

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1857

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0053

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0053](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053)

**LOG Id:** LOG\_0007

**LOG Titel:** Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## 3.

# Über eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante.

(Von Herrn *G. Lejeune-Dirichlet*.)

(Vorgetragen in der Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse der Berliner Akademie  
am 16. Juli 1855.)\*

Da der neue Satz, welcher den Gegenstand dieser Vorlesung bildet, innig mit der Theorie der Gleichung

$$(1.) \quad t^2 - Du^2 = 1$$

zusammenhängt, so sind zunächst einige Bemerkungen über diese Gleichung zu machen, worin die gegebene positive ganze Zahl  $D$  keinem Quadrate gleich sein soll und von welcher hier nur die in positiven ganzen Zahlen  $t, u$  ausgedrückten Auflösungen zu berücksichtigen sind.

Sind  $T, U$  die kleinsten der Gleichung genügenden Werthe, so werden bekanntlich sämtliche Auflösungen von der eben erwähnten Beschaffenheit durch die Formel

$$(T + U\sqrt{D})^n = t_n + u_n\sqrt{D}$$

erhalten, wenn man der ganzen Zahl  $n$  alle positiven Werthe beilegt. Unter diesen Auflösungen giebt es unendlich viele, in denen  $u_n$  durch eine beliebige (positive) Zahl  $S$  theilbar ist, und die Exponenten  $n$ , für die dieser Umstand statt findet, sind die aufeinander folgenden Vielfachen des kleinsten  $N$  derselben. Setzt man nämlich  $D' = DS^2$ , und bildet die neue Gleichung

$$t'^2 - D'u'^2 = 1,$$

so erhellt, dafs jede Auflösung dieser letzteren, wenn  $t = t', u = Su'$  gesetzt wird, eine Auflösung von (1.) ergibt, in welcher  $u$  durch  $S$  aufgeht, und umgekehrt, woraus das Behauptete und überdies folgt, dafs  $N$  durch die Gleichung

$$(T + U\sqrt{D})^N = T' + U'\sqrt{D'}$$

bestimmt wird, worin  $T', U'$  die kleinsten Werthe von  $t', u'$  bedeuten.

\*) Es ist hier von den Zusätzen Gebrauch gemacht worden, welche der geehrte Herr Verfasser der von ihm in den Monatsberichten der Berliner Akademie (Juli 1855) eingerückten Notiz bei einer späteren Veröffentlichung derselben im *Liouvilleschen Journal* (Februar 1856) hinzugefügt hat.

Man kann, ohne  $T'$ ,  $U'$  zu kennen, den Exponenten  $N$  angeben, sobald für jeden der verschiedenen in  $S$  enthaltenen Primfactoren  $p$  der kleinste Werth  $\nu$ , für den  $u$ , durch  $p$  aufgeht, und zugleich der Exponent  $\delta$  der höchsten Potenz von  $p$  bekannt ist, durch welche  $u$ , theilbar ist. Es wird nämlich, wenn  $e$  eine beliebige durch  $p^\varepsilon$  (wo  $\varepsilon$  auch Null sein kann) und keine höhere Potenz von  $p$  theilbare Zahl bedeutet, unter der vorhin gemachten Voraussetzung  $p^{\delta+\varepsilon}$  die höchste in  $u_{\nu e}$  aufgehende Potenz von  $p$ .

Um dies zu beweisen, bezeichne man mit  $\theta$  und  $\eta$  zwei ganze Zahlen, welche der Gleichung (1.) genügen, und überdies mit  $p^k$  (wo  $k$  von Null verschieden) die höchste in  $\eta$  enthaltene Potenz von  $p$ . Wenn man aus dieser Lösung durch die Formel

$$(\theta + \eta\sqrt{D})^m = t + u\sqrt{D}$$

eine neue herleitet, so hat man

$$u = \eta \left\{ m\theta^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \theta^{m-3} \eta^2 D + \dots \right\},$$

und, da  $\theta$  nicht durch  $p$  theilbar ist, so erhellt, dafs die höchste in  $u$  aufgehende Potenz von  $p$  die  $k$ te sein wird, wenn  $m$  nicht durch  $p$  theilbar ist, dagegen die  $k+1$ ste, wenn  $m = p$ . Da nun die Erhebung zu irgend einer Potenz sich aus den beiden angeführten speciellen Fällen zusammensetzen läfst, so ergibt sich hieraus das oben ausgesprochene Resultat.

