# 2.

# Über Reihenentwicklungen, welche nach den Potenzen eines gegebenen Polynoms fortschreiten, und zu Coefficienten Polynome eines niedereren Grades haben.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt*.)

---

## 1.

### Lösung der Aufgabe nach der Methode der Entwicklungs-Coefficienten.

Wenn man eine Function von $x$ nach den Potenzen eines endlichen Polynoms:

$$P = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

entwickelt, so kann diese Entwicklung

$$(1.)\qquad \alpha + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \alpha_3 P^3 + \cdots = f(x)$$

wenn $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ constante, nicht vieldeutige Coefficienten bedeuten, für jeden gegebenen Werth von $P$ nur für *einen* der $n$ Werthe von $x$ gültig sein, welche dem gegebenen Werthe von $P$ entsprechen. Convergirt nämlich die Reihe für einen gegebenen Werth $P = b$, so hat sie einen vollkommen bestimmten Werth; die Function $f(x)$ aber erhält, wenn man für $x$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P = b$ setzt, $n$ verschiedene Werthe, und es kann nur einer derselben mit dem Werthe der Reihe

$$\alpha + \alpha_1 b + \alpha_2 b^2 + \cdots$$

übereinstimmen.

Wenn aber die Coefficienten keine Constanten, sondern Polynome des $(n-1)$ten Grades von $x$ bedeuten, so kann die Gleichung (1.) für alle $n$ Werthe von $x$ gelten, welche demselben Werthe von $P$ entsprechen. Bezeichnet man in diesem Falle mit

$$X,\quad X_1,\quad X_2,\quad \ldots\quad X_{n-1}$$

Polynome vom $(n-1)$ten Grade, so kann man der Reihe (1.) immer die Form

$$XS + X_1 S_1 + \cdots + X_{n-1} S_{n-1} = f(x)$$

geben, in welcher $S, S_1, \ldots S_{n-1}$ nach den Potenzen von $P$ fortschreitende

Reihen mit *constanten* Coefficienten bedeuten, und es wird die Gleichung (1.) für alle Werthe von $x$ gelten, für welche die Gröfse $P$ solche Werthe erhält, dafs die $n$ Reihen $S$, $S_1$ ... convergiren.

Wenn die Function $f(x)$ ebenfalls ein endliches Polynom ist, so wird die Reihe (1.) immer abbrechen.

Man findet dann den Coefficienten $\alpha$ als Rest der Division von $f(x)$ durch $P$; nennt man den Quotienten dieser Division $f_1(x)$, so findet man $\alpha_1$ als Rest der Division von $f_1(x)$ durch $P$, u. s. f.

Diese Methode, die Coefficienten $\alpha$, $\alpha_1$, etc. zu bestimmen, ist aber nicht mehr anwendbar, wenn $f(x)$ nach den Potenzen von $x$ *ins Unendliche* fortschreitet.

Für diesen Fall kann man den Coefficienten des allgemeinen Gliedes $\alpha_i$, wenn man die Möglichkeit der Entwicklung (1.) voraussetzt, durch folgende Betrachtungen finden.

Man dividire nämlich die Gleichung (1.), in welcher $f(x)$ eine nach den ganzen positiven Potenzen von $x$ entwickelte Reihe bedeute, durch $P^{i+1}$, und entwickle jeden Term des hierdurch erhaltenen Ausdrucks:

$$(2.)\qquad \frac{\alpha}{P^{i+1}}+\frac{\alpha_1}{P^i}+\cdots+\frac{\alpha_i}{P}+\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}P+\text{etc.}=\frac{f(x)}{P^{i+1}}$$

nach den *absteigenden* Potenzen von $x$, so erhält man aus der Entwicklung der Terme

$$\alpha_{i+1}+\alpha_{i+2}P+\cdots\text{ etc.}$$

gar keine negativen Potenzen von $x$; die aus der Entwicklung von $\frac{\alpha_i}{P}$ entstehenden negativen Potenzen von $x$ beginnen von $\frac{1}{x}$, weil die Polynome $\alpha$, $\alpha_1$, etc. um einen Grad niedriger als $P$ sein sollen; die aus der Entwicklung von $\frac{\alpha_{i-1}}{P^2}$ hervorgehenden negativen Potenzen von $x$ beginnen mit $\frac{1}{x^{n+1}}$, u. s. f.

In dem Producte

$$f(x)\frac{1}{P^{i+1}},$$

in welchem der eine Factor $f(x)$ nach den aufsteigenden, der andre $\frac{1}{P^{i+1}}$ nach den absteigenden Potenzen von $x$ entwickelt ist, kann daher das Aggregat derjenigen Terme, welche in

$$\frac{1}{x},\quad \frac{1}{x^2},\quad \ldots\quad \frac{1}{x^n}$$

multiplicirt sind, nur aus der Entwicklung eines einzigen Terms, des dem Bruche $\frac{f(x)}{p^{i+1}}$ gleichen Ausdrucks (2.), nämlich des Terms $\frac{\alpha_i}{P}$, hervorgehen, weil, wie man gesehen hat, jeder Term $\frac{\alpha_{i+k}}{p^{1-k}}$ nur positive Potenzen von $x$, und jeder Term $\frac{\alpha_{i-k}}{p^{1+k}}$ nur höhere Potenzen von $\frac{1}{x}$ als $\frac{1}{x^n}$ giebt

Wenn man demnach dieses Aggregat mit:

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}$$

bezeichnet, so hat man:

$$(3.)\qquad \frac{\alpha_i}{P}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\cdots \text{ etc.}$$

wo die auf $\frac{A_n}{x^n}$ folgenden Glieder nur höhere Potenzen von $\frac{1}{x}$ als die *n*te enthalten. ***Multiplicirt man daher den Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{p^{i+1}}$, welcher nur die negativen Potenzen von $x$ enthält mit $P$ und behält in dem Producte nur die positiven Potenzen von $x$ bei, so erhält man den gesuchten Coefficienten $\alpha_i$.*** Denn dieser Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{p^{i+1}}$ weicht, dem Vorstehenden zufolge, von der Entwicklung von $\frac{\alpha_i}{P}$ nur in den Potenzen von $\frac{1}{x}$ ab, welche höher als die *n*te sind, und diese geben mit $P$ multiplicirt, keine positive Potenz von $x$.

Wenn $F(x)$ eine Reihe ist, welche gleichzeitig positive und negative Potenzen von $x$ enthält, so kann man den blos die negativen Potenzen von $x$ enthaltenden Theil dieser Reihe besonders darstellen. Derselbe wird nämlich, wie ich in den Disquis. Analyt. de fractionibus simplicibus gezeigt habe, der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{F(h)}{x-h},$$

wenn man diese Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von $h$, den absteigenden von $x$ anstellt.

Hiernach wird für unsern Fall der Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{p^{i+1}}$, welcher nur die negativen Potenzen von $x$ enthält, der Coefficient von $\frac{1}{h}$

in der Entwicklung des Bruches:

$$\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}(x-h)}.$$

Um $\alpha_i$ zu erhalten, hat man diesen Ausdruck, zufolge des im Vorstehenden Bewiesenen, mit $P$ zu multipliciren, und im Producte:

$$\frac{P}{x-h} = P\Big(\frac{1}{x}+\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}+\frac{h^3}{x^4}+\cdots \text{ etc.}\Big)$$

nur die positiven Potenzen von $x$, die Constante mit eingeschlossen, beizubehalten. Wenn man:

$$\begin{aligned} P_1 &= p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots+p_nx^{n-1} \\ P_2 &= p_2+p_3x+p_4x^2+\cdots+p_nx^{n-2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n &= p_n \end{aligned}$$

setzt, so folgt hieraus, dafs $\alpha_i$ der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung von $\{P_1+P_2h+P_3h^2+\cdots+P_nh^{n-1}\}\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}}$ ist. Giebt man demnach dem Polynome $(n-1)$ten Grades, welchem der gesuchte Coefficient $\alpha_i$ gleich ist, die Form:

$$\begin{aligned} &\beta_1^{(i)}\{p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots+p_nx^{n-1}\} \\ +&\beta_2^{(i)}\{p_2+p_3x+p_4x^2+\cdots+p_nx^{n-2}\} \\ +&\beta_3^{(i)}\{p_3+p_4x+\cdots\cdots\cdots+p_nx^{n-3}\}+\cdots+\beta_n^{(i)} = \alpha_i \end{aligned}$$

wo $\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \ldots \beta_n^{(i)}$ Constanten sind, so wird $\beta_k^{(i)}$ der Coefficient von $\frac{1}{h^k}$ in der Entwicklung von

$$\frac{f(h)}{\{P(h)\}^{i+1}}$$

oder, wenn man $x$ für $h$ schreibt gleich *dem Coefficienten von* $\frac{1}{x^k}$ *in der Entwicklung des Bruchs*

$$\frac{f(x)}{P^{i+1}}.$$

Wenn $f(x)$ eine unendliche Reihe ist, so wird $f(x)\frac{1}{P^{i+1}}$ ein Product, dessen einer Factor nach den positiven, der andre nach den negativen Potenzen von $x$ in's Unendliche fortschreitet, und daher jeder Coefficient dieses Productes ebenfalls eine unendliche Reihe. Man kann aber, wenn man die Factorenzerfällung von $P$ kennt, die Coefficienten der negativen Potenzen in diesem Producte oder die Gröfsen $\beta_k^{(i)}$ auf folgende Art durch einen endlichen

