac{2}{3}h=\frac{1}{9}\{(3h+1)^2-1\}=\frac{1}{9}\{(a+b)^2-1\}$, also ist der Coëfficient von $\sqrt{-3}$, $\frac{1}{18}\{(a+b)^2-3ab-1\}=\frac{1}{18}\{a^2-ab+b^2-1\}$ $=\frac{1}{18}(p-1)$. Der reelle Theil wird

$$\tfrac{1}{3}(b^2+ab)-\tfrac{1}{2}\{(a+b-1)^2-3ab\}-2ab+h+4h^2,$$

weil $(a+b-1)^2=9h^2$ ist. Es ist aber $(a+b-1)^2-3ab=p-2a-2b+1$ $=p-1-6h$, und $b^2+ab=b(a+b)=b(3h+1)$, also wird der reelle Theil $=\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}(p-1)+bh-2ab+4h+4h^2$. Läfst man die ganze Zahl $bh-2ab+4h+4h^2$ weg, so ändert sich $e^{2\pi i[1-r;k]}$ nicht; man darf daher auch blofs $[1-r;k]=\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}(p-1)+\frac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3}$ setzen. Wenn k nicht durch 2 theilbar ist, so ist auch das Glied $-\frac{1}{2}(p-1)$ eine ganze Zahl und kann ebenfalls weggelassen werden, so dafs blofs $[1-r;k]=\frac{1}{3}b+\frac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3}$ ist. Die vollständigere Formel gilt aber auch für einen geraden Werth von k.

Wenn endlich *drittens* $\beta=r$, $l=2$ gesetzt wird und dem λ' die drei Werthe $1, r, r^2$ gegeben werden, so erhält man $\mathrm{S}\lambda^2=0$, $\mathrm{S}\nu_0=0$, $\mathrm{S}\nu=0$; also ist blofs $[2;k]=\frac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2\cdot r+\frac{1}{2}\mathrm{S}(\nu\lambda_1)$. Es sei $k\equiv1\ (\mathrm{mod.}\,2)$ und $\frac{k-1}{2}=g+hr$, $g=\frac{a-1}{2}$, $h=\frac{1}{2}b$, so erhält man ferner $\lambda_1=\lambda'=1, r, r^2$ und, diesen Werthen entsprechend, $\nu=h, g-h, -g$, also $\frac{1}{2}\mathrm{S}\nu^2=g^2-gh+h^2$, $\mathrm{S}(\nu\lambda_1)=$ $h+(g-h)r-gr^2=g+h+(2g-h)r$, folglich

$$[2;k]=\tfrac{1}{2}(g+h)+\tfrac{1}{2}(2g^2-2gh+2h^2+2g-h)r.$$

Nun ist $g+h=\frac{a+b-1}{2}$, $2g^2+2g=2(g+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}$, $-2gh-h$ $=-(2g+1)h=-\frac{1}{2}ab$, $2h^2=\frac{1}{2}b^2$, also

$$[2;k] = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(a^2-ab+b^2-1)r = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(p-1)r.$$

Die drei eben gefundenen Werthe

$$\begin{aligned}[1+i;k] &= -\tfrac{1}{4}(b^2+b+a-1)+\tfrac{1}{8}(p-1)i,\\ [1-r;k] &= \tfrac{1}{3}b+\tfrac{1}{18}(p-1)\sqrt{-3},\\ [2;k] &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{a+b-1}{2}+\tfrac{1}{4}(p-1)r,\ \text{geben}\end{aligned}$$

$$e^{2\pi i[1+i;k]} = i^{-(b^2+b+a-1)}e^{-\frac{1}{4}\pi(p-1)},$$

$$e^{2\pi i[1-r;k]} = r^b e^{-\frac{1}{9}\pi(p-1)\sqrt{3}},\qquad e^{2\pi i[2;k]} = (-1)^{\frac{1}{2}(a+b-1)}e^{\frac{1}{2}\pi(p-1)ri}.$$

Setzt man wirklich nach und nach die drei so eben betrachteten Werthe von l in die Gleichung (2.), so erhält man

$$(3.)\quad \frac{k}{\psi(k)} = i^{b^2+b+a-1}e^{\frac{1}{4}\pi(p-1)}\left\{\frac{1+i}{\psi(1+i)}\right\}^{p-1}\cdot e^{2\pi i[k;1+i]},\ \text{wenn}\ \beta=i,\ \text{und}$$

$$(4.)\quad \frac{k}{\psi(k)} = (-1)^{\frac{a+b-1}{2}}r^{-b}e^{(-\frac{1}{2}\pi ri-\frac{1}{9}\pi\sqrt{3})(p-1)}\left\{\frac{2\psi(1-r)}{(1-r)\psi(2)}\right\}^{p-1}e^{2\pi i\{[k;2]-[k;1-r]\}},$$

wenn $\beta=r$. Wird dieser Werth von $\frac{k}{\psi(k)}=\frac{k}{P\varphi\left(\frac{x'}{k}\right)}$ in (1.) substituirt, und setzt man, um die Formeln vereinigen zu können, $\varrho=i^{b^2+b+a-1}$, wenn $\beta=i$, $k=a+bi$ ist, und $\varrho=(-1)^{\frac{a+b-1}{2}}r^{-b}$, wenn $\beta=r$, $k=a+br$ ist, und schreibt endlich in (1.) tx statt x und $t\varkappa$ statt $\varkappa$, so erhält man eine Formel von folgender Gestalt:

$$(E.)\quad F(kx)=\varrho c^{p-1}e^{\mathfrak{w}t^2}.P_\varkappa F\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right)=\varrho c^{p-1}e^{\mathfrak{w}t^2}F(x)P_{\varkappa'}F\left(x+\frac{\varkappa'}{k}\right);$$

wo $F(x)=\varphi(tx)$, c eine rein numerische Constante, welche durch (3.) und (4.) und $\mathfrak{w}$ ein von t unabhängiger Werth ist, der durch (3.), (4.) und (1.) vollständig bestimmt ist, während die den beiden Werthen $\beta=i$ und $\beta=r$ entsprechenden Werthe der complexen Einheit ϱ so eben hingeschrieben worden sind.

Die beiden nachstehenden Formeln, welche als specielle Fälle in dem Vorhergehenden enthalten sind, müssen noch, wegen ihrer besondern Wichtigkeit für die Anwendung des folgenden Paragraphen, ausdrücklich hervorgehoben werden. Setzt man in die Formel (1.) für k eine complexe Einheit, welche ich durch $\mathfrak{e}$ bezeichne, so dafs $\mathfrak{e} = \pm 1, \pm i$, wenn $\beta = i$, $\mathfrak{e} = \pm 1, \pm r, \pm r^2$, wenn $\beta = r$, so hat $\varkappa$ nur den einen Werth Null, die $\varkappa'$ sind gar nicht vorhanden, und setzt man noch $x \backsim tx$, so erhält man

$$(F.) \qquad F(\mathfrak{e}x) = \mathfrak{e}\cdot e^{\mathfrak{w}t^2} F(x),$$

wo ebenfalls $\mathfrak{w}$ von t unabhängig ist, nämlich $\mathfrak{w} = -\pi i \mathfrak{C}(\mathfrak{e})\cdot \mathfrak{e} x^2$, welches sich nach den verschiedenen Werthen von $\mathfrak{e}$ entweder auf 0 oder auf $\pm \pi i \cdot \mathfrak{e} x^2$ reducirt. Die letzte Formel, welche wir aufzustellen haben, ist die oben benutzte, welche mit der Formel (XI.) in §. 4. zusammenfällt und die uneigentliche Periodicität der Function φ ausdrückt. Sie wird, wenn man t *gerade* annimmt, für die Function F:

$$(G.) \qquad F(x+k) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(x);$$

wo k irgend eine ganze complexe Zahl vorstellt; $\mathfrak{w}$ hangt von x und von k ab, aber nicht von t. Wenn also x und y irgend zwei Werthe sind, welche sich um eine ganze complexe Zahl von einander unterscheiden, so ist

$$(G'.) \qquad F(x) = e^{\mathfrak{w}t^2} F(y).$$

Die Formeln (*G.*) und (*G'.*) gelten aber nur in dieser Einfachheit, wenn t eine *gerade* Zahl ist.

7.

Arithmetische Anwendungen.

Diese Anwendungen beruhen, aufser auf den Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen, auf dem folgenden sehr einfachen Lemma.

„Wenn eine Gleichung von der Form $A = Be^{\mathfrak{w}t^2}$, in welcher A, B „und $\mathfrak{w}$ von t unabhängig sind, für alle *ganzen reellen* Werthe von t Statt „findet, welche durch eine gewisse Reihe von ganzen Zahlen theilbar und durch „eine gewisse andere Reihe von Zahlen, die zu 2 und zu 3 relative Prim„zahlen sind, nicht theilbar sind, so ist nothwendig $A = B$ und $\mathfrak{w}t^2 = 0$ oder „wenigstens ein Vielfaches von $2\pi i$; und wenn in der zweiten Reihe von „Zahlen auch die 3 befindlich ist, so kann doch der Quotient von A durch B „nur eine dritte Wurzel der Einheit sein."

Denn da, wegen $e^{\mathfrak{w}t^2} = \frac{A}{B} = C$, $e^{\mathfrak{w}t^2}$ von t unabhängig ist, und da die Beschränkungen, welchen die Werthe von t unterworfen sind, nicht hindern, t gröfser als jede gegebene Gröfse anzunehmen, so mufs zunächst der reelle Theil von $\mathfrak{w}$ verschwinden, weil sonst $e^{\mathfrak{w}t^2}$ gröfser oder kleiner als jede Gröfse, z. B. $\frac{A}{B}$, gemacht werden könnte. Die Bedingungen, welchen t unterworfen ist, reduciren sich darauf, dafs t durch eine gegebene ganze Zahl g theilbar und durch eine Reihe von ungeraden Primzahlen $p, p', \ldots.$ nicht theilbar sein soll; die erste Bedingung reducirt die vorgelegte Gleichung auf eine andere von ähnlicher Form, in welcher $\mathfrak{w} \backsim g^2\mathfrak{w}$ und t alle ganzen Werthe haben kann, die weder durch p noch durch p' etc. theilbar sind. Da diese Primzahlen nach der Voraussetzung sämmtlich ungerade sind, so darf man $t=1$ und $t=2$ setzen und erhält $e^{\mathfrak{w}}=C$, $e^{4\mathfrak{w}}=C$, also $e^{3\mathfrak{w}}=1$; folglich ist $\mathfrak{w}$ von der Form $\frac{2n\pi i}{3}$, wo n eine ganze Zahl ist. Wenn nun die 3 in der Reihe der Primzahlen $p, p', \ldots.$ vorkommt, so ist doch immer C einer dritten Wurzel der Einheit gleich, nämlich $C=e^{\mathfrak{w}}=e^{\frac{2n\pi i}{3}}$, $A=e^{\frac{2n\pi i}{3}}B$: kommt die 3 in jener Reihe *nicht* vor, so kann man der ganzen Zahl t einen durch 3 theilbaren Werth geben und erhält, wenn man z. B. $t=3$ setzt, $C=e^{9\mathfrak{w}}=e^{6n\pi i}=1$, folglich $A=B$.

