

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1847

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN243919689\_0035

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689\\_0035|LOG\\_0024](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0035|LOG_0024)

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## 14.

## Notiz über A. Göpel.

Herr *Adolph Göpel*, Doctor der Philosophie und einer der Beamten der hiesigen Königlichen Bibliothek, ist wenige Wochen, nachdem er im März d. J. die wichtige Abhandlung „*Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis*“ zum Druck übergeben, einer kurzen aber schmerzlichen Krankheit erlegen. In den Stunden, welche ihm sein Amt frei liefs, widmete er sich tiefen mathematischen Speculationen. Die einzige Erholung von diesen fand er in der Musik, in welcher er es bis zu einer bedeutenden Fertigkeit gebracht hatte. In stiller Zurückgezogenheit scheint er selbst den Umgang mit den Gelehrten seines Faches vermieden zu haben, die erst nach seinem Tode erfuhren, welch' ein bedeutendes Talent unter ihnen gelebt hatte. Ich habe ihn nie gesehen.

Seine Jugenderlebnisse erzählt *Göpel* selbst in dem seiner Doctoral-dissertation angehängten Curriculum Vitae. Sein Vater, aus Sachsen gebürtig, war Musiklehrer in Rostock, wo er im September 1812 geboren wurde. Ein mütterlicher Oheim, der englischer Consul in Corsika war, nahm ihn in seinem zehnten Jahre mit sich nach Italien. Dort während eines wechselnden Aufenthaltes in mehreren Städten machte es sich dieser Oheim zum angelegentlichen Geschäft, seinen jungen Verwandten in den Anfangsgründen der Wissenschaften selbst zu unterrichten. Einen längeren Aufenthalt in Pisa während der beiden Winter von 1825 und 1826 benutzte der junge *Göpel*, um an der dortigen Universität den Vorlesungen der Professoren *Pieraccioli*, *Poletti*, *Gerbi* und *Gatteschi* über Algebra und Differentialrechnung, Statik und analytische Mechanik, theoretische und Experimentalphysik beizuwohnen. Im J. 1827 kehrte er nach seiner Vaterstadt Rostock zurück, und besuchte hierauf noch zwei Jahre die erste Classe des dortigen Gymnasiums, von wo er die Berliner Universität bezog. Er ergriff mit Eifer die ihm hier gebotene Gelegenheit einer mannichfachen Ausbildung, und hörte aufser mathematischen, physikalischen und chemischen auch noch philosophische, philologische, historische und ästhetische Vorlesungen. Tiefern mathematischen Studien wandte er sich erst nach Beendigung seiner Universitätszeit zu, und wurde, wie viele von denen, welche zur rein mathematischen Speculation berufen sind, zunächst von der höhern Zahlenlehre

angezogen. In seiner zur Erwerbung des Doctorgrades an der Berliner Universität im März 1835 vertheidigten Dissertation „*De aequationibus secundi gradus indeterminatis*,“ welche etwa  $1\frac{1}{2}$  Bogen umfaßt, legte er eine Probe dieser arithmetischen Studien ab, welche von großem Scharfsinn zeugte und seine Fähigkeit zu tiefen Forschungen bekundete. Da diese merkwürdige Dissertation nicht in den Handelsverkehr gekommen ist, will ich hier einige der hauptsächlichsten darin enthaltenen Resultate mittheilen.

Wenn man die Quadratwurzel einer Primzahl  $A$  von der Form  $4n+1$  in einen Kettenbruch verwandelt, so enthält, wie bekannt, die symmetrische Periode der Nenner zwei gleiche mittlere Terme. Sind die diesen entsprechenden vollständigen Quotienten

$$\frac{\sqrt{A+I}}{D}, \quad \frac{\sqrt{A+I'}}{D'},$$

so hat *Legendre* gezeigt, dafs

$$D = D', \quad A = I'I' + DD,$$

und dafs man daher auf diese Weise durch die Verwandlung der Quadratwurzel der Primzahl  $A$  in einen Kettenbruch ihre Zerfällung in zwei Quadrate erhält. Dieses schöne Resultat war bisher einzig in seiner Art geblieben. Durch tiefer eingehende Betrachtungen zeigt nun hier *Göpel*, wie man auch, wenn  $A$  eine Primzahl von der Form  $4n+3$  oder ihr Doppeltes ist, die Zerfällung von  $A$  in die Form  $\varphi^2 \pm 2\psi^2$  durch die Entwicklung von  $\sqrt{A}$  in einen Kettenbruch findet. *Ist nämlich A eine Primzahl von der Form  $8n+3$  oder ihr Doppeltes, so kommt man bei der Entwicklung von  $\sqrt{A}$  in einen Kettenbruch immer auf drei auf einander folgende vollständige Quotienten*