Ausdruck darstellen. Zufolge der von mir in den angeführten Untersuchungen über Partialbrüche gegebenen Sätze wird nämlich der Theil der Entwicklung von $\frac{f(x)}{P^{i+1}}$, welcher blofs die negativen Potenzen von $x$ enthält, der Coefficient von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung der Summe:

$$\Sigma \frac{f(x_1+h)}{\{P(x_1+h)\}^{i+1}(x-x_1-h)},$$

wenn man diese Summe über alle Wurzeln $x_1$ der Gleichung $P=0$ ausdehnt, und die Entwicklung nach den aufsteigenden Potenzen von $h$, den absteigenden von $x$ anstellt *). Es wird daher der Coefficient von $\frac{1}{x^k}$ in der Entwicklung von $\frac{F(x)}{P^{i+1}}$ oder die Gröfse $\beta_k^{(i)}$ gleich dem Coefficienten von $\frac{1}{h}$ in der Entwicklung von

$$\Sigma \frac{(x_1+h)^{k-1}f(x_1+h)}{\{P(x_1+h)\}^{i+1}}.$$

Setzt man $P=p_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, so wird $\beta_k^{(i)}$ gleich dem Coefficienten von $h^i$ in der Entwicklung von

$$\frac{1}{p_n^{i+1}}\Sigma \frac{(x_1+h)^{k-1}f(x_1+h)}{\{(x_1+h-x_2)(x_1+h-x_3)\dots(x_1+h-x_n)\}^{i+1}}$$

oder

$$\beta_k^{(i)} = \frac{1}{p_n^{i+1}}\Sigma \frac{\partial^i \frac{x_1^{k-1}f(x_1)}{\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2\dots i.\partial x_1^i}$$

wo man während der Differentiationen nach einer der Gröfsen $x_1, x_2, \dots, x_n$ immer die andern sämmtlich als constant anzusehen hat.

## §. 2.

### Lösung der Aufgabe mittelst der *Lagrange*schen Reihe.

Man kann zu diesen Resultaten auch durch folgende Betrachtungen mit Hülfe der *Lagrange*schen Reihe gelangen.

Wenn man das Polynom

$$P = y$$

---

*) Aehnliche Sätze hat Hr. *Cauchy* fast um dieselbe Zeit in seinen *Exercices d'Analyse* aufgestellt, und ihnen eine sehr grofse Entwicklung gegeben, so dafs er es für nöthig gehalten hat, dafür neue Benennungen und Zeichen einzuführen, und daraus einen eignen Calcul zu machen, den er *Calcul des Résidus* nennt.

setzt, so erhält die vorgelegte Entwicklung von $f(x)$ die Form einer ganzen Function von $x$ vom $(n-1)$ten Grade, deren Coefficienten nach den ganzen, positiven Potenzen von $y$ aufsteigende Reihen sind. Das Eigenthümliche dieser Entwicklung besteht darin, dafs sie gültig bleiben soll, wenn man für denselben Werth von $y$ für die Gröfse $x$ jede Wurzel der Gleichung $P=y$ setzt. Bezeichnet man daher die $n$ Wurzeln der Gleichung $P=y$ mit:

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n,$$

so erfordert die hier vorgelegte Aufgabe, zuerst eine ganze Function von $x$ vom $(n-1)$ten Grade zu bestimmen, welche, wenn man für $x$ nach einander die Werthe $X_1, X_2, \ldots X_n$ setzt, respective die Werthe

$$f(X_1), \quad f(X_2), \quad \ldots \quad f(X_n)$$

annimmt; die Coefficienten dieser Function, welche auf bekannte Art durch die Gröfsen

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots \quad X_n, \quad f(X_1), \quad f(X_2), \quad \ldots \quad f(X_n)$$

ausgedrückt werden, sind dann mittelst der Gleichung $P=y$ nach den ganzen positiven Potenzen von $y$ zu entwickeln, was, wie ich zeigen will, mit Hülfe des *Lagrange*schen Lehrsatzes geschehen kann.

Aus der Gleichung

$$P-y = p+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n-y = p_n(x-X_1)(x-X_2)\ldots(x-X_n)$$

folgt:

$$\begin{aligned}\frac{P-y}{x-X_1} &= p_n(x-X_2)(x-X_3)\ \ldots\ (x-X_n)\\ &= p_1+p_2x+\cdots+p_nx^{n-1}\\ &\quad +X_1(p_2+p_3x+\cdots+p_nx^{n-2})\\ &\quad +X_1^2(p_3+p_4x+\cdots+p_nx^{n-3})+\cdots+p_nX_1^{n-1}\end{aligned}$$

Setzt man $P'(x)=\frac{dP}{dx}$, so wird

$$P'(X_1) = p_n(X_1-X_2)(X_1-X_3)\ \ldots\ (X_1-X_n).$$

Mittelst dieser und der ähnlich gebildeten Gleichungen kann die bekannte *Lagrange*sche Formel*, durch welche eine ganze Function vom $(n-1)$ten Grade ausgedrückt wird, welche für $x=X_1, X_2, \ldots X_n$ respective die Werthe $f(X_1), f(X_2), \ldots f(X_n)$ annimmt,

$$
\begin{aligned}
& f(X_1)\cdot\frac{(x-X_2)(x-X_3)\dots(x-X_n)}{(X_1-X_2)(X_1-X_3)\dots(X_1-X_n)} \\
& +f(X_2)\cdot\frac{(x-X_1)(x-X_3)\dots(x-X_n)}{(X_2-X_1)(X_2-X_3)\dots(X_2-X_n)} \\
& +\dots\dots\dots\dots\dots \\
& +f(X_n)\cdot\frac{(x-X_1)(x-X_2)\dots(x-X_{n-1})}{(X_n-X_1)(X_n-X_2)\dots(X_n-X_{n-1})}
\end{aligned}
$$

folgendermafsen dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
& (p_1+p_2x+\dots+p_nx^{n-1})\left\{\frac{f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{f(X_n)}{P'(X_n)}\right\} \\
& +(p_2+p_3x+\dots+p_nx^{n-2})\left\{\frac{X_1f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_nf(X_n)}{P'(X_n)}\right\} \\
& +(p_3+p_4x+\dots+p_nx^{n-3})\left\{\frac{X_1^2f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^2f(x_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^2f(X_n)}{P'(X_n)}\right\} \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& +p_n\left(\frac{X_1^{n-1}f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^{n-1}f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^{n-1}f(X_n)}{P'(X_n)}\right).
\end{aligned}
$$

Die $n$ Summen rechter Hand hat man nach den ganzen positiven Potenzen von $y$ zu entwickeln. Der Coefficient von $y^i$ in der Entwicklung der Summe:

$$\frac{X_1^{k-1}f(X_1)}{P'(X_1)}+\frac{X_2^{k-1}f(X_2)}{P'(X_2)}+\dots+\frac{X_n^{k-1}f(X_n)}{P'(X_n)}$$

ist die im ersten §. mit $\beta_k^{(i)}$ bezeichnete Gröfse.