Um die Theorie der Reste der vierten und der sechsten Potenzen in eine gemeinschaftliche Betrachtung zu vereinigen, sei $\vartheta=4$ oder $\vartheta=6$, je nachdem $\beta=i$ oder $\beta=r=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ist; und nach diesen beiden Fällen sei $\mathfrak{e}$ entweder eine vierte oder sechste Wurzel der Einheit, so dafs $\mathfrak{e}^{\vartheta}=1$ ist; ferner sei t eine *gerade* ganze Zahl und

$$F(x)=\prod_{n=-\infty}^{n=\infty}\left\{\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{tx}{m+n\beta}\right)\right\},$$

wo in dem unendlichen Doppelproducte tx statt des sinnlosen Factors $1-\frac{tx}{0}$ zu setzen ist. Übrigens werden die in der letzten Hälfte des vorigen Paragraphen eingeführten Bezeichnungen beibehalten.

Es seien k und l zwei verschiedene complexe Primzahlen, p und q ihre Normen, $\varkappa$ ein vollständiges, $\varkappa'$ ein reducirtes Restensystem (mod. k), λ ein vollständiges, λ' ein reducirtes Restensystem (mod. l); k und l werden so angenommen, dafs $p-1$ und $q-1$ durch ϑ theilbar sind, d. h. für $\beta=i$ wird die complexe Primzahl $1+i$ und für $\beta=r$ werden die beiden complexen Primzahlen $1-r$ und 2 ausgeschlossen; man setze $p-1=\vartheta p'$, $q-1=\vartheta q'$. Die beiden reducirten Restensysteme $\varkappa'$, λ' seien in ihre ϑ associirten Theile eingetheilt und es sei $\varkappa'=\mathfrak{e}\sigma$, $\lambda'=\mathfrak{e}\tau$, wo $\mathfrak{e}$ seine sechs Werthe durchläuft, während davon unabhängig σ seine p' und τ seine q' Werthe erhält; σ ist daher das allgemeine Glied einer Reihe von $p'=\frac{p-1}{\vartheta}$ Zahlen, welche nicht blofs untereinander sämmtlich incongruent sind mod. k, sondern welche auch diese Eigenschaft der Incongruenz beibehalten, wenn man statt jeder irgend eine ihrer associirten Zahlen setzt; dasselbe gilt von den q' Zahlen τ in Bezug auf mod. l. Die Vielfachen $l\sigma$ finden ihre Reste (mod. k) unter den $\varkappa'$; wenn diese Reste also auch nicht immer unter den σ vorkommen, so kommen sie sicher stets in einer der ϑ Reihen vor, deren Inbegriff durch $\mathfrak{e}\sigma$ bezeichnet wird, und man kann daher immer

$$(1.)\quad l\sigma \equiv \mathfrak{e}\sigma_1 \text{ (mod. } k)$$

setzen, wo jedem σ ein ganz bestimmtes σ_1 aus der Reihe σ und eine ebenfalls ganz bestimmte complexe Einheit $\mathfrak{e}$ entspricht. Da vermöge der Congruenz (1.) die beiden Quotienten $\frac{l\sigma}{k}$ und $\frac{\mathfrak{e}\sigma_1}{k}$ sich nur um eine complexe ganze Zahl unterscheiden, so hat man nach (G'.) des vorigen Paragraphen $F(l\sigma:k)$ *) $= e^{\mathfrak{w}t^2}F(\mathfrak{e}\sigma_1:k)$, und ferner nach ($F$.) $F(\mathfrak{e}\sigma_1:k) = \mathfrak{e}e^{\mathfrak{w}t^2}F(\sigma_1:k)$, folglich

$$(2.)\quad F(l\sigma:k) = \mathfrak{e}\cdot e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot F(\sigma_1:k).$$

Bildet man alle p' Congruenzen von der Form (1.), indem man dem σ alle seine Werthe und σ_1 und $\mathfrak{e}$ jedesmal die zugehörigen Werthe giebt, und multiplicirt alle diese Congruenzen, indem man Acht hat, dafs alle σ_1 mit allen σ, wenn auch in anderer Ordnung, zusammenfallen, so ergiebt sich:

$$l^{p'}P(\sigma) \equiv P(\mathfrak{e})P(\sigma) \text{ (mod. } k),$$

und da $P(\sigma)$ nicht durch die Primzahl k theilbar ist,

$$(3.)\quad l^{p'} \equiv P(\mathfrak{e}) \text{ (mod. } k).$$

Ebenso erhält man durch Multiplication aller Gleichungen von der Form (2.), wobei ebenfalls zu bemerken, dafs alle σ_1 mit allen σ zusammenfallen,

$$P_\sigma F(l\sigma:k) = P(\mathfrak{e})e^{\mathfrak{w}t^2}P_\sigma F(\sigma:k), \quad \text{also}$$

$$(4.)\quad P(\mathfrak{e}) = e^{\mathfrak{w}t^2}P_\sigma\left\{\frac{F(l\sigma:k)}{F(\sigma:k)}\right\}.$$

In jeder dieser Gleichungen hat $\mathfrak{w}$ einen andern, aber stets einen von t unabhängigen Werth. Nach (E.), im vorigen Paragraphen, ist nun allgemein $\frac{F(lx)}{F(x)} = \varrho' c^{q-1}e^{\mathfrak{w}t^2}P_{\lambda'}F\left(x+\frac{\lambda'}{l}\right)$, wenn ϱ' ebenso von l abhangt, wie dort ϱ von k. Hiernach erhält man aus (4.), wenn man dem x nach und nach alle Werthe von der Form $\frac{\sigma}{k}$ giebt:

$$P(\mathfrak{e}) = e^{\mathfrak{w}t^2}\cdot\varrho'^{p'}c^{\vartheta p'q'}P_\sigma P_{\lambda'}F\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\lambda'}{l}\right).$$

*) Das Divisionszeichen : setze ich zuweilen statt des Bruchstriches, um den Druck zu erleichtern.

Das Doppelproduct zur Rechten zerfällt in das Product von ϑ Partialproducten, welche sich auf σ und τ beziehen, wenn man die Werthe von λ' in die ϑ associirten Gruppen zerfället, deren allgemeine Glieder entweder durch τ, $i\tau$, $-\tau$, $-i\tau$, oder durch τ, $-r\tau$, $r^2\tau$, $-\tau$, $r\tau$, $-r^2\tau$, also durch $\mathfrak{e}\tau$ ausgedrückt werden. Hiernach wird diejenige complexe Einheit, welcher die Potenz $l^{p'}$ (mod. k) congruent ist, durch die Formel

$$(5.)\qquad e^{\mathfrak{w}l^2}\varrho'^{p'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\mathfrak{e}\tau}{l}\right)\right\}$$

bestimmt, in welcher sich die eine Multiplication auf alle σ, die zweite auf alle τ, und die dritte auf alle ϑ Werthe der complexen Einheit $\mathfrak{e}$ bezieht. Man hat bis jetzt keine besondere Benennung zur Bezeichnung derjenigen complexen Einheit eingeführt, welcher die Potenz $l^{p'}$ (mod. k) congruent ist; *Gaufs* nennt den Exponenten dieser Einheit den *Character* von l in Bezug auf den Modul k; ich will hier, der Kürze wegen, jene Einheit selbst, welche durch (5.) ausgedrückt ist, den *Character von l zu k* nennen.

Wendet man genau dieselben Betrachtungen auf den Modul l an, so erhält man den Character von k zu l durch die analoge Formel

$$e^{\mathfrak{w}l^2}\varrho^{q'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\mathfrak{e}\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right)\right\}$$

ausgedrückt, welche aus (5.) hervorgeht, wenn man k mit l, also ϱ' mit ϱ, p mit q, p' mit q', σ mit τ vertauscht; die rein numerische Constante c bleibt natürlich dieselbe. Man kann diesem Ausdrucke eine etwas verschiedene Form geben, in welcher er besser mit (5.) vergleichbar wird. Da nämlich $\frac{1}{\mathfrak{e}}$ genau dieselben Werthe wie $\mathfrak{e}$, nur in anderer Reihenfolge durchläuft, so kann man auch

$$(6.)\qquad e^{\mathfrak{w}l^2}\varrho^{q'}c^{\vartheta p'q'}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{e}k}+\frac{\tau}{l}\right)$$

schreiben, als den Ausdruck des Characters von k zu l. Es ist nun sehr leicht, die beiden Ausdrücke (5.) und (6.) mit einander zu vergleichen. Zunächst haben beide den Factor $c^{\vartheta p'q'}$ gemeinschaftlich; ferner lassen sich die allgemeinen Glieder der dreifachen Producte durch die Formel

$$\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\mathfrak{e}\tau}{l}\right)=\mathfrak{e}\,e^{\mathfrak{w}l^2}\boldsymbol{F}\left(\frac{\sigma}{\mathfrak{e}k}+\frac{\tau}{l}\right),$$

welche eine neue Anwendung von ($\boldsymbol{F}$.) §. 6. ist, auf einander zurückführen; für jeden stehenden Werth von $\mathfrak{e}$ enthalten die dreifachen Producte $p'q'$ Factoren, nämlich eben so viele, als es Combinationen σ, τ giebt, und da das

Product aller ϑ Werthe von ε gleich -1 ist, indem das Product der vier Einheiten ± 1, $\pm i$, so wie auch das Product der sechs Einheiten ± 1, $\pm r$, $\pm r^2$ wirklich -1 beträgt, so stehen die beiden dreifachen Producte in (5.) und in (6.) in dem Verhältnifs wie $1:(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}$, und die Ausdrücke (5.) und (6.) stehen selbst in dem Verhältnifs

$$(5.):(6.) = \varrho'^{p'}:\varrho^{q'}(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}.$$

Diese Schlüsse beruhen wesentlich auf der Voraussetzung, dafs t zu p und zu q relative Primzahl sei, denn darauf beruht die Anwendbarkeit der Formel (*E.*) §. 6., welche sowohl für den Multiplicator l als für den Multiplicator k benutzt wurde; auch mufs, wie schon erinnert wurde, t gerade sein, weil nur unter dieser Voraussetzung die Formel (*G.*) gültig ist. Andere Beschränkungen finden aber nicht für die ganze Zahl t Statt.

