Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1847

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN243919689_0035

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0035|LOG_0020

12.

Aufgaben und Lehrsätze.

(Von Herrn Dr. phil. G. *Eisenstein*, Privatdocent zu Berlin.)

---

1. Es sei F eine homogene ganze Function $n$ten Grades mit 2 Variabeln; ihre Coëfficienten seien $a, b, c, \ldots.$ und ihre beiden Variabeln x, y. Setzt man $x = \alpha\xi + \beta\eta$ und $y = \gamma\xi + \delta\eta$, wo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so geht F in eine transformirte Function F' mit den Variabeln ξ, η über, deren Coëfficienten ich durch $a', b', c', \ldots.$ bezeichne; $a', b', c', \ldots.$ sind homogene Verbindungen aus $a, b, c, \ldots.$ vom ersten, und sie sind zugleich homogen in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vom $n$ten Grade. Jede homogene ganze Function $\varphi(a, b, c, \ldots.)$ der Coëfficienten, welche der Relation

$$\varphi(a', b', c', \ldots.) = \varphi(a, b, c, \ldots.)$$

genügt, heifse *eine Determinante* der Form F. Es läfst sich nun immer eine Anzahl von ***Fundamental-Determinanten*** aufstellen, aus welchen alle andern Determinanten algebraisch zusammengesetzt werden können, welche zugleich die einfachsten ihrer Art sind und selbst aus einander nicht zusammengesetzt werden können. Wie grofs ist die Anzahl dieser Fundamental-Determinanten für ein gegebenes n, und wie werden sie gebildet? Herr *Cayley* aus Cambridge, der Erste, welcher so viel ich weifs, dieses Problem in Anregung gebracht hat, vermuthet, dafs diese Anzahl entweder $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ sei, je nachdem n gerade oder ungerade ist, ohne jedoch einen strengen Beweis dieses Satzes gefunden zu haben. — Wenn man ferner alle Coëfficienten der Formen, so wie die Transformations-Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als ganze Zahlen annimmt, so behalten die Fundamental-Determinanten für alle untereinander äquivalente Formen, also für eine ganze Classe von Formen, sämmtlich dieselben Werthe: es soll nun bewiesen werden, dafs die Anzahl der Classen homogener Formen $n$ten Grades mit 2 Variabeln, welche zu demselben System gegebener Werthe der sämmtlichen Fundamental-Determinanten gehören, endlich ist, und es soll die Art der Abhängigkeit der Anzahl der Classen von den Werthen der Fundamental-Determinanten erforscht werden. — Endlich sollen alle homogenen Verbindungen $f(a, b, c, \ldots., x, y)$ von x, y, deren Coëfficienten von $a, b, c, \ldots.$ abhangen, aufgestellt werden, welche in ihre correspondirenden $f(a', b', c', \ldots. \xi, \eta)$ durch die Transformation übergehen, und welche ich determinirende Verbindungen der Form F nenne. Ich habe gezeigt, dafs für $n = 3$ eine determinirende Verbindung zweiten Grades existirt; *Cayley's* fruchtbare Principien liefern eine Menge von determinirenden Verbindungen.

2. Dieselben Untersuchungen in Bezug auf homogene Functionen von mehr als 2 Variabeln.

3. Wenn $m = a + bi$ eine ungerade complexe ganze Zahl ist, und x_1, x_2 irgend zwei der $a^2 + b^2 - 1$ von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung

$$m\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = 4\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

bezeichnen, so läfst sich bekanntlich x_1 als rationale gebrochene Function von x_2 mit ganzen complexen Coëfficienten darstellen; es läfst sich aber auch, wie noch nicht bekannt zu sein scheint, x_1 als *ganze* Function von x_2 darstellen, deren Coëfficienten, wenn sie auch nicht ganze Zahlen sind, doch nur Potenzen von 2 zu Nennern haben, d. h. es läfst sich immer ein ganzer Exponent μ finden, *so dafs* $2^\mu . x_1$ *einer ganzen Function von* x_2 *mit ganzen complexen Coëfficienten gleich ist;* der Grad dieser ganzen Function kann immer $\leqq a^2 + b^2 - 2$ gemacht werden. Jede ganze Function mit ganzen complexen Coëfficienten der sämmtlichen $a^2 + b^2 - 1$ Wurzeln der obigen Gleichung läfst sich daher, wenn man sie zuvor mit einer geeigneten Potenz von 2 multiplicirt, als ganze Function einer einzigen dieser Wurzeln mit *ganzen* complexen Coëfficienten darstellen; und zwar kann dies nur auf eine Art geschehen, wenn der Grad der letzteren ganzen Function $\leqq a^2 + b^2 - 2$ angenommen wird.

4. Wenn ein und dieselbe Function zweien verschiedenen Differentialgleichungen genügt: die einfachste Differentialgleichung für diese Function zu finden.

Druckfehler in diesem Bande.

S. 127 Z. 6 v. o. st. Factoren l. Primfactoren
— 154 — 2 v. u. st. reelle Theil l. Coëfficient von i
— 181 — 9 v. u. st. führen, sind l. führen
— 182 — 2 v. u. st. vierte l. dritte
— 186 — 8 v. u. st. Determinate l. Determinante
— 189 — 12 v. o. st. das Folgende l. die folgende
— 221 — 6 v. u. st. $\frac{1}{(x-\alpha)^g}$ l. $\frac{1}{(x-c)^g}$
— 240 — 12 v. u. fehlt in der Formel der Factor $\varphi(x)$
— 251 — 17 v. o. st. Acht hat l. berücksichtigt