Setzt man

$$\int x^{k-1}f(x)dx = \psi_k(x)$$

und bezeichnet man mit $Y_k$ die Summe:

$$\psi_k(X_1)+\psi_k(X_2)+\dots+\psi_k(X_n) = Y_k,$$

so erhält der obige Ausdruck, durch welchen $f(x)$ dargestellt worden ist, die einfachere Form:

$$
\begin{aligned}
& (p_1+p_2x+\dots+p_nx^{n-1})\frac{dY_1}{dy} \\
& +(p_2+p_3x+\dots+p_nx^{n-2})\frac{dY_2}{dy}+\dots+p_n\frac{dX_n}{dy} = f(x)
\end{aligned}
$$

Es wird daher $\beta_k^{(i)}$ der Coefficient von $y^i$ in der Entwicklung von $\frac{dY_k}{dy}$, oder *man erhält $\beta_k^{(i)}$, wenn man den Coefficienten von $y^{i+1}$ in der Entwicklung von $Y_k$ mit $i+1$ multiplicirt.*

Um jeden der einzelnen Terme

$$\psi_k(X_1),\quad \psi_k(X_2)\quad \dots\quad \psi_k(X_n),$$

deren Aggregat mit $Y_k$ bezeichnet worden ist, nach den ganzen positiven Potenzen von $y$ entwickeln zu können, mufs man, wenn man hierzu den *Lagrange*schen Lehrsatz benutzen will, die Gleichung $P=y$ auf verschiedene Arten auf die von *Lagrange* zu Grunde gelegte Form:

$$\alpha - x + y\varphi(x) = 0$$

bringen. Die *Lagrange*sche Entwicklung bezieht sich nämlich auf diejenige Wurzel dieser Gleichung, welche für $y=0$ den Werth $\alpha$ erhält oder einen solchen Werth, für welchen nicht zugleich die Function $\varphi(x)$ unendlich wird. Setzt man

$$P = p_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

so reduziren sich die Wurzeln der Gleichung $P=y$ für $y=0$ auf $x_1, x_2, \dots x_n$, und ich will $X_m$ diejenige nennen, welche für $y=0$ den Werth $x_m$ erhält. Um eine auf diese Wurzel $X_m$ bezügliche Entwicklung mittelst des *Lagrange*schen Lehrsatzes zu erhalten; mufs man der obigen Bemerkung zufolge die Gleichung $P=y$ folgendermafsen darstellen:

$$x_m - x + \frac{y}{p_n(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\dots(x-x_n)} = 0,$$

so dafs für die verschiedenen Wurzeln $X_1, X_2, \dots X_n$ die Gröfse $\alpha$ in der *Lagrange*schen Gleichung respective die Werthe $x_1, x_2, \dots x_n$ erhält, und für $\varphi(x)$ die Functionen

$$\frac{x-x_1}{P},\quad \frac{x-x_2}{P},\quad \dots\quad \frac{x-x_n}{P}$$

zu setzen sind.

Die *Lagrange*sche Reihe giebt, wenn $\psi(x)$ eine beliebige Function von $x$ und $\psi'(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$ ist,

$$\psi x = \psi\alpha + y\varphi\alpha\psi'\alpha + y^2\frac{d.(\varphi\alpha)^2\psi'\alpha}{2d\alpha} + y^3\frac{d^2(\varphi\alpha)^3\psi'\alpha}{2.3d\alpha^2} + \text{etc.}$$

Setzt man hierin:

$$\psi x = \psi_k(x) = \int x^{k-1}f(x)\,dx$$

so erhält man

$$\psi_k(x) = \psi_k(\alpha) + y\alpha^{k-1}f\alpha\varphi\alpha + y^2\frac{d\alpha^{k-1}f\alpha(\varphi\alpha)^2}{2d\alpha} + y^3\frac{d^2\alpha^{k-1}f\alpha(\varphi\alpha)^3}{2.3d\alpha^2} + \text{etc.}$$

Setzt man in der Reihe rechts vom Gleichheitszeichen:

$$\alpha = x_1, \quad \varphi x = \frac{1}{p_n(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)},$$

so erhält man die Entwicklung von $\psi(X_1)$ und auf ähnliche Art die Entwicklung von $\psi(X_2)$, $\psi(X_3)$ ... $\psi(X_n)$. Die Summe aller auf diese Art erhaltenen Reihen giebt die Entwicklung von $Y_k$. Multiplicirt man den Coefficienten von $y^i$ in dieser letzteren mit $i+1$, so erhält man:

$$\beta_k^{(i)} = \Sigma \frac{\partial^i \dfrac{x_1^{k-1} f(x_1)}{p_n^{i+1}\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2.3\dots i.\partial x_1^i},$$

wenn man während der Differentiation nach $x_1$ die Gröfsen $x_2, x_3, \dots x_n$ als constant betrachtet, und die Summation noch auf die $n-1$ andern Ausdrücke erstreckt, die aus dem unter dem Summenzeichen befindlichen durch Vertauschung von $x_1$ mit $x_2, x_3, \dots x_n$ erhalten werden, welches das im ersten §. gefundene Resultat ist.

Hat $P$ den Factor $(x-x_1)^\mu$ und ist durch keine höhere Potenz von $x-x_1$ theilbar, so erhalten für $y=0$ gleichzeitig $\mu$ Wurzeln der Gleichung $P=y$ den Werth $x_1$. Bezeichnet man diese Wurzeln mit:

$$X_1, \quad X_2, \quad \dots \quad X_\mu,$$

so mufs man, um durch den *Lagrange*schen Lehrsatz die Summe

$$\psi(X_1)+\psi(X_2)+\dots+\psi(X_\mu)$$

nach den ganzen positiven Potenzen von $y$ zu entwickeln, aus der Gleichung $P=y$ durch Ausziehung der $\mu$ten Wurzel die Gleichung

$$x_1 - x + \frac{y^{\frac{1}{\mu}}}{p_n^{\frac{1}{\mu}}\{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)\}^{\frac{1}{\mu}}} = 0$$

ableiten, welche für die verschiedenen Werthe der $\mu$ten Wurzel $\mu$ verschiedene Gleichungen von der Form $\alpha - x + y^{\frac{1}{\mu}}\varphi x = 0$ giebt, welche sich auf die verschiedenen Wurzeln $X_1, X_2, \dots X_\mu$ beziehen.

Der *Lagrange*sche Lehrsatz giebt die Entwicklung einer beliebigen Function von jeder dieser Wurzeln nach den ganzen positiven Potenzen von $y^{\frac{1}{\mu}}$ und man erhält aus einer dieser Entwicklungen sämmtliche $\mu$, wenn man für $y^{\frac{1}{\mu}}$ seine $\mu$ Werthe setzt. Die Entwicklung der Summe:

$$\psi(X_1)+\psi(X_2)+\dots+\psi(X_\mu)$$

erhält man daher vermöge der bekannten Eigenschaften der Wurzeln der Einheit, wenn man in der Entwicklung einer der Functionen $\psi(X_1)$ etc. die gebrochenen Potenzen von $y$ fortläfst und die ganzen Potenzen von $y$ mit $\mu$ multiplicirt. Der Coefficient von $y^{i+1}$ in der Entwicklung dieser Summe, mit $i+1$ multiplicirt, wird daher

$$\frac{\partial^{\mu i+\mu-1}.\dfrac{x_1^{k-1}f(x_1)}{p_n^{i+1}\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)\}^{i+1}}}{1.2\dots(\mu i+\mu-1)\,\partial x^{\mu i+\mu-1}},$$

was mit dem im ersten §. gegebenen Resultate übereinstimmt. Wenn die Function $f(x)$ vieldeutig ist, so kann man willkürlich darüber bestimmen, welchen ihrer verschiedenen Werthe sie für jede der Wurzeln der Gleichung $P=0$ annehmen soll, und für jede dieser Annahmen werden die Coefficienten $\alpha_i$ der polynomischen Entwicklung verschieden. Wenn $\nu$ die Zahl der Werthe ist, die $f(x)$ für einen gegebenen Werth von $x$ annehmen kann, so erhält man so den verschiedenen möglichen Annahmen entsprechend $\nu^n$ verschiedene Entwicklungen.

## §. 3.

### Anwendung auf rationale gebrochene Functionen.

Wenn die Function, welche nach den Potenzen eines Polynoms $P$ entwickelt werden soll, eine rationale Function ist, so werden die Gröfsen $\beta_k^{(i)}$ rationale symmetrische Functionen der Wurzeln der Gleichung $P=0$, und können daher durch die Coefficienten des Polynoms $P$ rational dargestellt werden, so dafs es in diesem Falle der Factorenzerfällung von $P$ nicht bedarf. Man kann aber in diesem Falle die vorgelegte Entwicklung auch durch die folgende, ganz verschiedene Methode erhalten.