$$\frac{\sqrt{A+I^0}}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A+I}}{D}, \quad \frac{\sqrt{A+I'}}{D'},$$

in welchen  $D$  entweder  $= \frac{1}{2}D^0$  oder  $\frac{1}{2}D'$  oder  $\frac{1}{2}(D^0 + D')$  ist, und es wird in den beiden ersten Fällen

$$A = I^2 + 2D^2,$$

im dritten

$$A = \frac{1}{4}(I-I')^2 + 2D^2 = \frac{1}{16}(D^0 - D')^2 + 2D^2,$$

wo  $I-I'$  immer durch 2,  $D^0 - D'$  durch 4 aufgeht. Wenn dagegen  $A$  eine Primzahl von der Form  $8n+7$  oder ihr Doppeltes ist, so wird man bei der Verwandlung von  $\sqrt{A}$  in einen Kettenbruch immer auf zwei auf einander folgende vollständige Quotienten

$$\frac{\sqrt{A+I^0}}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A+I}}{D}$$

*kommen, für welche*

$$D + D^0 = 2I$$

*ist, und diese ergeben*

$$A = 2I^2 - \frac{1}{4}(D - D^0)^2,$$

*wo  $D - D^0$  immer gerade ist.*

Ich habe mit Hülfe der *Degenschen* Tafel die folgende Tabelle angefertigt, welche anzeigt, für welche Primzahlen von der Form  $8n + 3$  oder Doppelte von solchen die drei von *Göpel* unterschiedenen Fälle,

$$D = \frac{1}{2}D^0, \quad D = \frac{1}{2}D', \quad D = \frac{1}{2}(D^0 + D')$$

eintreten.

$D = \frac{1}{2}D^0$ : 3. 6. 11. 22. 38. 43. 59. 83. 131. 139. 179. 211. 214. 227.  
262. 278. 283. 326. 379. 419. 443. 467. 491. 502. 547. 619.  
659. 683. 694. 739. 787. 811. 827. 838. 971. 998.

$D = \frac{1}{2}D'$ : 67. 86. 118. 307. 331. 358. 422. 523. 563. 566. 571. 614.  
643. 662. 691. 859. 934. 947.

$D = \frac{1}{2}(D^0 + D')$ : 19. 107. 134. 163. 166. 251. 347. 454. 499. 587. 758.  
883. 886. 907. 982.

Es ist hierbei zu bemerken, daßs wenigstens in den hier betrachteten Zahlen unter 1000 der erste Fall bedeutend überwiegt, indem unter den 69 Zahlen 36 dem ersten, 18 dem zweiten, 15 dem dritten Falle angehören. Für die Primzahlen von der Form  $8n + 7$  und ihre Doppelten sind in ähnlicher Art die Fälle zu unterscheiden, in welchen  $D^0 > D$  oder  $D > D^0$ .

Nach dieser ersten Arbeit hat *Göpel* in einem Zeitraume von 12 Jahren nichts veröffentlicht, aufser in den Jahren 1843—45 mehrere kleine, mit Geist verfaßte, wenn gleich weniger bedeutende Aufsätze, welche er bei Gelegenheit der Correctur einer in Greifswalde von *Grunert* herausgegebenen mathematischen Zeitschrift niederschrieb. In einer derselben beweist er, *daßs wenn in einer Gleichung  $\left(\frac{x + \sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q}$ , wo  $x, y, p, n, P, Q$  ganze Zahlen bedeuten, der Nenner  $p$  von 1 verschieden ist, und  $x, y, p$  keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, immer  $p = 2$ ,  $n = 3$  oder ein Vielfaches von 3,  $x$  ungerade und  $y$  von der Form  $8n + 5$  sein muß.* Mit der Handhabung der synthetischen Methoden *Steiners* zeigt er sich in mehreren dieser Aufsätze vollkommen vertraut. Es ist zu vermuthen, daßs sich noch andere größere unpublicirte mehr oder minder ausgearbeitete Abhandlungen in seinem Nachlaß finden werden. Die von ihm kurz vor seinem Tode beendigte oben