Wendet man daher das am Anfange dieses Paragraphen bewiesene Lemma an, indem man den Character von l zu k (5.) durch $\left(\frac{l}{k}\right)$ und den Character von k zu l (6.) durch $\left(\frac{k}{l}\right)$ bezeichnet, so erhält man aus der eben gefundenen Gleichung

$$\left(\frac{l}{k}\right):\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho'^{p'}:\varrho^{q'}(-1)^{p'q'}e^{\mathfrak{w}t^2}, \quad \text{oder} \quad \varrho'^{p'}\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho^{q'}(-1)^{p'q'}\left(\frac{l}{k}\right)e^{\mathfrak{w}t^2},$$

nach dem Lemma die folgende:

$$(\odot.) \qquad \varrho'^{p'}\left(\frac{k}{l}\right) = \varrho^{q'}(-1)^{p'q'}\left(\frac{l}{k}\right),$$

wenn nur weder p noch q durch 3 theilbar sind. Der Fall, wenn eine der beiden Normen p, q durch 3 theilbar ist, kann nur Statt finden, wenn es sich um complexe Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit handelt; wenn nämlich eine der beiden Primzahlen k und l der 3 und also ihre Norm der 9 gleich ist; dann brauchen nach dem Lemma nicht nothwendig die beiden Seiten von ($\odot$.) in dem Verhältnifs 1:1 zu stehen, jedoch müssen sie immer in dem Verhältnifs wie 1 zu einer dritten Wurzel der Einheit stehen. Da jedoch in diesem speciellem Falle rechts und links in ($\odot$.) nur vierte und keine dritten Wurzeln der Einheit befindlich sind, weil $\vartheta = 4$ ist, und da eine vierte Wurzel der Einheit nie einer dritten Wurzel der Einheit gleich sein kann, aufser wenn beide $=1$ sind, so gilt auch in diesem Falle die Gleichung ($\odot$.). Diese Gleichung enthält die Reciprocitätsgesetze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen. Durch die Einführung der unbestimmten ganzen Zahl t war es möglich, diejenigen Functionen, welche eine eigentliche und eine uneigentliche Periode besitzen, bei dem Beweise ganz so zu benutzen, als wären sie doppelt periodische Functionen; immer bildet jedoch die Grundlage des Beweises die Eintheilung der Restensysteme in ihre associirten Theile, welche wir *Gaufs* zu verdanken haben. — Es liefsen sich hier noch mehrere Betrachtungen anknüpfen, namentlich über das besondere Verhalten der Ausdrücke $\mathfrak{w}$; auf welche ich vielleicht bei einer andern Gelegenheit zurückkomme.

Der Werth von ϱ, welcher allein von k abhangt, so wie der entsprechende von ϱ', welcher genau eben so von l abhangt, in der Formel des Reciprocitätsgesetzes, ist im vorigen Paragraphen für alle nicht durch $1+i$ theilbaren k bestimmt worden, wenn es sich um complexe Zahlen aus 4ten Wurzeln der Einheit handelt *); für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten und weder durch $1-r$ noch durch 2 theilbaren k aber nur in dem Falle, wenn $k\equiv 1 \pmod{2-2r}$ ist **). Da man jedoch für jedes k und jedes l, welche zu $2-2r$ relative Primzahlen sind, immer complexe Einheiten $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ finden kann, so dafs $\mathfrak{e}k\equiv 1$, $\mathfrak{e}'l\equiv 1 \pmod{2-2r}$ ist, so gilt die Formel (⊙.) zunächst für $\left(\frac{\mathfrak{e}k}{\mathfrak{e}'l}\right)$ und $\left(\frac{\mathfrak{e}'l}{\mathfrak{e}k}\right)$, und da $\left(\frac{\mathfrak{e}k}{\mathfrak{e}'l}\right)=\left(\frac{\mathfrak{e}}{l}\right)\left(\frac{k}{l}\right)=\mathfrak{e}^{q'}\left(\frac{k}{l}\right)$, $\left(\frac{\mathfrak{e}'l}{\mathfrak{e}k}\right)=\left(\frac{\mathfrak{e}'}{k}\right)\left(\frac{l}{k}\right)$ $=\mathfrak{e}'^{p'}\left(\frac{l}{k}\right)$ ist, so erhält man hieraus auch unmittelbar das Reciprocitätsgesetz zwischen $\left(\frac{k}{l}\right)$ und $\left(\frac{l}{k}\right)$, wo k und l irgend zwei, weder durch $1-r$ noch durch 2 theilbare complexe Primzahlen aus dritten Wurzeln der Einheit sind. Für die aus vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen hat schon *Gaufs* in seiner „Theorie der biquadratischen Reste" unter je vier associirten Primzahlen immer eine solche als *primäre* characterisirt, dafs zwischen *primären* Primzahlen das Reciprocitätsgesetz in seiner einfachsten Gestalt

$$\left(\frac{l}{k}\right) = (-1)^{p'q'}\left(\frac{k}{l}\right)$$

auftritt. Es mufs nämlich dann $\varrho=1$, also $b^2+a+b-1\equiv 0 \pmod{4}$ sein; und dies geschieht, wenn erstlich b gerade ist, wodurch $b^2\equiv 0 \pmod{4}$ wird, und wenn zweitens $a+b\equiv 1 \pmod{4}$ ist; eine andere Annahme ist nicht möglich, da a und b weder beide gerade, noch beide ungerade sein dürfen. Um denselben Zweck, nämlich die gröfste Vereinfachung des Reciprocitätsgesetzes in der so eben hingeschriebenen Form, auch für die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Primzahlen und für die sechsten Potenz-

*) Nämlich $\varrho = i^{b^2+a+b-1}$, wenn $k=a+bi$ ist.

**) Nämlich $\varrho = (-1)^{\frac{1}{2}(a+b-1)}r^{-b}$, wenn $k=a+br$.

reste zu erreichen, mufs man in jeder Gruppe von sechs associirten complexen Primzahlen immer diejenige, stets existirende und nur einmal vorkommende, als ***primäre*** bezeichnen, welche den folgenden Bedingungen genügt: damit $a+br$ ***primär*** sei, mufs erstlich $b\equiv 0$ (mod. 3) sein und zweitens

entweder $a+b\equiv 1$ (mod. 4), wenn a ungerade, b gerade,
oder $b\equiv 1$ (mod. 4), wenn a gerade, b ungerade ist,
oder $a\equiv 3$ (mod. 4), wenn a und b beide ungerade sind.

Wenn k und l in diesem Sinne primäre Primzahlen sind, so findet das Reciprocitätsgesetz für die sechsten Potenzreste zwischen $\left(\frac{k}{l}\right)$ und $\left(\frac{l}{k}\right)$ in der That in der vorhin aufgestellten Einfachheit Statt. Ich verweile nicht bei dem Raisonnement, welches zu diesem Resultate führt, da dasselbe nicht die mindesten Schwierigkeiten hat, sobald man sich vermöge der weiter oben gemachten Bemerkung die verschiedenen Formen vor Augen stellt, welche das Reciprocitätsgesetz nach den verschiedenen Resten von k und l (mod. $2-2r$) darbieten kann. Da nichts hindert, die so eben für primäre Primzahlen aufgestellten Criterien auch für zusammengesetzte Zahlen gelten zu lassen, so entsteht nur noch die Frage, ob das Product zweier primären Zahlen wiederum eine primäre Zahl hervorbringe; und diese Frage beantwortet sich bejahend, wenn man die kleine damit verbundene Rechnung ausführt und jeden der neun Fälle, welche das Product zweier primären Zahlen darbieten kann, einer besonderen Prüfung unterwirft. Hiernach kann man sofort das Reciprocitätsgesetz auf primäre zusammengesetzte Zahlen ausdehnen, wenn man unter $\left(\frac{k}{l}\right)$ (wenn l das Product der Primzahlen $l_1.l_2.l_3\ldots$ ist) das Product

$$\left(\frac{k}{l_1}\right)\left(\frac{k}{l_2}\right)\left(\frac{k}{l_3}\right)\cdots=\left(\frac{k}{l}\right)$$

versteht, sei es, dafs es sich um die biquadratischen, sei es, dafs es sich um die Reste der sechsten Potenzen handelt. Für die ersteren müssen k und l zu $1+i$, für die letzteren zu $2-2r$ relative Primzahlen sein; diese letztere Bedingung ist aber schon vorausgesetzt, wenn man k und l primär annimmt. Da nun offenbar $\frac{N(l_1)-1}{\vartheta}+\frac{N(l_2)-1}{\vartheta}\equiv\frac{N(l_1 l_2)-1}{\vartheta}$ *) (mod. ϑ), also auch (mod. 2) ist, so gilt die Formel

$$\left(\frac{l}{k}\right)=(-1)^{p'q'}\left(\frac{k}{l}\right),$$

*) Es sei $p=N(k)=\vartheta p'+1$, $q=N(l)=\vartheta q'+1$, so ist $pq=N(kl)=\vartheta^2 p'q'+\vartheta(p'+q')+1$, also $\frac{N(kl)-1}{\vartheta}=\vartheta p'q'+p'+q'\equiv p'+q'$ (mod. ϑ).

wenn k und l irgend zwei primäre Zahlen, p und q deren Normen sind und $p = \vartheta p' + 1$, $q = \vartheta q' + 1$ ist; und da die nicht primären Zahlen, welche zu $1+i$ resp. $2-2r$ relative Primzahlen sind, aus den primären durch Multiplication mit complexen Einheiten hervorgehen, so erhält man auch das Reciprocitätsgesetz für die nicht primären Zahlen aus dem für die primären, obwohl jenes nicht dieselbe Einfachheit hat, wie dieses.

Zu einer vollständigen Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen fehlen nur noch die Sätze, welche die Criterien des biquadratischen Characters der Zahl $1+i$ und die Criterien des Characters der beiden Zahlen $1-r$ und 2 in Bezug auf sechste Potenzreste enthalten. Diese Sätze gehen als eine sehr einfache Folgerung aus dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze hervor, welcher lehrt, wie man $\left(\frac{l}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{l}\right)$ ausdrücken kann, wenn k und l irgend zwei nicht durch $1+i$ resp. nicht durch $1-r$ oder 2 theilbare Zahlen sind. Um die drei in Rede stehenden Sätze unter eine gemeinschaftliche Betrachtung zu vereinigen, will ich durch η irgend eine der drei Zahlen $1+i$, $1-r$, 2, und durch ζ eine der beiden Zahlen $1+i$, $2-2r$ bezeichnen, und zwar in dem Sinne, dafs $\eta = 1+i$, $\zeta = 1+i$ ist, wenn alle vorkommenden Zahlen aus vierten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind und $\vartheta = 4$ ist, und dafs $\eta = 1-r$ oder $\eta = 2$ und $\zeta = 2-2r$ ist, wenn alle vorkommenden Zahlen aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzt sind und $\vartheta = 6$ ist. Es sei k irgend eine complexe Zahl, welche zu ζ relative Primzahl ist, welche also einer complexen Einheit congruent ist (mod. ζ): dann kann man in allen Fällen eine complexe Einheit $\mathfrak{e}$ finden, von der Art, dafs $k+\mathfrak{e}$ durch η theilbar, aber der Quotient $\frac{k+\mathfrak{e}}{\eta}$ zu ζ relative Primzahl ist. Es sei $k+\mathfrak{e} = l\eta$, $N(k) = p$, $N(l) = q$, so ist $k \equiv -\mathfrak{e}$ (mod. l), also $\left(\frac{k}{l}\right) = \left(\frac{-\mathfrak{e}}{l}\right) = (-\mathfrak{e})^{q'}$ und $l\eta \equiv \mathfrak{e}$ (mod. k), also $\left(\frac{l}{k}\right)\left(\frac{\eta}{k}\right) = \left(\frac{\mathfrak{e}}{k}\right) = \mathfrak{e}^{p'}$. Da nun l zu ζ relative Primzahl ist, so kann man nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze $\left(\frac{l}{k}\right)$ in $\left(\frac{k}{l}\right)$ ausdrücken. Es sei $\left(\frac{l}{k}\right) = \varepsilon\left(\frac{k}{l}\right)$, wo ε eine complexe Einheit ist, deren Exponent auf sehr einfache Weise von den Elementen in k und l abhangt; und da die Elemente von l wegen $l = \frac{k+\mathfrak{e}}{\eta}$ unmittelbar in die von k ausgedrückt werden können, so ist jener Exponent eine sehr einfache Function der Elemente von k. Da nun schon $\left(\frac{k}{l}\right) = (-\mathfrak{e})^{q'}$ gefunden ist, so hat man $\left(\frac{l}{k}\right) = \varepsilon(-\mathfrak{e})^{q'}$ und $\varepsilon\cdot(-\mathfrak{e})^{q'}\left(\frac{\eta}{k}\right) = \mathfrak{e}^{p'}$, durch welche

Formel $\left(\frac{\eta}{k}\right)$ vollständig durch die Elemente von k bestimmt ist. Es hat keine Schwierigkeit, wenn man die verschiedenen Fälle von einander trennt und die kleinen Rechnungen ausführt, welche sie darbieten, um die aus dieser Betrachtung hervorgehenden Theoreme, als Ergänzungen des Reciprocitätssatzes, vollständig aufzustellen; was ich dem Leser überlassen darf. Übrigens kann man noch den quadratischen Character der Zahl $1-r$ und den cubischen Character der Zahl 2 aus den im Anfange dieses Paragraphen angewandten Principien ableiten.