Es sei die zu entwickelnde Function

$$\frac{U}{V}=f(x),$$

wo $U$ und $V$ ganze rationale Functionen von $x$ sind. Jede dieser Functionen stelle man durch endliche, nach den Potenzen von $P$ fortschreitende Ausdrücke dar,

$$U_0+U_1P+U_2P^2+\cdots=U$$
$$V_0+V_1P+V_2P^2+\cdots=V,$$

in welchen die Coefficienten $U_0, U_1, \dots$ etc.; $V_0, V_1, \dots$ etc. Polynome von niedererem Grade als $P$ sind. Es seien $M$ und $N$ zwei andere ganze rationale Functionen von $x$ von der Beschaffenheit, dafs

$$MV-NP=1.$$

Diese Functionen $M$ und $N$ können durch die Methode der unbestimmten Coefficienten oder durch die Verwandlung des Bruches $\frac{V}{P}$ in einen Kettenbruch gefunden werden.

Wenn die Factorenzerfällung von $P$ gegeben ist, findet man $M$ auch dadurch, dafs man $\frac{1}{PV}$ in Partialbrüche zerfällt, und alle Partialbrüche, welche aus den Factoren von $P$ hervorgehen, in *einen* Bruch vereinigt. Der Zähler dieses Bruches wird die Function $M$. Man hat daher, wenn man die Werthe von $V$ für $x=x_1,\ x_2,\ \dots\ x_n$, mit

$$\mathrm{V}_1,\ \mathrm{V}_2\ \dots\ \mathrm{V}_n$$

bezeichnet,

$$M=P\left\{\frac{1}{P'(x_1)\mathrm{V}_1.(x-x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)\mathrm{V}_2.(x-x_2)}+\dots+\frac{1}{P'(x_n)\mathrm{V}_n.(x-x_n)}\right\}.$$

Hat man auf irgend eine Weise die Function $M$ vom $(n-1)$ten Grade bestimmt, so bringe man die Producte $MU$ und $MV$ auf die Form:

$$u_0+u_1P+u_2P^2+\dots \text{etc.} = MU$$
$$1+v_1P+v_2P^2+\dots \text{etc.} = MV,$$

in welcher die sämmtlichen Coefficienten $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \dots$ etc., $v_1,\ v_2,\ \dots$ etc. Polynome von niedererem Grade als $P$ sind. Der zu entwickelnde Bruch wird dann:

$$\frac{u_0+u_1P+u_2P^2+\dots \text{etc.}}{1+v_1P+v_2P^2+\dots \text{etc.}}=\frac{U}{V}$$

Entwickelt man den Ausdruck links nach den Potenzen von $P$, so werden die Coefficienten ganze rationale Functionen von $u_0$, $u_1$ etc., $v_1$, $v_2$ etc., welche man wieder als Aggregate von Potenzen von $P$, die in Polynome niedereren Grades multiplicirt sind, darstellen kann, wodurch man die verlangte Entwicklung erhält.

Man kann aber auch bei der Bildung der Coefficienten dieser Entwicklung ein recurrirendes Verfahren befolgen. Ist die gesuchte Entwicklung

$$f_0+f_1\cdot P+f_2\cdot P^2+f_3\cdot P^3+\dots \text{etc.} = \frac{u_0+u_1P+u_2P^2+\dots \text{etc.}}{1+v_1P+v_2P^2+\dots \text{etc.}}=\frac{U}{V},$$

wo $f_0$, $f_1$, etc. Polynome $(n-1)$ten Grades sind, und kennt man bereits die Coefficienten $f_0,\ f_1,\ \dots\ f_i$, so findet man aus ihnen den unmittelbar folgenden

$f_{i+1}$. Ist nämlich $a_{m,k}$ der Rest und $b_{m,k}$ der Quotient der Division von $f_m . v_k$ durch $P$, so dafs

$$f_m . v_k = a_{m,k} + b_{m,k} P,$$

so sind die Functionen

$$a_{0,k}, \quad a_{1,k}, \quad \ldots \quad a_{i,k}; \quad b_{0,k}, \quad b_{1,k}, \quad \ldots \quad b_{i,k}$$

gegeben, wenn die Coefficienten $f_0$, $f_1$, ... $f_i$ bereits bekannt sind, und man findet aus ihnen den nächst folgenden Coefficienten

$$\begin{aligned} f_{i+1} = u_{i+1} - \{a_{i,1} &+ a_{i-1,2} + a_{i-2,3} + \cdots + a_{0,i+1}\} \\ - \{b_{i-1,1} &+ b_{i-2,2} + b_{i-3,3} + \cdots + b_{0,i}\}. \end{aligned}$$

Mittelst dieser Formel kann man aus dem ersten Coefficienten $f_0 = u_0$ die übrigen finden.

Wenn $P$ und $V$ einen gemeinschaftlichen Factor haben, kann die Gleichung

$$MV - NP = 1$$

nicht erfüllt werden, und es kann in der That dann auch die verlangte Entwicklung nicht Statt haben.

Die Aufgabe, einen rationalen Bruch in eine nach den Potenzen eines Polynoms fortschreitende Reihe zu entwickeln, deren Coefficienten Polynome niedereren Grades sind, findet eine Anwendung, wenn man einen Bruch:

$$\frac{L}{P^i Q^k R^l \ldots},$$

in welchem $L$, $P$, $Q$, $R$ ... ganze rationale Functionen sind, in eine ganze Function und in andre Brüche zerlegen will, welche die Potenzen von $P$, $Q$, $R$ etc. bis zur $i$ten, $k$ten, $l$ten etc. zu Nennern und Zähler von respective niedererer Ordnung als $P$, $Q$, $R$ etc. haben. Man erhält nämlich die aus dem Factor $P^i$ hervorgehenden Brüche, wenn man die rationale Function

$$\frac{L}{Q^k R^l \ldots}$$

in der im Vorigen auseinandergesetzten Weise in eine nach den Potenzen von $P$ aufsteigende Reihe entwickelt, deren Coefficienten von niedererem Grade als $P$ sind, diese Entwicklung aber nur bis zur $(i-1)$ten Potenz von $P$ fortsetzt, und durch $P^i$ dividirt. Verfährt man ebenso in Bezug auf $Q$, $R$ etc., so ist das auf diese Weise erhaltene Aggregat von Brüchen dem vorgelegten Bruche gleich, oder, wenn der Zähler des vorgelegten Bruches von höherem Grade als der Nenner ist, von demselben nur um eine ganze Function verschieden, welche der Quotient der Division des Zählers $L$ durch den Nenner $P^i Q^k R^l \ldots$ ist. Ist $L'$ der Rest dieser Division, so werden die Brüche, in welche der vorgelegte Bruch zerlegt wird, dieselben, wenn man statt des Zählers $L$ den einfacheren $L'$ setzt.

Man kann hiervon bei der Integration der rationalen Functionen Gebrauch machen, wenn der Nenner imaginäre lineäre Factoren hat, und man, um die imaginären Gröfsen zu vermeiden, die reellen trinomischen Factoren und ihre Potenzen zu Nennern der Partialbrüche nimmt.

## §. 4.

### Anwendung auf gebrochene Potenzen rationaler Functionen.

Ich will jetzt die im Vorigen gegebene Methode auf die Entwicklung einer *gebrochenen* Potenz einer rationalen Function anwenden. Wie man zufolge einer oben gemachten Bemerkung voraussehen kann, wird dies nicht möglich sein, ohne die Wurzeln der Gleichung $P = 0$ zu kennen, indem die Entwicklung nur dann bestimmt ist, wenn man festgesetzt hat, welchen ihrer Werthe die zu entwickelnde irrationale Gröfse für jede der verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P = 0$ annehmen soll.