angeführte Abhandlung behandelt einen hohen und abstracten Theil der Analysis, und giebt die Lösung eines der bedeutendsten Probleme, welches sich die gegenwärtige Mathematik gestellt hat, die umgekehrten Functionen der ersten Classe der *Abelschen* Integrale wirklich darzustellen. Durch eine glückliche Divination verallgemeinert er auf naturgemäße Art die einfachen Reihen  $\theta$ , auf welche ich die elliptischen Functionen zurückgeführt habe, und findet, daß diese verallgemeinerten Reihen die Coëfficienten der quadratischen Gleichung geben, deren beide Wurzeln in meiner Theorie der hyperelliptischen Functionen die simultanen Umkehrungsfunktionen zweier Integralsummen sind. Das einfache Mittel, dessen er sich hiezu bedient, ist die Multiplication zweier von den verallgemeinerten Reihen, wie ich ein ähnliches Verfahren für die Functionen  $\theta$  selbst im 3ten Bande des mathematischen Journals S. 305 angegeben habe. Meisterhaft ist die Art, wie er die Differentialgleichungen, welche er findet, ungeschreckt von ihrer Complication, durch eine passende Substitution in die verlangte Form der von mir aufgestellten Systeme der hyperelliptischen Differentialgleichungen bringt, und hierdurch das gestellte Problem vollständig erledigt. Aber *Göpel* war nicht der einzige, welcher sich mit Glück mit diesem schönen Probleme beschäftigt hat. Eine andere, umfangreichere Arbeit, welche, wie ich glaube, seit dem October v. J. einer berühmten Akademie vorliegt, und deren wesentlicher Inhalt mir von ihrem Verfasser und von mir auch einigen geehrten Freunden seit 3 Jahren bereits mitgetheilt worden ist, geht von derselben glücklichen Divination aus, und führt, wenn auch auf verschiedenem, vielleicht leichterm Wege zu denselben Resultaten.

Ich bemerke noch, daß die von *Göpel* angestellten Betrachtungen über die zweiten Differentiale seiner Functionen, welche für den jetzigen Zweck der Abhandlung überflüssig sind, so wie seine ausdrücklichen Worte S. 297 „*quas ad secundam speciem nostrarum functionum facere infra videbis*“ und S. 298 „*Quam infra ad tertiam speciem functionum quadrupliciter periodicarum pertinere videbis*“ auf weitere noch in der Abhandlung selbst auszuführende Untersuchungen deuten, die man aber in derselben mit Bedauern vermißt. Vielleicht finden sich dieselben in des Autors Papieren, die vielleicht auch das gewagt scheinende Wort rechtfertigen, daß eine ähnliche Methode sich auf alle Transcendenten erstrecke, welche aus der Integration algebraischer Größen entstehen. Auch dürfte schon nicht so ganz unbedenklich, wie der Verfasser meint, die Ausdehnung auf die Integrale erscheinen, in denen die unter dem Quadratwurzelzeichen befindliche Function den *sechsten* Grad übersteigt, da bei ihnen

die Anzahl der in den Reihen enthaltenen Constanten nicht mehr, wie bei den elliptischen und den *Abelschen* Integralen der ersten Classe, mit der Anzahl der Moduln übereinstimmt.

Wenn auch nicht in der ersten Jugendblüthe, wie *Galois* und *Abel*, so hat doch auch hier viel zu früh und mitten in der Arbeit der Tod ein bedeutendes Talent hinweggerafft. Freuen wir uns, dafs uns von demselben wenigstens ein schönes und dauerndes Denkmal hinterblieben ist. Bei der Gewohnheit der Deutschen, ihre Arbeiten überreif werden zu lassen, und ihrer Scheu, mit ihren besten Gedanken hervorzutreten, wären wir leicht um die Früchte der Arbeit *Göpels* gekommen, wenn ihn nicht ein von Hrn. *Hermite* an mich gerichteter Brief, wie in der Einleitung der Abhandlung angedeutet ist, zu ihrer Bekanntmachung bewogen hätte; oder es hat ein dunkles Vorgefühl, das uns aus den Worten „quum magis quam optabam festinandum fuisset“ anspricht, ihn zur Eile ermahnt.

Berlin, d. 22. Sept. 1847.

