Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1847
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0035
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0035

LOG Id: LOG_0027
LOG Titel: Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

17.

Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.

(Par Mr. G. *Eisenstein.*)

Mr. *Dirichlet,* à la fin de son beau mémoire sur les formes quadratiques *), a remarqué que par la combinaison de deux théories, dont on doit l'une à lui-même, l'autre à Mr. *Gaufs,* on peut trouver des expressions très-simples et très-remarquables du nombre des représentations d'un entier donné par la somme de *trois* carrés. J'ai trouvé qu'il existe des formules absolument semblables pour le nombre des représentations d'un entier donné par la somme de *cinq* carrés.

Nous rapporterons ici ces formules pour les cas les plus simples. Désignons par $\varphi(m)$ le nombre des solutions de l'équation $x^2+y^2+z^2=m$, et par $\psi(m)$ le nombre des solutions de celle-ci: $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2=m$, m étant un nombre entier quelconque donné, et les variables pouvant avoir toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour abréger, je suppose impair, et sans diviseur carré, l'entier m à décomposer, c'est-à-dire: je suppose m égal au produit d'un nombre quelconque de facteurs premiers impairs différents.

Celà posé, on trouve au moyen des recherches de Mr. *Dirichlet:*

$$m\equiv 1 \text{ (mod. 4)},\ \varphi(m)=24\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right);\quad m\equiv 3 \text{ (mod. 8)},\ \varphi(m)=8\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right);$$

où $\left(\frac{\mu}{m}\right)$ est le symbole généralisé de *Legendre;* et il faut poser $\left(\frac{\mu}{m}\right)=0$ pour toutes les valeurs de μ qui ne sont pas premières à m.

Mes propres recherches m'ont donné

$$m\equiv 1 \text{ (mod. 8)},\quad \psi(m)=-\ 80\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu,\ \text{(excepté } m=1\text{)};$$

$$m\equiv 3 \text{ (mod. 8)},\quad \psi(m)=-\ 80\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^{\mu}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu$$

$$=+320\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-3)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu+\tfrac{10}{3}m\varphi(m);$$

$$m\equiv 5 \text{ (mod. 8)},\quad \psi(m)=-112\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu;$$

$$m\equiv 7 \text{ (mod. 8)},\quad \psi(m)=+\ 80\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)}(-1)^{\mu}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu=320\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-3)}\left(\frac{\mu}{m}\right)\mu.$$

Soient encore α; β les entiers impairs au dessous de m qui sont resp. $\equiv 1$ (mod. 4), $\equiv 3$ (mod. 4), on a

$$\tfrac{1}{80}\psi(2m)=m\left\{\Sigma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{m}\right)+(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\Sigma\left(\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{m}\right)\right\}-(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\Sigma\left(\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{m}\right)\beta.$$

Oct. 1847.

*) Recherches sur diverses applications de l'Analyse inf. à la Théorie des Nombres.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 35 Heft 4.

Fac-simile einer Handschrift von Bessel.

Königsberg d. 6 Januar 1828.

. . . .

. . . .

Das Journal für Mathematik, welches Ew. Hochwohlgeboren herausgeben, ist mir allerdings zu Gesicht gekommen, und ich gestehe daß ich auch nicht glaube, daß Sie darüber zweifelhaft sein können, wie der Eingang Ihres geehrten Briefes vom 15ten v. M. anzudeuten scheint. Wie sollte ich mich nicht beeifert haben, eine Zeitschrift kennen zu lernen, welche unserm Lande zur größten Ehre gereicht? — Die Aufsätze von Steiner, Abel, Jacobi u. A. sind wahrlich nichts so alltäglich vorkommendes, daß man nicht mit Wärme das Verdienst anerkennen sollte, welches darin liegt, einen schicklichen Ort zu schaffen und zu erhalten, wo solche Arbeiten niedergelegt werden können.

Ihre Aufforderung auch meiner Theilnahme an Ihrer Zeitschrift, erkenne ich mit Dank. Allein Sie wissen, daß meine ~~Zeit~~ Thätigkeit so ausschließlich der Astronomie gewidmet ist, daß selten Zeit übrig bleibt, etwas Mathematisches zu treiben, außer wenn es in unmittelbarer Verbindung mit astronomischen Geschäften steht. Dazu kömmt, daß ich durch eine Untersuchung über die Pendellängen, gerade jetzt so unverhältlich lange Zeit verloren habe, daß sogar die allernothwendigsten astronomischen Geschäfte entweder liegen bleiben, oder doch hintenangesetzt werden mußten. Dieses Hinderniß ist nun gehoben, und Sie können, wenn Sie wollen, die Resultate meiner langen Arbeit, in der Akademie hören wo Herr Encke meine, mit der heutigen fahrenden Post abgegangene Abhandlung vortragen wird. Vielleicht wird mir dadurch eine geschäftsfreiere Zukunft, und wenn diese eine oder die andre reinmathematische Frucht tragen sollte, so werde ich es mir zur Ehre rechnen Ihr Anerbieten zu benutzen.

. . . .

. . . .

F W Bessel