Um der Aufgabe sogleich eine gröfsere Allgemeinheit zu geben, werde ich annehmen, die zu entwickelnde irrationale Function habe die Form:

$$\sqrt[\nu]{\frac{U^{m\nu-\alpha}\, U_1^{m_1\nu-\alpha_1}\, U_2^{m_2\nu-\alpha_2} \ldots}{V^\beta\, V_1^{\beta_1}\, V_2^{\beta_2} \ldots}} = f(x),$$

wo

$$U,\quad U_1,\quad U_2 \quad \ldots;\qquad V,\quad V_1,\quad V_2 \quad \ldots$$

ganze rationale Functionen, und

$$\nu,\ m,\ m_1,\ m_2 \ldots;\quad \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \ldots;\quad \beta,\ \beta_1,\ \beta_2 \ldots$$

ganze positive Zahlen und aufserdem $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ ... kleiner als $\nu$ sein sollen. ***Man suche eine ganze rationale Function $M$ vom $(n-1)$ten Grade, welche einer Gleichung von der Form:***

$$M^\nu U^\alpha U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots V^\beta V_1^{\beta_1} V_2^{\beta_2} \ldots = 1 - NP$$

***genügt, wo $N$ ebenfalls eine ganze rationale Function sein soll und $P$ das gegebene Polynom ist, nach dessen Potenzen die Entwicklung angestellt werden soll.*** Vermittelst der vorstehenden Gleichung sind die Werthe der Function $M$ für die $n$ Wurzeln der Gleichung $P = 0$ gegeben, und da diese Function den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigen soll, ist sie durch diese Werthe bestimmt, oder hat nur diejenige Unbestimmtheit, die aus der Wahl der Werthe hervorgeht, welche die gegebene irrationale Function für die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $P=0$ annehmen kann. Umgekehrt genügt jede der so bestimmten Functionen $M$, deren Anzahl $\nu^n$ ist, einer Gleichung der angegebenen Art. Denn wenn die Function $M$ auf die angegebene Art bestimmt ist, so verschwindet die ganze rationale Function:

$$1-M^\nu U^\alpha U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots V^\beta V_1^{\beta_1} V_2^{\beta_2} \ldots$$

für jede der Wurzeln der Gleichung $P=0$, und ist daher durch $P$ theilbar, oder sie erhält die Form $NP$, wo $N$ eine ganze rationale Function ist, wie verlangt wird. Bei dieser Bestimmung von $M$ wird nur vorausgesetzt, dafs die ganzen Functionen $U, U_1, \ldots V, V_1, \ldots$ mit $P$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben, welches die Bedingung ist, unter welcher allein die verlangte Entwicklung Statt haben kann.

Hat man die Function $M$ gefunden, so kann man die gegebene irrationale Function auf die Form:

$$\frac{M U^m U_1^{m_1} U_2^{m_2} \ldots}{\sqrt[\nu]{(1-NP)}} = f(x)$$

bringen, in welcher sie sich nun ohne weitere Schwierigkeit auf die verlangte Art entwickeln läfst. Stellt man nämlich den Zähler des vorstehenden Bruches und die Function $N$ wieder als Aggregate von Potenzen von $P$ dar, welche in Polynome $(n-1)$ten Grades multiplicirt sind, so erhält $f(x)$ die Form:

$$f(x) = \frac{u_0+u_1P+u_2P^2+\cdots \text{etc.}}{\sqrt[\nu]{(1-v_1P-v_2P^2-\cdots \text{etc.})}},$$

wo $u_0, u_1, \ldots, v_1, v_2, \ldots$ ganze Functionen $(n-1)$ten Grades sind. Entwickelt man diesen Ausdruck nach den Potenzen von $P$, so werden die Coefficienten ganze rationale Functionen von $u_0, u_1, \ldots v_1, v_2, \ldots$, welche man wieder als Aggregate von Potenzen von $P$, welche in Polynome $(n-1)$ten Grades multiplicirt sind, darzustellen hat, wodurch man schliefslich die verlangte Entwicklung erhält.

Wenn $P$ einen Factor $(x-x_1)^\mu$ hat, so kann man mittelst der Gleichung, durch welche $M$ bestimmt wird, für $x=x_1$ nicht blofs den Werth von $M$ selber, sondern auch die Werthe seiner ersten $\mu-1$ Differenzialquotienten bestimmen. Man kann daher immer die Partialbrüche angeben, in welche sich der Bruch $\frac{M}{P}$ zerfällen läfst, und erhält dann durch Multiplication mit $\boldsymbol{P}$ die Function $\boldsymbol{M}$ selbst.

## §. 5.

### Anwendung auf irrationale Functionen im Allgemeinen.

Man kann durch die im Vorigen angewandte Methode auch allgemein jede *algebraische* Function von $x$ in eine nach den Potenzen eines Polynoms $\boldsymbol{P}$ fortschreitende Reihe entwickeln, deren Coefficienten Polynome niedereren Grades sind.

Es sei $\zeta$ durch eine algebraische Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ gegeben, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von $x$ sind. Man soll $\zeta$ in eine Reihe

$$\alpha + \alpha_1 \boldsymbol{P} + \alpha_2 \boldsymbol{P}^2 + \text{etc.} = \zeta$$

entwickeln, in welcher $\alpha$, $\alpha_1$, etc. ganze Functionen von $x$ vom $(n-1)$ten Grade sind, und welche so beschaffen ist, dafs sie immer gleichzeitig für alle $n$ Werthe von $x$ gültig ist, für welche $\boldsymbol{P}$ einen gegebenen Werth erhält. Wenn $\boldsymbol{P}$ verschwindet, welches geschieht, wenn man der Gröfse $x$ die Werthe

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_n$$

giebt, so wird $\zeta$ respective eine Wurzel der Gleichungen

$$\varphi(x_1, \zeta) = 0, \quad \varphi(x_2, \zeta) = 0, \quad \ldots \quad \varphi(x_n, \zeta) = 0.$$

Es steht ganz in unserm Belieben zu bestimmen, welcher Wurzel $\zeta$ jedesmal gleich werden soll. Nennt man $\zeta_1$, $\zeta_2$, ... $\zeta_n$ *beliebige* Wurzeln dieser verschiedenen Gleichungen, so dafs $\zeta_i$ eine beliebige Wurzel der Gleichung $\varphi(x_i, \zeta) = 0$ ist, so kann die gesuchte Entwicklung von $\zeta$ so bestimmt werden, dafs sie die Werthe $\zeta_1$, $\zeta_2$, ... $\zeta_n$ erhält, wenn $x$ die Werthe $x_1$, $x_2$, ... $x_n$ annimmt, wobei wieder, wenn die Gleichung $\varphi = 0$ in Bezug auf $\zeta$ vom $\nu$ten Grade ist, $\nu^n$ Combinationen Statt finden können, welche verschiedene Entwicklungen geben, die immer anderen Werthen der algebraischen Function entsprechen. Die hier zu findende Entwicklung wird für die der Gröfse $x_1$ benachbarten Werthe von $x$ die der Gröfse $\zeta_1$ benachbarten Werthe von $\zeta$, für die der Gröfse $x_2$ benachbarten Werthe von $x$ die der Gröfse $\zeta_2$ benachbarten Werthe von $\zeta$ u. s. f. darstellen. Man kann dieselbe auf folgende Art erhalten.

Es sei $\alpha$ eine ganze rationale Function von $x$ vom $(n-1)$ten Grade, welche, wenn $x$ die Werthe $x_1$, $x_2$, ... $x_n$ annimmt, die Werthe $\zeta_1$, $\zeta_2$, ... $\zeta_n$

erhält. Substituirt man in $\varphi(x, \zeta)$ für $\zeta$ die Function $\alpha$, so wird die Function $\varphi(x, \alpha)$, die man erhält, immer durch $P$ theilbar. Denn zufolge der gemachten Voraussetzungen verschwinden die Gröfsen:

$$\varphi(x_1, \zeta_1), \quad \varphi(x_2, \zeta_2), \quad \ldots \quad \varphi(x_n, \zeta_n)$$

und da $\alpha$, wenn $x$ die Werthe $x_1$, $x_2$, ... $x_n$ annimmt, gleichzeitig die Werthe $\zeta_1$, $\zeta_2$, ... $\zeta_n$ erhält, so verschwindet auch $\varphi(x, \alpha)$ für alle diese Werthe von $x$, und ist daher durch:

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = P$$

theilbar. Man setze jetzt

$$\zeta = \alpha + z,$$

so verwandelt sich die Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ in eine andre von der Form:

$$AP + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \text{etc.} = 0,$$

in welcher $A$, $A_1$, $A_2$, etc. endliche ganze Functionen von $x$ sind. Wenn man die beiden ganzen Functionen $K$ und $B_1$ sucht, welche der Gleichung:

$$KA_1 - B_1 P = 1$$

genügen, so erhält diese Gleichung durch Multiplication mit $K$ die Form:

$$BP + (1 + B_1 P) z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \text{etc.} = 0.$$