C. G. J. Jacobi.

---

Der Herausgeber dieses Journals bemerkt noch, dafs der Herr Dr. *Göpel*, als er ihm das Manuscript zu der nunmehr hier gedruckten Abhandlung übergab, dabei auf Befragen äufserte, er habe nicht die Absicht gehabt, an der Bewerbung um den von der Pariser Akademie ausgesetzten Preis Theil zu nehmen; es genüge ihm, wie er hinzufügte, die Freude, welche er an der Beschäftigung mit der Mathematik finde. Dafs diese letzte Bemerkung ernst gemeint war, davon ist der offenbarste Beweis der, dafs, wie es die vorstehende Notiz berichtet, der Herr Dr. *Göpel*, in den 12 Jahren seit seiner Doctor-Dissertation bis auf die gegenwärtige Abhandlung leider! nur Weniges weiter öffentlich bekannt gemacht hat, und dafs sogar die übrigen Früchte seiner Beschäftigung mit der Mathematik andern hiesigen Mathematikern unbekannt geblieben waren. Als daher der Herausgeber dieses Journals dem Herrn Dr. *Göpel*, indem er ihm den besten Dank für den schönen Beitrag zum Journale sagte, bemerklich machen mußte, dafs er wegen der grossen Menge schon vorliegender, ebenfalls wichtiger Beiträge, mit dem besten Willen nicht im Stande sei, den Druck seiner Abhandlung im Journal *unverzüglich* geschehen zu lassen, oder ihn auch nur in dem Maafse zu beschleunigen, wie er es wohl wünschte, hatte der Herr Dr. *Göpel* gegen den Aufschub nichts einzuwenden. Der Herausgeber des Journals war nun bemüht, die Abhandlung so schnell als möglich in das Journal zu bringen; aber so eben, als darauf bald wirklich der Raum dazu sich ergab, hörte er die Nachricht von dem fast plötzlichen

Dahinscheiden des Herrn Verfassers. Wäre es auch nur entfernt zu ahnden gewesen, daß dieses traurige Ereigniß so nahe bevorstehe, so würde der Herausgeber *alles* Andre unbedingt aufgeschoben und die Abhandlung des Herrn Dr. *Göpel* sofort zum Druck befördert haben. Allein dies war durchaus nicht der Fall. Herr *Göpel* stand noch im ersten Mannes-Alter und schien nichts weniger als kränklich. Dem Herausgeber ist es indessen bei dem Allen wahrhaft schmerzlich, daß er nicht dennoch die Abhandlung vor allem Anderem drucken liefs, und daß es nicht noch *vor* dem Hinscheiden des Verfassers geschehen ist.

Der Herausgeber hat den Herrn Dr. *Göpel* nur einmal, etwa eine Stunde lang, gesehen und gesprochen; aber er wird sich dessen stets mit einer wehmüthigen Freude erinnern; denn er fand in ihm nicht allein einen unverkennbar wahren Gelehrten, sondern auch eine, durch Bescheidenheit, Offenheit, durch die feinste Bildung und die angenehmsten geselligen Formen liebenswürdige Persönlichkeit, in einem Maafse, wie es nur selten vorkommt. Von seinen Mitarbeitern in der Bibliothek ist er stets hochgeachtet und geliebt worden; so wie von Allen, die ihn sonst kannten. Und Gelehrter war er nicht blofs in der Mathematik, von einem Range, wie er sich in seinen Abhandlungen zu erkennen giebt, sondern, wie der Herausgeber gehört hat, auch in andern Wissenschaften. In der Musik war sein theoretisches Wissen und seine practische Übung, wie dem Herausgeber einer seiner Bekannten gesagt hat, der den Herrn *Göpel* lange und genau kannte, und der ein urtheilsberechtigter Kenner ist, sehr bedeutend. Der Herr Dr. *Göpel* war daher in mehr als einem Betracht ein höchst ausgezeichneter Mann, dessen so früher Hintritt als ein wahrer Verlust für die Wissenschaft und die Kunst zu betrachten sein dürfte.

Der Herausgeber hat einige Hoffnung, noch andre fertige mathematische Arbeiten des Herrn Dr. *Göpel* für das Journal aus dessen Nachlaß zu erhalten, und er wird sich, wenn diese Hoffnung erfüllt werden sollte, beeilen, diese Arbeiten dem mathematischen Publicum mitzutheilen. Zur Aufnahme der Dissertation in das Journal, von welcher der Herr Prof. *Jacobi* vorstehend eine so schöne Übersicht giebt, hat er schon die Erlaubniß erlangt, und es wird daher diese Dissertation jedenfalls und sobald als möglich in dem Journale gedruckt werden. Auch glaubt er, wegen der Ausgezeichnetheit des Mannes, nicht zu fehlen, wenn er, wie es geschehen soll, nach den noch vorrätigen, schon gedruckten und vertheilten Fac-simile's, einem der folgenden Hefte ein Fac-simile der Handschrift des Herrn *Göpel* beifügt.

Berlin, den 25. Septbr. 1847.

A. L. Crelle.