Auf diese Weise hätten wir demnach, als ein Corollar zu der Theorie der in dieser Abhandlung betrachteten unendlichen Doppelproducte, eine ausführliche Theorie der Reste der vierten und sechsten Potenzen aufgestellt: eine Theorie, die bis auf einige leichte, rein mechanische Operationen, welche noch auszuführen wären, aber keine principielle Schwierigkeit darbieten, der Vollständigkeit nach nichts zu wünschen übrig läfst. Es kann keinem aufmerksamen Leser entgehen, dafs die Theorie der quadratischen Reste für reelle Zahlen genau in derselben Weise, nur mit einem weit geringeren Aufwande von Betrachtungen aus der Theorie der einfachen Producte von der Form

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{x}{m+\gamma}\right)$$

abgeleitet werden kann; und da diese Darstellungsweise, welche sehr instructiv ist und auf das Vorhergehende ein neues Licht wirft, nur wenig Raum einnimmt, so will ich sie der Vollständigkeit wegen hierher setzen.

Das eben hingeschriebene Doppelproduct werde als Grenze (für $n=\infty$) desjenigen betrachtet, in welchem sich m von $-n$ bis $+n$ erstreckt und durch $f(x,\gamma)$ bezeichnet. Da bei der Substitution $m \backsim m+1$ ein Factor im Unendlichen hinzugesetzt, ein anderer weggelassen wird, und diese beiden Factoren $=1$ sind, so ist $f(x,\gamma+1)=f(x,\gamma)$, und allgemein für jede ganze Zahl h ist hiernach

$$(1.)\qquad f(x,\gamma+h)=f(x,\gamma).$$

Da ferner, wenn k irgend eine ganze Zahl ist und $\varkappa$ ein vollständiges Restensystem mod. k repräsentirt, bei der Substitution $m \backsim km+\varkappa$ die hinzutretenden, so wie die weggelassenen Factoren im Unendlichen sämmtlich $=1$ werden, und da aus dieser Substitution $x \backsim \frac{x}{k}$, $\gamma \backsim \frac{\gamma+\varkappa}{k}$ folgt, so ist

$$(2.)\qquad f(x,\gamma) = \mathrm{S}_\varkappa f\left(\frac{x}{k}, \frac{\gamma+\varkappa}{k}\right);$$

endlich ist offenbar

$$(3.)\qquad f(x,\gamma) = f(-x,-\gamma),$$

wie sich zeigt, wenn man $m \backsim -m$ setzt. Das allgemeine Glied des unendlichen Products läfst sich, wenn m von 0 verschieden ist, so schreiben:

$$\frac{m+\gamma-x}{m+\gamma} = \left(1-\frac{x-\gamma}{m}\right):\left(1-\frac{-\gamma}{m}\right),$$

und für $m=0$ so: $(x-\gamma):(-\gamma)$. Setzt man daher $\prod\limits_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{x}{m}\right)$, wo x statt des sinnlosen Factors $1-\frac{x}{0}$ geschrieben wird, $=\varphi(x)$, so erhält man

$$(4.)\qquad f(x,\gamma) = \frac{\varphi(x-\gamma)}{\varphi(-\gamma)} = \frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)}.$$

Nach der Definition von $\varphi(x)$ ist

$$(5.)\qquad \varphi(x) = [-\gamma f(x,\gamma)]_{\gamma=0}.$$

Stellt man die $M(k)$ Zahlen $\varkappa$ aus der Null und $M(k)-1$ andern Zahlen $\varkappa'$ zusammen, so erhält man hiernach aus (2.), wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $-\gamma = k\cdot\frac{-\gamma}{k}$ multiplicirt und $\gamma=0$ setzt,

$$(6.)\qquad \varphi(x) = kP\varphi\left(\frac{x+\varkappa}{k}\right):P\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right).$$

Aus (1. und 4.) folgt $\frac{\varphi(\gamma-x+h)}{\varphi(\gamma+h)} = \frac{\varphi(\gamma-x)}{\varphi(\gamma)}$, und setzt man $\gamma-x \backsim x$, so wird hiernach $\varphi(x+h) = C\varphi(x)$, wo C von x unabhängig ist. Aus (3.) folgt, wenn man auf beiden Seiten mit $-\gamma$ multiplicirt und dann $\gamma=0$ setzt, wobei (5.) in Anwendung kommt,

$$(7.)\qquad \varphi(-x) = -\varphi(x);$$

und setzt man demnach in $\varphi(x+1) = C\varphi(x)$, $x=-\frac{1}{2}$, so ergiebt sich $\varphi(\frac{1}{2}) = C\varphi(-\frac{1}{2}) = -C\varphi(\frac{1}{2})$, $C=-1$, folglich $\varphi(x+1) = -\varphi(x)$, und deshalb allgemein

$$(8.)\qquad \varphi(x+h) = (-1)^h\varphi(x).$$

Aus (6.) erhält man für den speciellen Fall $k=2$,

$$(9.)\qquad \varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right):\varphi(\tfrac{1}{2}).$$

Der Gleichung (6.) kann man eine bequemere Form geben, wenn man $x \backsim kx$ setzt, und die Constante $k : P\varphi\left(\frac{\varkappa'}{k}\right)$ durch c bezeichnet, nämlich

$$(6.)\qquad \varphi(kx) = cP\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right);$$

für $k=2$ wird demnach (9.)

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x)\varphi(x+\tfrac{1}{2}):\varphi(\tfrac{1}{2}).$$

Um die Constante c zu bestimmen, verfahre man wie folgt. Man mache in (6.) nach und nach die drei Substitutionen $x \backsim x$, $x \backsim x+\frac{1}{2}$ und $x \backsim 2x$; dies giebt

$$\varphi(kx) = cP\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right),\qquad \varphi(kx+\tfrac{1}{2}k) = cP\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}+\tfrac{1}{2}\right),$$
$$\varphi(2kx) = cP\varphi\left(2x+\frac{\varkappa}{k}\right).$$

Multiplicirt man die erste dieser drei Gleichungen mit der zweiten und bemerkt dabei, dafs nach (9.)

$$\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right)\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2})\varphi\left(2x+\frac{2\varkappa}{k}\right)$$

ist, so erhält man

$$\varphi(kx)\varphi(kx+\tfrac{1}{2}k) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{M(k)}P\varphi\left(2x+\frac{2\varkappa}{k}\right):2^{M(k)}.$$

Es sei k ungerade und positiv; dann ist

$$M(k) = k,\qquad \varphi(kx+\tfrac{1}{2}k) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(kx+\tfrac{1}{2})$$

nach (8.), während

$$\varphi(kx)\varphi(kx+\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\varphi(\tfrac{1}{2})\varphi(2kx)$$

ist, nach (9.); hiernach erhält man

$$2^{k-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(2kx) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1}P\varphi\left(2x+\frac{2\varkappa}{k}\right).$$

Da k ungerade ist, so hindert nichts, alle $\varkappa'$ gerade anzunehmen; dadurch erlangt man den Vortheil, dafs die Zahlen $2\varkappa$ nicht blofs dieselben Reste wie die $\varkappa$ (mod. k) lassen, sondern dafs auch die Vielfachen von k, um welche sich die Zahlen $2\varkappa$ von den Zahlen $\varkappa$ unterscheiden, sämmtlich *gerade* sind und dafs daher nach (8.) das Product $P\varphi\left(2x+\frac{2\varkappa}{k}\right)$ dem Producte $P\varphi\left(2x+\frac{\varkappa}{k}\right)$ geradezu gleich wird, während es sonst und im Allgemeinen nur $=\pm P\varphi\left(2x+\frac{\varkappa}{k}\right)$ sein würde. Hiernach ist also, wenn alle $\varkappa'$ gerade sind,

$$2^{k-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\varphi(2kx) = c^2\varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1}P\varphi\left(2x+\frac{\varkappa}{k}\right);$$

und vergleicht man diese Formel mit der obigen $\varphi(2kx) = c\,P\varphi\left(2x+\frac{\varkappa}{k}\right)$, welche aus (6.) durch die Substitution $x \backsim 2x$ entsprang, so erhält man

$$c = 2^{-1}(-1)^{\frac{k-1}{2}} : \varphi(\tfrac{1}{2})^{k-1} = \left\{\frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}\right\}^{k-1},$$

und demnach, wenn man diesen Werth von c in (6.) substituirt:

$$(10.)\qquad \varphi(kx) = \left\{\frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}\right\}^{k-1} P\varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right),$$

wo k positiv und ungerade ist und die Reste $\varkappa$ sämmtlich als gerade Zahlen angenommen werden. Diejenigen Formeln, welche für den nachfolgenden Gebrauch dienen, sind (7., 8. und 10.); nämlich, wenn man sie zusammenstellt:

$$(\mathrm{I.})\qquad \varphi(x+2h) = \varphi(x),$$

$$(\mathrm{II.})\qquad \varphi((-1)^h x) = (-1)^h \varphi(x),$$

wenn h irgend eine reelle ganze Zahl ist, und

$$(\mathrm{III.})\qquad \varphi(kx) = a^{k-1} P_\varkappa \varphi\left(x+\frac{\varkappa}{k}\right), \qquad \frac{\varphi(kx)}{\varphi(x)} = a^{k-1} P_{\varkappa'} \varphi\left(x+\frac{\varkappa'}{k}\right),$$

wenn k positiv und ungerade ist, während alle $\varkappa$, welche ein vollständiges Restensystem mod. k bilden, gerade sind, und wo a eine rein numerische Constante vorstellt, nämlich $a = \frac{2i}{\varphi(\frac{1}{2})}$.