Durch Umkehrung erhält man hieraus:

$$z = C_1 P + C_2 P^2 + C_3 P^3 + \text{etc.},$$

wo $C_1$, $C_2$ etc. ganze rationale Functionen von $B$, $B_1$, $B_2$, etc. und daher auch ganze rationale Functionen von $x$ sind, worunter ich immer nur solche Functionen verstehe, in denen $x$ auf einen endlichen Grad steigt. Man kann eine solche Reihe leicht in eine andre

$$\zeta - \alpha = z = D_1 P + D_2 P^2 + D_3 P^3 + \text{etc.}$$

verwandeln, in welcher $D_1$, $D_2$ etc. von niedererem Grade als $P$ sind. In sämmtlichen hier betrachteten ganzen Functionen und auch in den zuletzt erhaltenen $D_1$, $D_2$ etc. sind die constanten Coefficienten rationale Ausdrücke der in den Functionen $P$, $\varphi(x, \zeta)$ und $\alpha$ enthaltenen Constanten. Die Bestimmung der Function $B_1$ setzt voraus, dafs $A_1$ oder der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ für $\zeta = \alpha$ mit $P$ keinen gemeinschaftlichen Factor habe, welche Bedingung darauf hinauskommt, dafs, wenn man in der Gleichung $\varphi(x, \zeta) = 0$ für $x$ die Wurzeln der Gleichung $P = 0$ setzt, für keinen dieser Werthe von $x$ die Gleichungen $\varphi(x, \zeta) = 0$, zwei gleiche Wurzeln $\zeta$ erhalten. Hat $P$ den Factor $(x - x_1)^\mu$ so mufs nicht blofs $\alpha$ für $x = x_1$ den Werth einer Wurzel $\zeta$ erhalten, sondern es müssen auch die ersten $\mu - 1$ Differentialquotienten von $\alpha$ den diesem Werthe entsprechenden Differentialquotienten $\frac{d\zeta}{dx}, \frac{d^2\zeta}{dx^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\zeta}{dx^{\mu-1}}$ gleich werden, wodurch $\alpha$ in allen Fällen bestimmt wird.

## §. 6.

### Anwendung auf logarithmische Functionen, exponentielle Functionen und Potenzen von beliebigem Exponenten.

Die hier gebrauchte Methode bleibt anwendbar, wenn die als endliche ganze Functionen von $x$ eingeführten Ausdrücke solche unendliche Reihen sind, welche in der angegebenen Art nach ganzen positiven Potenzen von $P$ fortschreiten und ganze rationale Functionen von $x$ zu Coefficienten haben. So kann die hier für die Entwicklung einer algebraischen Function gegebene Methode auch angewandt werden, wenn die zwischen $x$ und $\zeta$ gegebene Gleichung die Form

$$\varphi + \varphi_1 P + \varphi_2 P^2 + \text{etc. in inf.} = 0$$

hat, wo $\varphi$, $\varphi_1$ etc. ganze rationale Functionen von $x$ und $\zeta$ sind. Auch für diesen Fall werden die Constanten, welche in den gesuchten Entwicklungscoefficienten $(n-1)$ten Grades enthalten sind, durch die Constanten des ersten Entwicklungscoefficienten $\alpha$ rational ausgedrückt werden. Dagegen hört im Allgemeinen die Anwendbarkeit der im vorigen §. für die Entwicklung algebraischer Functionen gegebenen Methode auf, wenn es sich um die Entwicklung von *transcendenten* Functionen handelt. Man wird aber in vielen Fällen durch ein andres recurrirendes Verfahren aus dem ersten Gliede der Entwicklung alle Polynome nach einander durch algebraische Operationen ableiten können, so dafs auch in diesen wieder die Constanten rationale Functionen der in dem ersten enthaltenen werden.

Um hiervon ein Beispiel zu geben, will ich die Aufgabe stellen, den *Logarithmus* eines gegebenen endlichen oder unendlichen Ausdrucks

$$a + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3 + \text{etc.}$$

in welchem $a$, $a_1$, etc. Polynome niedereren Grades als $P$ sind in eine ähnliche Reihe zu entwickeln. Es sei diese Reihe

$$\alpha + \alpha_1 P + \alpha_2 P^2 + \alpha_3 P^3 + \text{etc.} = \log(a + a_1 P + a_2 P^2 + a_3 P^3 + \text{etc.}),$$

so erhält man durch Differentiation:

$$
\begin{aligned}
(1.)\quad & a'+a'_1P+a'_2P^2+a'_3P^3+\text{etc.}\\
& +P'(a_1+2a_2P+3a_3P^2+\text{etc.})\\
& = \{a+a_1P+a_2P^2+a_3P^3+\text{etc.}\}\\
& \times\left\{\begin{array}{l}\alpha'+\alpha'_1P+\alpha'_2P^2+\alpha'_3P^3+\text{etc.}\\ +P'(\alpha_1+2\alpha_2P+3\alpha_3P^2+\text{etc.})\end{array}\right\},
\end{aligned}
$$

wo durch den obern Accent der nach $x$ genommene Differentialquotient bezeichnet wird. Es sei

$$(2.)\quad a_iP'=b_i+c_iP;\quad \alpha_iP'=\beta_i+\gamma_iP,$$

wo $b_i$, $\beta_i$ die Reste der Division von $a_iP'$, $\alpha_iP'$, durch $P$ und $c_i$, $\gamma_i$ die respectiven Quotienten bedeuten; es sei ferner

$$(3.)\quad a'_i+ic_i+(i+1)b_{i+1}=e_i;\quad \alpha'_i+i\gamma_i+(i+1)\beta_{i+1}=\varepsilon_i.$$

Da die Functionen $a_i$ gegeben sind, so sind auch die Functionen $e_i$ gegebene Polynome vom $(n-1)$ten Grade. Durch Substitution der Gleichungen (2.) und (3.) verwandelt sich die Gleichung (1.) in die folgende:

$$
\begin{aligned}
(4.)\quad & e+e_1P+e_2P^2+e_3P^3+\text{etc.}\\
& = (a+a_1P+a_2P^2+a_3P^3+\text{etc.})(\varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\varepsilon_3P^3+\text{etc.}).
\end{aligned}
$$

Setzt man

$$(5.)\quad a\varepsilon_i+a_1\varepsilon_{i-1}+a_2\varepsilon_{i-2}+\cdots+a_i\varepsilon = \zeta_i+\eta_iP,$$

wo $\zeta_i$ und $\eta_i$ ganze Functionen vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade sind, so giebt die Gleichung (4.) zwischen diesen unbekannten Functionen die Relation

$$(6.)\quad e_i = \eta_{i-1}+\zeta_i.$$

Ich will jetzt annehmen, dafs die Entwicklungscoefficienten $\alpha$, $\alpha_1$, ... $\alpha_i$ bereits bekannt sind. Man kennt dann auch vermöge (2.), (3.) die Functionen $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, ... $\varepsilon_{i-1}$ und vermöge (5.) die Function $\eta_{i-1}$. Es ist daher durch die vorstehende Gleichung (6.) auch $\zeta_i$ gegeben; vermöge (2.) ist auch $\gamma_i$ gegeben. Setzt man daher:

$$(7.)\quad a(\alpha'_i+i\gamma_i)+a_1\varepsilon_{i-1}+a_2\varepsilon_{i-2}+\cdots+a_i\varepsilon-\zeta_i = \vartheta_i,$$

so ist auch $\vartheta_i$ gegeben. Die Gleichungen (3.), (5.) und (7.) geben

$$(8.)\quad (i+1)a\beta_{i+1}+\vartheta_i = \eta_iP$$

oder, wenn man den Werth

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}P'-\gamma_{i+1}P$$

substituirt,

$$(9.)\quad \{(i+1)a\gamma_{i+1}+\eta_i\}P-(i+1)aP'.\alpha_{i+1} = \vartheta_i.$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$(10.)\quad aP' = Q+f.P,\quad (i+1)a\gamma_{i+1}+\eta_i-(i+1)f.\alpha_{i+1} = k_{i+1},$$

wo $Q$ den Rest der Division von $aP'$ durch $P$, $f$ den Quotienten dieser Division bedeutet, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$(11.)\quad k_{i+1}.P-(i+1)\alpha_{i+1}.Q = \vartheta_i.$$

In dieser Gleichung sind die ganzen Functionen $P$, $Q$, $\vartheta_i$ gegeben, die ganzen Functionen $k_{i+1}$ und $\alpha_{i+1}$ unbekannt, von denen die letztere der auf die gegebenen zunächst folgende Entwicklungscoefficient ist. Um denselben aus der Gleichung (11.) zu bestimmen, sucht man ein für allemal nach den bekannten Vorschriften die beiden Functionen $K$ und $L$ vom $(n-1)$ten Grade, für welche

$$KP-LQ = 1$$

ist. Nach gleichfalls bekannten Regeln wird dann $(i+1)\alpha_{i+1}$ der Rest der Division von $L\vartheta_i$ durch $P$.

