

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1847

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0035

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0035

LOG Id: LOG_0027

LOG Titel: Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

17.

Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.

(Par Mr. G. Eisenstein.)

Mr. Dirichlet, à la fin de son beau mémoire sur les formes quadratiques ^{*}), à remarqué que par la combinaison de deux théories, dont on doit l'une à lui-même, l'autre à Mr. Gauss, on peut trouver des expressions très-simples et très-remarquables du nombre des représentations d'un entier donné par la somme de trois carrés. J'ai trouvé qu'il existe des formules absolument semblables pour le nombre des représentations d'un entier donné par la somme de cinq carrés.

Nous rapporterons ici ces formules pour les cas les plus simples. Désignons par $\varphi(m)$ le nombre des solutions de l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = m$, et par $\psi(m)$ le nombre des solutions de celle-ci: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 = m$, m étant un nombre entier quelconque donné, et les variables pouvant avoir toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à ∞ . Pour abrégér, je suppose impair, et sans diviseur carré, l'entier m à décomposer, c'est-à-dire: je suppose m égal au produit d'un nombre quelconque de facteurs premiers impairs différents.

Cela posé, on trouve au moyen des recherches de Mr. Dirichlet:

$$m \equiv 1 \pmod{4}, \varphi(m) = 24 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right); \quad m \equiv 3 \pmod{8}, \varphi(m) = 8 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right);$$

où $\left(\frac{\mu}{m}\right)$ est le symbole généralisé de Legendre; et il faut poser $\left(\frac{\mu}{m}\right) = 0$ pour toutes les valeurs de μ qui ne sont pas premières à m .

Mes propres recherches m'ont donné

$$m \equiv 1 \pmod{8}, \psi(m) = -80 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu, \text{ (excepté } m = 1);$$

$$m \equiv 3 \pmod{8}, \psi(m) = -80 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^\mu \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu \\ = +320 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-3)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu + \frac{10}{3}m\varphi(m);$$

$$m \equiv 5 \pmod{8}, \psi(m) = -112 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu;$$

$$m \equiv 7 \pmod{8}, \psi(m) = +80 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^\mu \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu = 320 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-3)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu.$$

Soient encore $\alpha; \beta$ les entiers impairs au dessous de m qui sont resp. $\equiv 1 \pmod{4}, \equiv 3 \pmod{4}$, on a

$$\frac{1}{80}\psi(2m) = m \left\{ \sum \left(\frac{2}{\alpha}\right) \left(\frac{\alpha}{m}\right) + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \sum \left(\frac{2}{\beta}\right) \left(\frac{\beta}{m}\right) \right\} - (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \sum \left(\frac{2}{\beta}\right) \left(\frac{\beta}{m}\right)\beta.$$

Oct. 1847.

^{*}) Recherches sur diverses applications de l'Analyse inf. à la Théorie des Nombres.

Fac-simile einer Handschrift von Bessel.

Königsberg d. 6 Januar 1828.

Das Journal für Mathematik, welches Sie. Hochwohlgeboren herausgeben, ist mir allerdings zu Gesicht gekommen, und ich gestehe daß ich auch nicht glaube, daß Sie darüber zweifelhaft sein können, wie der Eingang Ihres gestrigen Briefes vom 16. v. M. ausgedeutet scheint. Hiü sollte ich mich nicht beifert haben, eine Zeitschrift kennen zu lernen, welche unserm Lande zur größten Ehre gereicht? — Die Aufsätze von Steiner, Abel, Jacobi u. d. l. sind wahrlich nichts so alltäglich vorkommendes, daß man nicht mit Wärme das Verdienst anerkennt, welches darin liegt, einen schriftlichen Ort zu schaffen und zu erhalten, wo solche Arbeiten niedergelegt werden können.

Ihre Aufforderung auch meiner Theilnahme an Ihren Zeitschrift, erkenne ich mit Dank. Allein Sie wissen, daß meine ^{Thätigkeit} dort so ausschließlich der Astronomie gewidmet ist, daß selten Zeit übrig bleibt, etwas Mathematisches zu treiben, außer wenn es in unmittelbarer Verbindung mit astronomischen Geschäften steht. Dazu kommt, daß ich durch eine Untersuchung über die Pendeltängen, gerade jetzt so unerküthlich lange Zeit vertoten habe, daß sogar die allernothwendigsten astronomischen Geschäfte antworten liegen bleiben, oder doch hintenangestellt werden müßten. Dieses Hindernis ist nun gehoben, und Sie können, wenn Sie wollen, die Resultate meiner langen Arbeit, in der Akademie hören wo Herr Encke meine, mit dem heutigen fahrenden Post abgegangene Abhandlung vortragen wird. Vielleicht wird mir dadurch eine geschäftsfreiere Zukunft, und wenn Sie eine oder die andere reinmathematische Frucht tragen sollte, so werde ich es mir zur Ehre rechnen Ihr Anerbieten zu benutzen.

?

J. Bessel