Nun seien k und l irgend zwei positive ungerade Primzahlen, σ sei das allgemeine Glied eines *halben* Restensystems mod. k, so dafs die Zahlen σ mit den Zahlen $-\sigma$ und der Null zusammengenommen ein vollständiges Restensystem (mod. k) bilden; τ sei das allgemeine Glied eines halben Restensystems mod. l; alle σ und alle τ werden gerade angenommen. Für jedes σ befindet sich der Rest von $l\sigma$ (mod. k) entweder unter den σ, oder unter den $-\sigma$; es sei daher $l\sigma \equiv (-1)^h \sigma_1$ (mod. k) wo alle σ_1 alle σ erschöpfen. Da vermöge dieser Congruenz die Differenz $\frac{l\sigma}{k} - \frac{(-1)^h\sigma_1}{k}$ einer ganzen Zahl, und zwar einer geraden ganzen Zahl gleich ist, weil alle σ gerade angenommen worden sind, so hat man nach (I.) $\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) = \varphi\left(\frac{(-1)^h\sigma_1}{k}\right)$, welches nach (II.) $= (-1)^h \varphi\left(\frac{\sigma_1}{k}\right)$ ist. Hieraus folgt, durch Multiplication über alle σ,

$$P_\sigma \varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) = (-1)^{Sh} P\varphi\left(\frac{\sigma_1}{k}\right), \quad (-1)^{Sh} = P\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) : P\varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right) = P\left\{\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right) : \varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right)\right\}.$$

Wenn man nun die Formel (III.) auf den Multiplicator l anwendet und $x = \frac{\sigma}{k}$

setzt, so ist

$$\varphi\left(\frac{l\sigma}{k}\right):\varphi\left(\frac{\sigma}{k}\right) = a^{l-1}\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right)\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\right),$$

also

$$(-1)^{Sh} = a^{\frac{1}{4}(k-1)(l-1)}\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right)\cdot\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\right).$$

Aus der Congruenz $l\sigma \equiv (-1)^h\sigma_1$ folgt andrerseits

$$l^{\frac{k-1}{2}}\boldsymbol{P}(\sigma) \equiv (-1)^{Sh}\boldsymbol{P}(\sigma) \pmod{k}, \quad l^{\frac{k-1}{2}} \equiv (-1)^{Sh}, \quad \text{also} \quad (-1)^{Sh} = \left(\frac{l}{k}\right);$$

folglich ist, wenn man $\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}+\frac{\tau}{l}\right) = \boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\tau\varphi\left(\frac{\sigma}{k}-\frac{\tau}{l}\right) = \boldsymbol{K}_2$ setzt,

$$\left(\frac{l}{k}\right) = a^{\frac{1}{4}(k-1)(l-1)}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2;$$

und wenn man hierin k mit l vertauscht, so ist in derselben Weise

$$\left(\frac{k}{l}\right) = a^{\frac{1}{4}(k-1)(l-1)}\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2, \quad \text{wo} \quad \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\varphi\left(\frac{\tau}{l}+\frac{\sigma}{k}\right), \quad \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\varphi\left(\frac{\tau}{l}-\frac{\sigma}{k}\right).$$

Da nun offenbar $\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{L}_1$, und wenn man auf jeden der $\frac{1}{2}(k-1)\frac{1}{2}(l-1)$ Factoren von $\boldsymbol{L}_2$ die Formel $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ anwendet, $\boldsymbol{K}_2 = (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)\cdot\frac{1}{2}(l-1)}\boldsymbol{L}_2$ ist, so erhält man endlich $\left(\frac{k}{l}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)\cdot\frac{1}{2}(l-1)}\left(\frac{l}{k}\right)$. Dies ist das ***Legendre***sche Reciprocitätsgesetz, welches zuerst von ***Gaufs*** bewiesen worden ist. Verallgemeinert man dasselbe, so dafs es für je zwei positive ungerade Zahlen k und l ohne gemeinschaftlichen Theiler gilt, so kann man hieraus auch unmittelbar den Werth von $\left(\frac{2}{k}\right)$ bestimmen. Wenn $k \equiv 1 \pmod{4}$ ist, so setze man $k+1 = 2l$, und wenn $k \equiv -1 \pmod{4}$ ist, setze man $k-1 = 2l$ und in beiden Fällen $k+\varepsilon = 2l$, wo $\varepsilon = (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)}$; bei dieser Annahme ist l stets positiv ungerade und zu k relative Primzahl. Aus der vorgelegten Gleichung folgt $2l \equiv \varepsilon \pmod{k}$, $k \equiv -\varepsilon \pmod{l}$, also

$$\left(\frac{2l}{k}\right) = \left(\frac{2}{k}\right)\left(\frac{l}{k}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = \varepsilon^{\frac{1}{2}(k-1)}, \qquad \left(\frac{k}{l}\right) = \left(\frac{-\varepsilon}{l}\right) = (-\varepsilon)^{\frac{1}{2}(l-1)}.$$

Verbindet man mit diesen beiden Formeln die dritte $\left(\frac{l}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\left(\frac{k}{l}\right)$, so erhält man $\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{k-1}{2}\cdot\frac{l-1}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}(k-1)}\cdot(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}(l-1)}$. Wenn demnach $k \equiv 1 \pmod{4}$, $\varepsilon = 1$, so ist $\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)} = (-1)^{\frac{1}{4}(k-1)}$, und wenn $k \equiv -1 \pmod{4}$, $\varepsilon = -1$, so ist $\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(l-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} = (-1)^{\frac{3k-5}{4}} = (-1)^{\frac{1}{4}(k+1)}$.

8.

Bemerkungen und Zusätze zu dieser Abhandlung.

Es schien mir nicht unpassend, zur Erläuterung und theilweisen Ergänzung dieser Arbeit die nachstehenden Bemerkungen hinzuzufügen.

I. ***Zu §. 1. und §. 2.*** Es hätte dort ausdrücklich bemerkt werden müssen, dafs es nicht hinreicht, die Convergenz der Reihe (1.) in §. 1., von ihrem dritten Gliede an, in dem Sinne nachzuweisen, dafs dieselbe als eine einfache Reihe mit den Coëfficienten $\frac{1}{3}\Sigma'\frac{1}{u^3}$, $\frac{1}{4}\Sigma'\frac{1}{u^4}$, ... aufgefafst wird, sondern es mufs dargethan werden, dafs dieselbe, als Tripelreihe betrachtet, unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirt. Dies Letztere ist aber in der That in §. 2. geschehen, indem dort nicht allein statt der Coëfficienten selbst, welche Doppelreihen sind, sondern vielmehr statt aller einzelnen Glieder in diesen Doppelreihen deren analytische Moduln gesetzt worden sind. Diese Bemerkung ändert also nichts an den dortigen Schlufsfolgen, sondern soll nur zum besseren Verständnifs derselben beitragen.

II. ***Zu §. 3.*** Es sei

$$\ldots\; a_{-3},\; a_{-2},\; a_{-1},\; a_0,\; a_1,\; a_2,\; a_3,\; \ldots$$

eine Reihe, welche zwar convergirt, aber nicht unabhängig von der Anordnung der Glieder, und deren Summe als Grenze der folgenden $\sum\limits_{n=-k}^{n=k} a_n$ für $k=\infty$ betrachtet wird. Setzt man $n \backsim n+1$, so erlangt die Summe $\sum\limits_{n=-k}^{n=k} a_n$, welche in $\sum\limits_{n=-k}^{n=k} a_{n+1} = \sum\limits_{n=-k+1}^{n=k+1} a_n$ übergeht, den Zuwachs $(a_{k+1}-a_{-k})$. Wenn nun a_k und a_{-k} für $k=\infty$ beide gegen Null convergiren, so ist dieser Zuwachs $=0$ und die Reihe bleibt durch die Substitution $n \backsim n+1$, also auch durch die Substitution $n \backsim n+\nu$, wo ν irgend eine constante *ganze* Zahl ist, unverändert. Diese Annahme ist jedoch zur Convergenz der Reihe keinesweges nothwendig, sondern es ist nur nothwendig, dafs a_k+a_{-k} gegen Null convergirt; es kann sich also treffen, dafs a_k gegen eine von Null verschiedene Constante c, und a_{-k} dann gegen die entgegengesetzte Constante $-c$ convergirt; in diesem Falle erlangt die Reihe den Zuwachs $(a_{k+1}-a_{-k})_{k=\infty} = c-(-c) = 2c$, wenn $n \backsim n+1$ gesetzt wird, und hieraus folgt leicht, dafs sie für die Substitution $n \backsim n+\nu$ den Zuwachs $2\nu c$ erlangt; nämlich es ist

$$\nabla \Sigma a_n = 2\nu c = 2\nu a_{+\infty} = -2\nu a_{-\infty}, \text{ wenn } n \backsim n+\nu.$$

Es sei a_n von der Form

$$f(x+\beta n) \quad \text{und} \quad \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f(x+\beta n) = \operatorname{Lim}_{k=\infty} \sum_{n=-k}^{n=k} f(x+\beta n) = \Lambda(x);$$

dann ist $x \backsim x+\nu\beta$, wenn $n \backsim n+\nu$, also $\Lambda(x+\nu\beta) = \Lambda(x)$, und Λ nach β eigentlich periodisch, wenn $f(x \pm k\beta)$ für $k=\infty$ gegen Null convergirt, dagegen ist $\Lambda(x+\nu\beta) = \Lambda(x)+2\nu c$, also Λ blofs uneigentlich periodisch, wenn $f(x+k\beta)$ gegen $+c$, $f(x-k\beta)$ gegen $-c$ convergirt. In §. 3. kommt der Fall vor, wenn a_n selbst eine einfache Summe nach m, $a_n = \sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m,n)$ und $\varphi(\pm\infty, n) = 0$ ist, für jeden Werth von n; es bleibt also a_n durch die Substitution $m \backsim m+\mu$ unverändert, folglich bleibt auch die Doppelsumme $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=\infty} \left\{ \sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m,n) \right\}$ durch diese Substitution unverändert; und wenn $a_{\pm k}$, d. h. $\sum\limits_{m=-\infty}^{m=\infty} \varphi(m, \pm k)$, für $k=\infty$ gegen $\pm c$ convergirt, so erlangt die Doppelsumme durch die Substitution $m \backsim m+\mu$, $n \backsim n+\nu$ den Zuwachs $2\nu c$.

III. *Zu §. 5. und §. 6.* Setzt man in der identischen Gleichung

$$(a.) \qquad \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),$$

$p = x+w_1$, $q = -x-w_2$, $p+q = w_1-w_2 = w$, so erhält man durch Summation über alle Werthe von w_1 und w_2, mit Ausschlufs von $w_1 = w_2$, links $(2,x)^2-(4,x)$, ganz eben wie in §. 4. für die Kreisfunctionen; rechts giebt die Summation nach w_1, wenn man $w_2 = w_1 - w$ setzt, was nach der Schlufsbemerkung in §. 5. erlaubt ist,

$$\frac{1}{w^2}((2,x)+(2,x-w)) + \frac{2}{w^3}((1,x)-(1,x-w));$$

was sich wegen der Periodicität auf $\frac{2}{w^2}(2,x) + \frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{n}{w^3}$ reducirt und, nach w summirt, $2(2^*,0)(2,x) - \frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2^*,0)}{\partial\beta}$ giebt, so dafs man

$$(1.) \qquad (4,x) = (2,x)^2 - 2(2^*,0)(2,x) + \frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2^*,0)}{\partial\beta}$$

erhält: eine Formel, welche mit (1.) in §. 4. für Kreisfunctionen bis auf die hinzutretende Constante übereinstimmt. Setzt man in (a.)

$$p = x+w_1, \quad q = -w_2, \quad p+q = x+w_1-w_2 = x+w$$

und schliefst die Combinationen $w_1 = w$, d. h. $w_2 = 0$ aus, so erhält man durch ein ähnliches Verfahren und analog der Gleichung (2.) in §. 4.

$$(2.)\qquad 3(4,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\delta(2,x)}{\partial\beta} = (2,x)^2+2(1,x)(3,x).$$

Die identische Gleichung

$$(b.)\qquad \frac{1}{p^3q^2}-\frac{1}{p^2q^3} = \frac{1}{(p+q)^2}\left(\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\frac{1}{(p+q)^3}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)$$

liefert durch dieselben Substitutionen und durch den Procefs der doppelten Erzeugung nur die eine Gleichung

$$(3.)\qquad (5,x) = (3,x)\{(2,x)-(2^*,0)\},$$

welche auch durch Differentiation nach x aus (1.) hervorgeht. Diese Gleichungen kann man mit denen in §. 5. verbinden, um die Elimination, welche zu der Differentialgleichung erster Ordnung für $(2,x)$ führt, mit gröfserer Leichtigkeit auszuführen. Die Gleichung (2.) dient namentlich, um den Differentialquotienten nach β der elliptischen Function 1ter Gattung und die elliptische Function 2ter Gattung in einander auszudrücken.