Auf diese Weise kann man aus $\alpha$ nach und nach alle folgenden Coefficienten $\alpha_1$, $\alpha_2$, etc. finden.

Als zweites Beispiel soll die Entwicklung einer Function dienen, deren Logarithmus gegeben ist. Sind $a$, $a_1$, etc. gegebene ganze Functionen $(n-1)$ten Grades, und setzt man

$$e^{a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.}} = \alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.},$$

wo $\alpha$, $\alpha_1$, etc. wieder ganze Functionen $(n-1)$ten Grades sein sollen, so kann man aus $\alpha$ die übrigen Coefficienten $\alpha_1$, $\alpha_2$, etc. finden. Man kann nämlich allgemein, wenn $\alpha$, $\alpha_1$, ... $\alpha_i$ gegeben sind, den nächst höheren Coefficienten $\alpha_{i+1}$ folgendermafsen bestimmen.

Bedient man sich der Bezeichnungen (2.) und (3.), so hat man die Gleichung

$$(e_0+e_1P+e_2P^2+\text{etc.})(\alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.}) = \varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\text{etc.}$$

Kennt man $\alpha$, $\alpha_1$, ... $\alpha_i$ und also auch $\varepsilon$, $\varepsilon_1$, ... $\varepsilon_{i-1}$, so giebt diese Gleichung $\varepsilon_i$ und daher wegen (3.) auch $\beta_{i+1}$, wodurch man mittelst (2.) auch $\alpha_{i+1}$ erhalten kann. Kennt man nämlich die beiden Functionen $M$ und $N$ vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, für welche

$$MP'-NP = 1,$$

so wird $\alpha_{i+1}$ der Rest der Division von $M\beta_{i+1}$ durch $P$.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auf die Entwicklung ***einer beliebigen Potenz*** anwenden, wobei ich der Kürze wegen wieder von den obigen Bezeichnungen Gebrauch machen will. Für ***irgend einen*** Exponenten $k$ sei:

$$(a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})^k = \alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.},$$

so erhält man:

$$k(e+e_1P+e_2P^2+\text{etc.})(\alpha+\alpha_1P+\alpha_2P^2+\text{etc.})$$
$$= (a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})(\varepsilon+\varepsilon_1P+\varepsilon_2P^2+\text{etc.}).$$

Kennt man $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_i$, so giebt diese Gleichung den Werth von $\zeta_i$, woraus man mittelst (7.) den Werth von $\vartheta_i$ und dann wieder, wie im ersten Beispiel mittelst der Function $L$ den Werth von $(i+1)\alpha_{i+1}$ als Rest der Division von $L\vartheta_i$ durch $P$ findet.

## 7.

### Anwendung auf den Fall einer durch eine Quadratur definirten Function.

Die im Vorstehenden angewandte Methode beruht auf der Benutzung der Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die zu entwickelnde Function Genüge leistet. Dieselbe Methode kann in allen Fällen angewandt werden, in welchen man, bei den gewöhnlichen nach den Potenzen von $x$ fortschreitenden Reihen durch eine Differentialgleichung, welcher sie genügen, lineäre Relationen zwischen ihren Coefficienten erhält. Betrachtet man den einfachsten Fall, in welchem eine Reihe von der gegebenen Art zu integriren ist, und das Integral wieder auf dieselbe Form gebracht werden soll, so kann man jeden Term derselben auf den unmittelbar vorhergehenden zurückführen, so dafs man, wenn der erste Term gegeben ist, nach und nach alle übrigen finden kann. Der erste Term des gesuchten Integrals mufs aber durch andere Betrachtungen gefunden werden.

Es sei nämlich:

$$\int f(x)\,dx = \int(a+a_1P+a_2P^2+\text{etc.})\,dx = A+A_1P+A_2P^2+\text{etc.}$$

Sind wieder $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $P=0$ und ist $x_0$ die untere Gränze, von welcher an das Integral genommen werden soll, so ist $A$ als eine Function des $(n-1)$ten Grades zu bestimmen, welche für $x=x_1, x_2, \ldots x_n$ respective die Werthe

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx,\quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx,\quad \ldots\quad \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$$

erhält. Es sei $B_i$ der Rest der Division von $A_iP'$ durch $P$ und $C_i$ der

Quotient dieser Division, so dafs

$$A_i P' = B_i + C_i P.$$

Man hat dann

$$a_i = iC_i + A_i' + (i+1) B_{i+1}.$$

Kennt man daher $A_i$ und den Quotienten $C_i$ der Division von $A_i P'$ durch $P$, so ist durch die vorstehende Formel auch $B_{i+1}$ gegeben. Man hat dann auf die bekannte Art zwei ganze Functionen $A_{i+1}$ und $C_{i+1}$, respective vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, von der Beschaffenheit zu suchen, dafs

$$A_{i+1} P' - C_{i+1} P = B_{i+1}.$$

Man findet diese Functionen mittelst der beiden Hülfsfunctionen $M$ und $N$ vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade, welche der Gleichung

$$MP' - NP = 1$$

genügen, als die Reste der Division von $MB_{i+1}$ durch $P$ und von $NB_{i+1}$ durch $P'$. Es werden daher, wenn man $A_i$ und $C_i$ kennt, die Functionen $A_{i+1}$ und $C_{i+1}$ respective die Reste der Division

$$\text{von } \frac{1}{i+1} M(a_i - A_i' - iC_i) \text{ durch } P \text{ und}$$

$$\text{von } \frac{1}{i+1} N(a_i - A_i' - iC_i) \text{ durch } P'.$$

Auf diese Weise kann man aus $A$ nach und nach alle folgenden Coefficienten $A_1$, $A_2$, etc. finden. *)

---

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit, dafs, wenn man das Product zweier den $(n-1)$ten Grad nicht übersteigenden Functionen $F$ und $G$ durch eine Function $n$ten Grades

$$P = p + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$$

zu dividiren hat, es vortheilhaft sein kann, dem einen Factor die Form

$$f(p_1 + p_2 x + \cdots + p_n x^{n-1}) + f_1(p_2 + p_3 x + \cdots + p_n x^{n-2}) + \cdots + f_{n-2}(p_{n-1} + p_n x) + f_{n-1} p_n = F$$

zu geben, in welcher $f$, $f_1$, ... $f_{n-1}$ Constanten bedeuten. Man kann dann nämlich den Rest und den Quotienten der Division unmittelbar hinschreiben. Um die Function $F$ auf diese Form zu bringen, bedarf es nur der leichten Auflösung solcher lineärer Gleichungen, von welcher jede folgende eine Unbekannte weniger enthält. Wenn für mehrere ähnliche Operationen, wie im Vorhergehenden, der eine Factor derselbe bleibt, wird der erreichte Vortheil noch wesentlich vermehrt. Es sei

$$P_m = p_m + p_{m+1} x + \cdots + p_n x^{n-m},$$
$$P^{(m)} = p + p_1 x + \cdots p_{m-1} x^{m-1},$$

so dafs

$$P = P^{(m)} + x^m P_m$$

und

$$F = fP_1 + f_1 P_2 + \cdots f_{n-1} P_n.$$

## 8.

### Modification für den Fall, wo die ganze Function $P$, nach deren Potenzen entwickelt wird, lineäre Factoren in höherer als der ersten Potenz enthält.

Das hier gebrauchte Verfahren mufs für den Fall, dafs $P$ und $P'$ einen gemeinschaftlichen Factor haben, eine wesentliche Modification erleiden.