Nach dem eben Bewiesenen besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs  $u_{\nu e}$  durch  $p^\alpha$ , wo  $\alpha$  positiv, theilbar sei, darin, dafs  $e$  den Factor  $p^{\alpha-\delta}$  haben mufs, wo der Exponent  $\alpha - \delta$ , wenn er negativ wird, durch Null zu ersetzen ist.

Unterscheidet man nun die verschiedenen in  $S$  enthaltenen Primfactoren  $p$  so wie die ihnen entsprechenden Werthe  $\nu$ ,  $\delta$  durch Indices, und setzt

$$S = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots,$$

so ist nach dem Gesagten  $N$  das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen

$$\nu_1 p_1^{\alpha_1 - \delta_1}, \quad \nu_2 p_2^{\alpha_2 - \delta_2}, \quad \dots$$

und man sieht sogleich, dafs wenn man ohne neue Primzahlen in  $S$  aufzunehmen, sämmtliche Exponenten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  über jede Grenze hinaus wachsen läfst, der Quotient  $\frac{S}{N}$  bald einen festen von  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  nicht mehr abhängigen Werth erreichen wird.

Aus der eben bewiesenen Eigenschaft ergibt sich eine interessante Folgerung für die Theorie der quadratischen Formen von positiver Determi-

nante. Fügt man zu den schon gemachten Voraussetzungen noch die hinzu, daß  $D$  keinen quadratischen Faktor enthält, bezeichnet mit  $h$  die Anzahl der Klassen, in welche die zur Determinante  $D$  gehörigen Formen zerfallen, und nimmt  $h'$  in ähnlicher Bedeutung für die Determinante  $D' = DS^2$ , so hat man, wie in einer früheren Abhandlung (Rech. sur div. applic. sec. part.) bewiesen worden ist, die Gleichung

$$h' = h \frac{\log(T + U\sqrt{D})}{\log(T' + U'\sqrt{D'})} SR,$$

wo hinsichtlich des Factors  $R$  zu bemerken ist, daß derselbe von den Primzahlen  $p_1, p_2, \dots$ , nicht aber von den Exponenten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , abhängt. Da man dieser Gleichung auch die Form

$$h' = h \frac{S}{N} R$$

geben kann, so folgt, daß aus jeder positiven Determinante  $D$  unendlich viele andere  $DS^2$  abgeleitet werden können, welchen allen dieselbe Klassenanzahl entspricht. Durch schickliche Wahl von  $D$  und den Primzahlen  $p_1, p_2, \dots$  läßt sich bewirken, und zwar auf unendlich viele verschiedene Arten, daß diese unveränderliche Anzahl der Klassen mit der der genera übereinstimmt, und so die Richtigkeit der von *Gauß*s ausgesprochenen Vermuthung beweisen, daß die Reihe der positiven Determinanten, welche in jedem genus nur eine Klasse besitzen, nicht abbricht, was um so merkwürdiger ist, als die mit derselben Eigenschaft begabten negativen Determinanten nur in endlicher Anzahl zu sein scheinen (Disq. arith. art. 303 und 304). Nach einer sehr weit getriebenen Induction (sie erstreckt sich, wenn ich nicht irre, bis 10000), welche zuerst von *Euler* und später von *Gauß*s angestellt wurde, deren ersterer zu einer Zeit, wo die von *Lagrange* gegründete Theorie der quadratischen Formen noch nicht bestand, sich mit diesen Zahlen unter dem Namen der *numeri idonei* beschäftigte, d. h. der zur Auffindung großer Primzahlen geeigneten Zahlen, würde die Anzahl der in Rede stehenden negativen Determinanten nicht mehr als 65 betragen, und die größte derselben würde, abgesehen vom Vorzeichen, den Werth 1848 haben.