Setzt man in (*a.*) und (*b.*) $p \backsim p+w_1$, $q \backsim q+w_2$ und führt, indem man über alle Werthe von w_1 und w_2 summirt, w_1+w_2 rechts als neuen Index ein (das Wort Index in einer allgemeineren Bedeutung genommen), so erhält man

$$(4.)\qquad (2,p)(2,q)$$
$$= (2,p+q)\{(2,p)+(2,q)\}+2(3,p+q)\{(1,p)+(1,q)\}-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2,p+q)}{\partial\beta},$$

$$(5.)\qquad (3,p)(2,q)-(2,p)(3,q)$$
$$= (2,p+q)\{(3,p)+(3,q)\}+(3,p+q)\{(2,p)+(2,q)\}.$$

Man erhält (5.) auch aus (4.) durch Differentiation nach p und q, indem man $p+q$ als constant betrachtet. Durch eine nochmalige Differentiation erhält man aus (5.), indem man wieder $p+q$ als constant betrachtet,

$$(6.)\qquad 3(4,p)(2,q)-4(3,p)(3,q)+3(2,p)(4,q)$$
$$= 3(2,p+q)\{(4,p)+(4,q)\}+2(3,p+q)\{(3,p)+(3,q)\}.$$

Die Formeln (5. und 6.), welche unverändert auch für Kreisfunctionen gelten, sind zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von $(2,p+q)$ und $(3,p+q)$ und geben die letzteren rational in $(2,p)$, $(3,p)$, $(4,p)$ und $(2,q)$, $(3,q)$, $(4,q)$ ausgedrückt, also auch nach (1.) rational in $(2,p)$, $(3,p)$ und $(2,q)$, $(3,q)$. Die (4.) in Verbindung mit (2.) giebt das Additionstheorem für die zweite Gattung. Nämlich nach (2.) ist, wenn man der Kürze wegen $p+q=r$ setzt,

$$-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(2,r)}{\partial\beta} = 3(4,r)-(2,r)^2-2(1,r)(3,r),$$

aus (4.) wird daher

$$(2,p)(2,q)$$
$$=(2,r)((2,p)+(2,q))+2(3,r)\{(1,p)+(1,q)-(1,r)\}+3(4,r)-(2,r)^2,$$
$$(1,p)+(1,q)-(1,r)$$
$$=\frac{1}{2(3,r)}\{(2,p)(2,q)-3(4,r)-(2,r)((2,p)+(2,q)-(2,r))\},$$

d. h. $(1,p)+(1,q)-(1,p+q)$ ist gleich einem Ausdruck, welcher nur aus elliptischen Functionen erster Gattung zusammengesetzt ist.

Die Befugnifs zu dem Verfahren, durch welches die hier gewonnenen Gleichungen gefunden worden sind, beruht auf ganz andern Gründen, als bei den in §. 5. abgeleiteten Relationen; nämlich nicht wie dort auf der Unabhängigkeit der Summen von der Anordnung ihrer Glieder, welche hier nicht Statt findet, sondern nur auf der Bemerkung am Schlusse von §. 5. Streng genommen mufs man daher eigentlich erst sämmtliche Summationen nach den verschiedenen m in den verschiedenen $w=\alpha m+\beta n$, und dann erst alle Summationen nach den verschiedenen n ausführen; aber der Algorithmus des Verfahrens bleibt derselbe wie in §. 5.

Da in der Differenz $\frac{1}{x+w}-\frac{1}{y+w}$, wenn man sie nach fallenden Potenzen von w entwickelt, der Term $\frac{1}{w}$ nicht vorkommt, so darf man in der Formel

$$\left(\frac{1}{x+w_1}-\frac{1}{y+w_1}\right)\left(\frac{1}{x+w_2}-\frac{1}{y+w_2}\right)$$
$$=\frac{1}{w_1-w_2}\left\{-\frac{1}{x+w_1}+\frac{1}{x+w_2}-\frac{1}{y+w_1}+\frac{1}{y+w_2}\right\}$$
$$+\frac{1}{x-y+w_1-w_2}\left\{\frac{1}{x+w_1}-\frac{1}{y+w_2}\right\}+\frac{1}{y-x+w_1-w_2}\left\{\frac{1}{y+w_1}-\frac{1}{x+w_2}\right\}$$

bei der Summation nach w_1 und w_2 die Differenz $w_1-w_2=w$ als neuen Index einführen, und man erhält durch den Procefs der doppelten Erzeugung, wenn man noch bemerkt, dafs für den Fall $w_1=w_2$ statt des ersten Theils rechts in der Formel

$$\frac{1}{(x+w_1)^2}+\frac{1}{(y+w_1)^2}$$

gesetzt werden mufs, das folgende Resultat. Die linke Seite giebt unmittelbar $\{(1,x)-(1,y)\}^2$; setzt man auf der rechten $w_2=w_1-w$, so ergiebt sich durch Summation nach w_1, $\frac{1}{w}\{-(1,x)+(1,x-w)-(1,y)+(1,y-w)\}$ $+\frac{1}{x-y+w}\{(1,x)-(1,y-w)\}+\frac{1}{y-x+w}\{(1,y)-(1,x-w)\}$. Da nun

$(1,x-w)=(1,x)-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$, $(1,y-w)=(1,y)-\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}$ ist, so reducirt sich dieser Ausdruck auf $-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\cdot\frac{1}{w}+\frac{1}{x-y+w}\left\{(1,x)-(1,y)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right\}$ $+\frac{1}{y-x+w}\left\{(1,y)-(1,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial w}{\partial\beta}\right\}$. Im ersten Term ist der Werth $w=0$ auszuschliefsen, und die Summation nach w giebt

$$\{(1,x)-(1,y)\}\{(1,x-y)-(1,y-x)\}+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\overset{*}{\Sigma}\left\{\frac{1}{x-y+w}+\frac{1}{y-x+w}-\frac{2}{w}\right\}\frac{\partial w}{\partial\beta}$$
$$=2(1,x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x-y)}{\partial\beta};$$

hierzu tritt noch $(2,x)+(2,y)$, und man erhält demnach schliefslich:

$$\{(1,x)-(1,y)\}^2=2(1,x-y)\{(1,x)-(1,y)\}+(2,x)+(2,y)+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x-y)}{\partial\beta},$$

und wenn man noch $x=p$, $y=-q$, $-y=q$, $p+q=x-y=r$ setzt:

$$(7.)\quad \{(1,p)+(1,q)\}^2$$
$$=2(1,r)\{(1,p)+(1,q)\}+(2,p)+(2,q)+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(r)}{\partial\beta}.$$

Die Analogie dieser Formel mit dem Additionstheorem für die Cotangente (§. 4.) ist nicht zu verkennen. Setzt man in ihr q unendlich klein und entwickelt nach steigenden Potenzen von q, so erhält man eine Reihe von Gleichungen. Die erste derselben, welche *nicht identisch* wird, ist die folgende (es wird noch $p \backsim x$ gesetzt):

$$(8.)\quad (2,x)-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial\beta}=(1,x)^2+3(2^*,0)\ ^*);$$

die zweite ist

$$(8'.)\quad (3,x)+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(1,x)}{\partial\beta}=(1,x)(2,x);$$

---

*) Da $(1,x)=\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial x}$, $(2,x)=-\frac{\partial^2\log\varphi(x)}{\partial x^2}$, so läfst sich, wenn man $\varphi(x)=y$ setzt, die Gleichung (8.) auch so schreiben: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial y}{\partial\beta}+3(2^*,0)y=0$; dieser partiellen Differentialgleichung genügt also das unendliche Doppelproduct $\varphi(x)$, während das entsprechende einfache unendliche Product in der Theorie der Kreisfunctionen, welches den Sinus darstellt, der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3(2^*,0)y=0$ genügt. Setzt man $cy=z$, wo c, als Function von β, durch $\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log c}{\partial\beta}=3(2^*,0)$ bestimmt wird, so kommt $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial z}{\partial\beta}=0$.

die dritte ist wiederum die Gleichung (2.), welche oben auf anderem Wege gefunden wurde, u. s. w. Man sieht, dafs diese Gleichungen sich von den in §. 4. für die Cotangente abgeleiteten einfachsten Differentialgleichungen nur durch den links hinzutretenden Term $-\frac{4\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial\log\varphi(x)}{\partial\beta}$ resp. $\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\cdot\frac{\partial(1,x)}{\partial\beta}$ unterscheiden. Wenn man in der Gleichung (7.) entweder $(2,p)$ und $(2,q)$, oder $\frac{\partial\log\varphi(r)}{\partial\beta}$ durch (8.) ausdrückt, so erhält man zwei neue Formen der Gleichung (7.), nämlich:

$$(9.)\qquad (1,p)(1,q)-3(2^*,0)$$
$$=(1,r)\{(1,p)+(1,q)\}+\frac{2\delta\pi i}{\alpha}\partial_\beta\{\log\varphi(p)+\log\varphi(q)+\log\varphi(r)\},$$

$$(10.)\qquad \{(1,p)+(1,q)-(1,r)\}^2=(2,p)+(2,q)+(2,r)-3(2^*,0).$$

Die Gleichung (10.) ist vielleicht eine der elegantesten Darstellungen des Additionstheorems für die zweite Gattung. Differentiirt man die Gleichung (10.), indem man p und q als variabel, r als constant ansieht, so erhält man, wenn man die Seite rechts durch T bezeichnet, $-(2,p)+(2,q)=\frac{1}{\sqrt{T}}\{-(3,p)+(3,q)\}$, also

$$(11.)\qquad (2,p)+(2,q)+(2,r)-3(2^*,0)=\left\{\frac{(3,p)-(3,q)}{(2,p)-(2,q)}\right\}^2,$$

als eine der einfachsten Formen des Additionstheorems für die erste Gattung. Die Vergleichung von (11.) mit (10.) giebt

$$(12.)\qquad (1,p)+(1,q)-(1,r)=\frac{(3,p)-(3,q)}{(2,p)-(2,q)}\ ^{*}),$$

als eine neue Form des Additionstheorems für die zweite Gattung, deren characteristische Eigenschaft darin besteht, dafs rechts keine Function von $r=p+q$, sondern nur Functionen von p und q vorkommen. Die Gleichung (12.) schreibe man in den beiden Formen

$$(13.)\qquad (1,p+q)+(1,p-q)=(1,2p)+\frac{(3,p+q)-(3,p-q)}{(2,p+q)-(2,p-q)},$$

$$(14.)\qquad (1,p\pm q)=(1,p)\pm(1,q)-\frac{(3,p)\mp(3,q)}{(2,p)-(2,q)}.$$

Durch Addition der beiden Gleichungen (14.) erhält man noch

$$(15.)\qquad (1,p+q)+(1,p-q)=2(1,p)+\partial_p\log((2,p)-(2,q)),$$

*) Vor die Seite rechts müfste eigentlich $\pm$ gesetzt werden, aber man findet durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von q, dafs das obere Zeichen das richtige ist.