Es sei $P$ durch die Factoren $x-x_1$, $x-x_2$, etc. respective $\mu_1$, $\mu_2$, etc. Mal theilbar, so wird

$$F = (x-x_1)^{\mu_1-1}(x-x_2)^{\mu_2-1}, \ldots$$

der gemeinschaftliche Factor von $P$ und $P'$, und setzt man $P = F.Q$, so wird $Q$ durch $(x-x_1)$, $(x-x_2)$, etc., aber durch jeden dieser lineären Factoren von $F$ nur *einmal* theilbar.

Aus der Gleichung

$$A_i P' = B_i + C_i P,$$

folgt, dafs auch alle Gröfsen $B_i$ diesen Factor $F$ haben. Setzt man daher:

$$P = F.Q, \quad P' = F.Q_1, \quad B_i = F.D_i,$$

so hat man

$$A_i Q_1 = D_i + C_i Q.$$

Ist $f$ der Grad von $F$, so werden $Q$ und $Q_1$ vom $(n-f)$ten und $(n-f-1)$ten Grade; es werden daher $A_i$ und $C_i$ als Functionen vom $(n-1)$ten und $(n-2)$ten Grade nicht mehr mittelst der vorstehenden Gleichung durch $Q$, $Q_1$ und $D_i$ bestimmt, sondern, wenn $(A_i)$ und $(C_i)$ in der vorstehenden Gleichung die Functionen vom $(n-f-1)$ten und $(n-f-2)$ten Grade bedeuten, welche dieser Gleichung genügen, so kann man zu $(A_i)$ und $(C_i)$ respective die Ausdrücke $R_i Q$ und $R_i Q_1$, wo $R_i$ *eine beliebige Function* vom $(f-1)$ten Grade

---

Ist der andre Factor

$$G = g + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots + g_{n-1} x^{n-1},$$

so setze man in ähnlicher Weise

$$G_m = g_m + g_{m+1} x + \cdots + g_{n-1} x^{n-m-1},$$
$$G^{(m)} = g + g_1 x + \cdots + g_{m-1} x^{m-1},$$

so dafs

$$G^{(m)} + x^m G_m = G.$$

Setzt man

$$\frac{FG}{P} = Q + \frac{R}{P},$$

so hat man den Quotienten der Division

$$Q = fG_1 + f_1 G_2 + \cdots + f_{n-2} G_{n-1}$$

und den Rest

$$R = f(G'P_1 - G_1 P') + f_1(G''P_2 - G_2 P'') + \cdots f_{n-2}(G^{(n-1)}P_{n-1} - G_{n-1}P^{(n-1)}) + f_{n-1} P_n G,$$

wie sich unmittelbar aus den vorstehenden Formeln ergiebt.

ist, hinzufügen, und

$$A_i = (A_i) + R_i Q, \qquad C_i = (C_i) + R_i Q_1$$

setzen. Nach diesen vorausgeschickten Bemerkungen will ich zeigen, wie man in dem hier betrachteten Falle aus der Gröfse $A_i$ die folgende $A_{i+1}$ finden kann.

Die oben gegebene Gleichung

$$a_i = iC_i + A'_i + (i+1)B_{i+1}$$

zeigt, dafs die bereits gefundene Function $A_i$ so beschaffen sein mufs, dafs der Ausdruck $a_i - iC_i - A'_i$ durch $F$ theilbar wird, weil alle Functionen $B_i$ durch $F$ theilbar sind. Setzt man in der vorstehenden Gleichung $B_{i+1} = FD_{i+1}$, so erhält man

$$(i+1)D_{i+1} = \frac{1}{F}\{a_i - iC_i - A'_i\}.$$

Aus $D_{i+1}$, $Q$ und $Q_1$ erhält man die Functionen $(A_{i+1})$ und $(C_{i+1})$ vom $(n-f-1)$ten und $(n-f-2)$ten Grade, welche der Gleichung

$$(A_{i+1})Q_1 = D_{i+1} + (C_{i+1})Q$$

genügen, und aus diesen:

$$A_{i+1} = (A_{i+1}) + RQ; \qquad C_{i+1} = (C_{i+1}) + RQ_1,$$

wo $R$ eine noch zu bestimmende Function des $(f-1)$ten Grades ist. Die Bestimmung von $R$ erhält man daraus, dafs der Ausdruck

$$a_{i+1} - (i+1)C_{i+1} - A'_{i+1}$$

durch $F$ theilbar sein mufs. Setzt man

$$a_{i+1} - (i+1)(C_{i+1}) - (A_{i+1})' = b_{i+1}, \qquad Q' + (i+1)Q_1 = Q_i,$$

so wird der vorstehende Ausdruck, wenn $\frac{dR}{dx} = R'$,

$$H = b_{i+1} - Q_i R - QR'.$$

Es kommt daher darauf an, *eine Function $R$ vom $(f-1)$ten Grade so zu bestimmen, dafs der Ausdruck $H$ durch eine gegebene Function vom $f^{\text{ten}}$ Grade*

$$F = (x - x_1)^{\mu_1 - 1}(x - x_2)^{\mu_2 - 1}\ldots$$

*theilbar wird, deren lineäre Factoren die Function $Q$ einmal und nicht öfter theilen.*

Soll der Ausdruck $H$ durch $(x - x_1)^{\mu_1 - 1}$ theilbar sein, so mufs derselbe und seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$ verschwinden. Aber in jedem Differentialquotienten von $H$ ist der höchste von $R$ in $Q$ multiplicirt, welches für $x = x_1$ verschwindet, so dafs für $x = x_1$ in dem $(\mu_1 - 2)$ten Differentialquotienten von $H$ die Differentialquotienten von $R$ ebenfalls nur bis zum $(\mu_1 - 2)$ten steigen. Man erhält daher, indem man $H$ und seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten $= 0$ setzt, nachdem man darin den Werth $x = x_1$ substituirt hat, $\mu_1 - 1$ Gleichungen, aus denen man successive die Werthe findet, welche $R$ und seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$ annehmen. Umgekehrt wird $H$ durch $(x - x_1)^{\mu_1 - 1}$ theilbar, wenn man die Werthe von $R$ und seinen $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten auf die angegebene Art bestimmt hat. Ebenso erhält man aus der Bestimmung, dafs $H$ auch durch $(x - x_2)^{\mu_2 - 1}$ theilbar sein soll, die Bestimmung der Werthe, welche $R$ und seine $\mu_2 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_2$ annehmen, und ähnliches in Bezug auf jeden der lineären Factoren, durch deren höhere Potenzen $P$ theilbar ist, und deren um 1 niedrigere Potenzen die Factoren von $F$ bilden.

Kennt man auf diese Weise sowohl die Werthe, welche $R$ selbst für $x = x_1$, $x = x_2$, etc. annimmt, als auch die Werthe, welche seine $\mu_1 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_1$, seine $\mu_2 - 2$ ersten Differentialquotienten für $x = x_2$, u. s. f. erhalten, so kennt man auch die Zähler der Partialbrüche, in welche sich der Bruch

$$\frac{R}{F} = \frac{R}{(x - x_1)^{\mu_1 - 1}(x - x_2)^{\mu_2 - 1}\dots},$$

nach den gewöhnlichen Regeln zerfällen läfst, und erhält durch Multiplication mit $F$ die gesuchte Function $R$ selber. Hat man $R$ gefunden, so ist der gesuchte Coefficient $A_{i+1} = (A_{i+1}) + RQ$ vollkommen bestimmt. Man kann daher auch in dem Falle, dafs das Polynom $P$ gleiche Factoren hat, jeden Coefficienten der gesuchten Entwicklung des Integrals aus dem unmittelbar vorhergehenden ableiten, und so aus dem ersten $A$ nach und nach die übrigen finden. Die Bestimmung von $A$ ergiebt sich aber daraus, dafs $A$ für $x = x_1, x_2$, etc. die Werthe

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx, \quad \text{etc.}$$

erhält, und dafs von der Function

$$A - \int a\,dx$$

die $\mu_1 - 1$ ersten Differentialqnotienten für $x = x_1$, die $\mu_2 - 1$ ersten für $x = x_2$, etc. verschwinden.

Auf ganz ähnliche Art ist das in den im §. 6. behandelten Beispielen angewandte Verfahren, um aus dem ersten Entwicklungscoefficienten die folgenden abzuleiten, für den Fall, wenn $P$ mehrere gleiche Factoren hat, zu modificiren.

(Berlin im Juli 1847.)