weil $-2(3,p) = \partial_p(2,p)$ ist. Giebt man q einen solchen Werth, dafs $(3,q) = 0$, so erhält man aus (12.) rechts $-\frac{1}{2}\partial_p \log\{(2,p)-(2,q)\}$, also

$$\partial_p \log\varphi(p+q) - \partial_p \log\varphi(p) - (1,q) = \tfrac{1}{2}\partial_p \log\{(2,p)-(2,q)\},$$

$$\log\varphi(p+q) - \log\varphi(p) = \tfrac{1}{2}\log\{(2,p)-(2,q)\} + (1,q)p + \text{Const.},$$

$$\frac{\varphi(p+q)^2}{\varphi(p)^2} = C\cdot e^{2(1,q)\cdot p}\{(2,p)-(2,q)\}.$$

Setzt man hier p unendlich klein, und entwickelt nach steigenden Potenzen von p, so giebt der erste Term der Entwicklung $C = \varphi(q)^2$. Die Function φ hat immer dieselbe Bedeutung, wie in der letzten Hälfte von §. 4., und q ist z. B. $= \frac{\alpha}{2}$ oder $= \frac{\beta}{2}$ oder $= \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Nach der Transformationsformel (*A.*) des §. 6. ist, mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen,

$$(16.)\qquad S(1,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)' = (1,\gamma)+a-b\gamma,$$

$$(17.)\qquad S(1,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)' = (1,\gamma)-a-b\gamma.$$

Die Anzahl der Summanden links ist $\pm\varepsilon = M(\varepsilon)$. Addirt man (16.) und (17.) Glied um Glied und benutzt (13.), indem man links $p=\gamma$, $q = \sigma\alpha+\tau\beta$, rechts $p=\gamma$, $q=0$ (oder besser q unendlich klein) setzt, so ergiebt sich

$$(18.)\qquad M(\varepsilon)\cdot(1,2\gamma)' + S\frac{(3,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-(3,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)'}{(2,\gamma+\sigma\alpha+\tau\beta)'-(2,\gamma-\sigma\alpha-\tau\beta)'}$$

$$= (1,2\gamma) + \frac{(3,\gamma+0)-(3,\gamma-0)}{(2,\gamma+0)-(2,\gamma-0)} - 2b\gamma.$$

Benutzt man hingegen (15.) bei der Addition von (16.) und (17.), aber blofs links, so erhält man

$$(19.)\qquad 2M(\varepsilon)(1,\gamma)' + \partial_\gamma \log P\{(2,\gamma)'-(2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = 2(1,\gamma)-2b\gamma,$$

wo $b = \delta\frac{2\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$ ist und das Multiplicationszeichen P sich auf die $M(\varepsilon)-1$ Combinationen σ, τ mit Ausschlufs von 0, 0 bezieht. Dies sind die Transformationsformeln für die zweite Gattung, in einer Form, welche der zuerst von *Jacobi* aufgestellten sehr ähnlich ist. Durch Differentiation nach γ erhält man die Transformationsformeln für die erste Gattung.

Die Darstellung der Transformationsformeln in Form von Producten kann man mit Zuziehung von (*A.*) §. 6. sehr leicht aus der folgenden allgemeinen Relation ableiten, welche sich ebenfalls durch den Procefs der doppelten Erzeugung ergiebt. Wenn $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, ... irgend verschiedene Gröfsen sind, so giebt das Product $\frac{1}{(x+\varkappa_1)^2}\cdot\frac{1}{(x+\varkappa_2)^2}\cdot\frac{1}{(x+\varkappa_3)^2}\dots$ durch Zerfällung in Partialbrüche eine Summe von der Form $S_\varkappa\frac{\mathfrak{A}}{(x+\varkappa)^2}+S\frac{\mathfrak{B}}{x+\varkappa}$, wo die verschiedenen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur von den Differenzen zwischen den verschiedenen $\varkappa$ abhangen. Wenn man daher $\varkappa_1 \backsim \varkappa_1+w_1$, $\varkappa_2 \backsim \varkappa_2+w_2$, etc. allgemein $\varkappa \backsim \varkappa+w$ setzt und die Differenzen zwischen den verschiedenen w als neue Indices einführt, so erhält man durch Anwendung der oft benutzten Methode:

$$(20.)\qquad \boldsymbol{P}_\varkappa(2, x+\varkappa) = S\{\boldsymbol{A}(2, x+\varkappa)\}+S\{\boldsymbol{B}(1, x+\varkappa)\}+\boldsymbol{C};$$

wo die verschiedenen $\boldsymbol{A}$, die verschiedenen $\boldsymbol{B}$, so wie $\boldsymbol{C}$ von x unabhängig sind, nur von den Differenzen zwischen den verschiedenen $\varkappa$ abhangen und übrigens leicht vollständig durch elliptische Functionen ausgedrückt werden können, wenn man die besondere Form der Coëfficienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ berücksichtigt. Diese Relation (20.), durch welche ein Product von beliebig vielen elliptischen Functionen linear durch die elliptischen Functionen (erster und zweiter Gattung) der einzelnen Elemente ausgedrückt wird, erfordert, dafs nicht allein alle $\varkappa$ verschieden sind, sondern auch, dafs keine ihrer Differenzen auf die Form $m\alpha+n\beta$ gebracht werden kann, wo m und n ganze Zahlen sind. Die Transformationsformeln in Form von Producten gehen hieraus hervor, wenn man in (20.) statt der ursprünglichen elliptischen Functionen die transformirten mit den Moduln α', β' setzt, statt der verschiedenen $\varkappa$ die $\boldsymbol{M}(\varepsilon)$ Ausdrücke $\sigma\alpha+\tau\beta$ wählt, und berücksichtigt, dafs in diesem Falle alle $\boldsymbol{A}$ einander gleich werden und alle $\boldsymbol{B}$ verschwinden, endlich aber die Gleichung (*A.*) §. 6. für $g=2$ anwendet.

Die nachstehenden Folgerungen aus dem Vorhergehenden sind noch von besonderer Wichtigkeit. Die obige Additionsformel für die zweite Gattung

$$(1, x+y) = (1, x)+(1, y)-\frac{(3, x)-(3, y)}{(2, x)-(2, y)}$$

läfst sich so schreiben:

$$\partial_x \log\varphi(x+y)$$
$$= \partial_x \log\varphi(x)+(1, y)+\tfrac{1}{2}\partial_x \log\{(2, x)-(2, y)\}+\frac{(3, y)}{(2, x)-(2, y)},$$

woraus durch Integration nach x

$$\log\varphi(x+y)$$
$$= \log\varphi(x)+(1, y)x+\tfrac{1}{2}\log\{(2, x)-(2, y)\}+(3, y)\cdot\int_0^x\frac{\partial x}{(2, x)-(2, y)}+\text{Const.}$$

hervorgeht. Die Constante bestimmt man durch Entwicklung aller Termen nach Potenzen von x. Man erhält

$$\log\varphi(x+y) = \log\varphi(y) + \text{etc.}, \qquad \log\varphi(x) = \log x + \text{etc.},$$
$$(2,x)-(2,y) = \frac{1}{x^2} + \{(2^*,0)-(2,y)\} + \text{etc.} = \frac{1}{x^2}\{1+\text{etc.}\},$$
$$\tfrac{1}{2}\log\{(2,x)-(2,y)\} = -\log x + \text{etc.},$$

und das Integral fängt gleich mit $\frac{x^3}{3}$ an. Das einzige constante Glied, welches in diesen Entwicklungen vorkommt, ist links $\log\varphi(y)$; also ist Const. $=\log\varphi(y)$, folglich hat man

$$(21.)\qquad \log\frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)\varphi(y)} = (1,y)x + \tfrac{1}{2}\log\{(2,x)-(2,y)\} + (3,y)\int_0^x\frac{\partial x}{(2,x)-(2,y)},$$

wodurch, wie bei *Jacobi*, die dritte Gattung durch die Function φ ausgedrückt ist; $(2,y)$ ist hier der Parameter. Ein specieller Fall hiervon ist der schon oben betrachtete, wenn man y einen solchen Werth giebt, dafs $(3,y)=0$ wird. Es sei $(3,q)=0$ und $y=q$, dann erhält man

$$(22.)\qquad \frac{\varphi(x+q)^2}{\varphi(x)^2\varphi(q)^2} = e^{2(1,q)x}\{(2,x)-(2,q)\}.$$

Durch diese Formel wird der Zusammenhang zwischen den Doppelreihen und den Quotienten aus den Doppelproducten nachgewiesen. Die Formel (15.) für das Additionstheorem läfst sich so schreiben:

$$\partial_x\log\varphi(x+y)+\partial_x\log\varphi(x-y) = 2\,\partial_x\log\varphi(x)+\partial_x\log\{(2,x)-(2,y)\},$$

und sie giebt, exponentiell integrirt,

$$\varphi(x+y)\varphi(x-y) = C\cdot\varphi(x)^2\{(2,x)-(2,y)\}.$$

Da $\varphi(x\pm y)$, entwickelt, mit $\varphi(\pm y)$, $\varphi(x)^2$ mit x^2, $(2,x)-(2,y)$ mit $\frac{1}{x^2}$ anfangen, so wird $\varphi(y)\varphi(-y)=C$, oder $C=-\varphi(y)^2$, und folglich hat man die Formel

$$(23.)\qquad \frac{\varphi(y+x)\varphi(y-x)}{\varphi(y)^2\varphi(x)^2} = (2,x)-(2,y).$$

Schreibt man in dieser letztern die Seite rechts so:

$$\{(2,x)-(2,q)\}-\{(2,y)-(2,q)\}$$

und vergleicht sie mit der vorhin abgeleiteten Formel, so findet sich

$$(24.)\qquad \varphi(q)^2\varphi(x+y)\varphi(x-y)$$
$$= \varphi(x)^2\{e^{-(1,q)y}\varphi(y+q)\}^2-\varphi(y)^2\{e^{-(1,q)x}\varphi(x+q)\}^2,$$

wo q der Gleichung $(3,q)=0$ genügt; u. s. w.

In Bezug auf die Transformationsformel für die zweite Gattung bemerke man, dafs sie für einen ungeraden Werth von ε, wegen $(2, -\sigma\alpha-\tau\beta) = (2, \sigma\alpha+\tau\beta)$, auch so geschrieben werden kann:

$$M(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \partial_\gamma \log P_1\{(2,\gamma)' - (2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\},$$

wo in P_1 nur $\frac{1}{2}\{M(\varepsilon)-1\}$ Combinationen σ, τ vorkommen, indem von je zweien, wie σ, τ; $-\sigma, -\tau$, eine ausgeschlossen wird. Durch exponentielle Integration dieser Gleichung erhält man

$$\varphi'(\gamma)^{M(\varepsilon)} e^{\frac{1}{2}b\gamma^2} P_1\{(2,\gamma)' - (2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = C\cdot\varphi(\gamma).$$

Da $\varphi'(\gamma)$, entwickelt, mit γ anfängt, so fängt die $M(\varepsilon)$te Potenz davon mit $\gamma^{M(\varepsilon)}$ an, $e^{\frac{1}{2}b\gamma^2}$ fängt mit 1, $(2,\gamma)' - (2,\sigma\alpha+\tau\beta)'$ mit $\frac{1}{\gamma^2}$, folglich das Product in der Formel mit $\frac{1}{\gamma^{M(\varepsilon)-1}}$, und daher die ganze linke Seite der Formel mit γ an, und da die Entwicklung der Seite $C\varphi(\gamma)$ rechts mit $C\gamma$ anfängt, so ist nothwendig $C = 1$ und demnach

$$(25.)\qquad P_1\{(2,\gamma)' - (2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = e^{-\frac{1}{2}b\gamma^2}\frac{\varphi(\gamma)}{\varphi'(\gamma)^{M(\varepsilon)}},$$

wo immer $b = \frac{2\delta\nu\pi i}{\alpha\alpha'}$ ist. Die Multiplication P_1 umfafst nur $\frac{1}{2}\{M(\varepsilon)-1\}$ Combinationen σ, τ, und diese Formel gilt nur für einen ungeraden Werth von ε. Im Allgemeinen hat man aber für jeden Werth (auch wenn ε gerade) von ε:

$$(26.)\qquad P\{(2,\gamma)' - (2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = e^{-b\gamma^2}\frac{\varphi(\gamma)^2}{\varphi'(\gamma)^{2M(\varepsilon)}},$$

wo das Product $M(\varepsilon)-1$ Combinationen σ, τ umfafst. Diese wichtigen Fundamentalformeln sind, wenn auch in etwas anderer, aber nicht wesentlich verschiedener Form, schon von *Jacobi* aufgestellt worden (*Crelle's* Journal Band 4.).

Setzt man

$$P\{(2,\gamma)' - (2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = V \quad\text{und}\quad P_1\{(2,\gamma)' - (2,\sigma\alpha+\tau\beta)'\} = W,$$

so ist

$$M(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \frac{1}{2}\frac{\partial \log V}{\partial\gamma}$$

für einen beliebigen Werth von ε, und

$$M(\varepsilon)(1,\gamma)' = (1,\gamma) - b\gamma - \frac{\partial \log W}{\partial\gamma}$$

für einen ungeraden Werth von ε. Differentiirt man diese Gleichungen nach γ, so ergiebt sich

$$(27.)\qquad (2,\gamma) = M(\varepsilon)(2,\gamma)' - b - \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \log V}{\partial \gamma^2},$$

$$(28.)\qquad (2,\gamma) = M(\varepsilon)(2,\gamma)' - b - \frac{\partial^2 \log W}{\partial \gamma^2};$$

und bezeichnet man die Differentialquotienten der ganzen Functionen V und W von $(2,\gamma)'$, nach $(2,\gamma)'$ genommen, durch V', V'', etc., W', W'', etc., so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = V'\frac{\partial (2,\gamma)'}{\partial \gamma} = -2(3,\gamma)'V',$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} = V''\left(\frac{\partial (2,\gamma)'}{\partial \gamma}\right)^2 + V'\frac{\partial^2 (2,\gamma)'}{\partial \gamma^2} = 4(3,\gamma)'^2 V'' + 6(4,\gamma)'V',$$

$$\frac{\partial \log V}{\partial \gamma} = -\frac{2V'}{V}(3,\gamma)', \quad \frac{\partial^2 \log V}{\partial \gamma^2} = \frac{V\{4(3,\gamma)'^2 V'' + 6(4,\gamma)'V'\} - 4(3,\gamma)'^2 V'^2}{V^2}.$$

Dieselben Formeln gelten in Bezug auf W, und da $(3,\gamma)'^2$ und $(4,\gamma)'$ ganzen Functionen von $(2,\gamma)'$ gleich sind, so erhält man auf diese Weise die Darstellung von $(2,\gamma)$ durch rationale Functionen von $(2,\gamma)'$; übrigens ist $V = W^2$, wenn ε ungerade.

Ich bemerke hier ausdrücklich, um jedem Angriffe zuvorzukommen, dafs ich keine der hier aufgestellten *Formeln* als neu beanspruche, wohl aber die *Methode*, durch welche die Relationen zwischen elliptischen, so wie zwischen Kreisfunctionen auf *algebraische* Relationen zurückgeführt werden. Das hier Gegebene ist als eine Anwendung dieser Methode auf die einfachsten und leichtesten Probleme anzusehen. Vielleicht finde ich bald Gelegenheit, in einer besondern Abhandlung theils die hier angestellten Untersuchungen weiter auszuführen, theils dieselbe Methode auf schwierigere und verborgenere Probleme anzuwenden.

Es wurde im Vorhergehenden häufig die Entwicklung von Functionen, wie (g, x), $(g, x+y)$ für einen unendlich kleinen Werth von x nach steigenden Potenzen von x verlangt. Diese Entwicklungen geschehen nach den Formeln

$$(g, x) = \frac{1}{x^g} + (g^*, 0) - g(g+1^*, 0)x + \frac{g(g+1)}{2}(g+2^*, 0)x^2 - \text{etc.},$$

$$(g, x+y) = (g, y) - g(g+1, y)x + \frac{g(g+1)}{2}(g+2, y)x^2 - \text{etc.},$$

welche gelten, so lange $M(x)$ kleiner bleibt, als der kleinste (von Null verschiedene) Werth von $M(w)$, resp. $M(w+y)$; für einen beliebigen Werth von x müssen im Allgemeinen diejenigen Termen von $(g, x+y)$, für welche

$M(w+y) < M(x)$, und deren Anzahl endlich ist, nach ***absteigenden***, alle übrigen Termen, für welche $M(w+y) > M(x)$ ist, nach ***aufsteigenden*** Potenzen von x entwickelt werden. Man erhält auf diese Weise, nach den verschiedenen Intervallen, in welchen sich $M(x)$ befinden kann und welche durch die Werthe von $M(w+y) = M(\alpha m+\beta n+y)$ als Grenzwerthe von einander geschieden sind, unendlich viele verschiedene Entwicklungen von $(g, x+y)$. Der Kürze wegen setze ich den speciellen Fall bei Seite, wenn $M(x)$ mit einem der Werthe von $M(w+y)$ zusammenfällt; w ist immer $= \alpha m+\beta n$ und $(g, x+y) = \sum_{m,n} \frac{1}{(w+x+y)^g}$.

IV. ***Zu §. 7.*** Bei Gelegenheit der neuen Beweise der Reciprocitätssätze für die Reste der vierten und sechsten Potenzen, welche ich in §. 7. gegeben habe, komme ich für einen Augenblick auf meine ersten, aus der Theorie der Kreistheilung gezogenen und im 27ten und 28ten Bande dieses Journals publicirten Beweise des cubischen und biquadratischen Fundamentaltheorems zurück. Nach der Notiz des Hrn. Prof. ***Jacobi,*** Seite 172 des 30ten Bandes dieses Journals, welche sich auf jene ersten Beweise bezieht und wie folgt lautet:

„Diese aus vielfach verbreiteten Nachschriften der oben erwähnten Vor-
„lesungen (an der Königsberger Universität) auch den Herren Professoren
„***Dirichlet*** und ***Kummer*** seit mehreren Jahren bekannten Beweise sind
„neuerdings von Hrn. Dr. ***Eisenstein*** im 27ten Bande dieses Journals
„S. 289 und im 28ten Bande desselben Journals S. 53 publicirt worden.
„Der S. 41 des 28ten Bandes von Hrn. Dr. ***Eisenstein*** gegebene Beweis
„des quadratischen Reciprocitätssatzes ist der nämliche, welchen ich im
„Jahre 1827 ***Legendre*** mitgetheilt und dieser in die 3te Ausgabe seiner
„Zahlentheorie aufgenommen hat"

könnte auf mich der Verdacht fallen, als seien meine Beweise nichts anderes, als vielleicht Abschriften oder Ausarbeitungen der erwähnten Collegienhefte. Dem mufs ich mit der Bemerkung widersprechen, dafs mir, zu der Zeit als ich, nur mit geringen Hülfsmitteln versehen (wie die Werke von ***Gaufs*** und einige Bände dieses Journals), so wie abgeschnitten von aller mündlichen, so wie schriftlichen mathematischen Unterweisung, resp. Correspondenz, jene Beweise fand und herausgab, die betreffenden Untersuchungen des Hrn. Prof. ***Jacobi*** gänzlich unbekannt waren, und dafs ich auch bis auf den heutigen Tag keine Gelegenheit gefunden habe, irgend eines der erwähnten Collegienhefte mit Mufse einer Durchsicht zu unterwerfen. Ich halte es um so mehr für überflüssig, mich auf nähere Einzelnheiten in dieser Beziehung einzulassen, als meine spätern Arbeiten über denselben Gegenstand die Selbstständigkeit meiner Forschungen zur Genüge darthun mögen, und als ich schon bei der Publication meiner ersten Beweise auseinandergesetzt habe, wie dieselben aus dem Studium der Werke Dessen entstanden sind, welcher als der Schöpfer und Begründer der ganzen Theorie, von welcher diese Beweise einen Theil ausmachen, zu betrachten ist. Wer den ganzen mathematischen Zustand hier in Berlin zu jener Zeit gekannt hat, wird mir Gerechtigkeit widerfahren lassen; ich bin überzeugt, dafs von den oft angezogenen Collegienheften damals kein einziges hier zu finden gewesen wäre. Jene Bemerkung des Hrn. Prof. *Jacobi* war mir aber um so schmerzlicher, als sie mich ganz unerwartet traf, und als ich mich durch das Wohlwollen, mit welchem mich der grofse Gelehrte selbst noch lange Zeit nach der Publication jener meiner ersten Arbeiten beehrte und erfreute, so wie durch die Bewunderung der unschätzbaren wissenschaftlichen Verdienste des grofsen Mannes, zur Dankbarkeit ihm verpflichtet fühle. Endlich ist der in obiger Notiz erwähnte Beweis des quadratischen Reciprocitätssatzes vom Jahre 1827, abgesehen von einer rein äufserlichen Unterschiedenheit, kein anderer als der sechste *Gaufs*ische Beweis, welchen *Gaufs* im Jahre 1818 in den *Goettinger Commentationes (recentiores)* dargestellt hat; der Unterschied besteht nämlich darin, dafs *Gaufs* zeigt, die Differenz zweier ganzen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ von x sei durch $\frac{1-x^p}{1-x}=X$ theilbar, während in der andern Darstellung desselben Beweises, auf welche sich Hr. Prof. *Jacobi* bezieht, gezeigt wird, dafs die ganze Function $\varphi(x)-\psi(x)$ verschwindet für alle Werthe von x, die $X=0$ machen; was offenbar Dasselbe ist.

Berlin im September 1847.