Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0009
LOG Titel: Über die Flächen dritten Grades.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

5.

Über die Flächen dritten Grades.

(Von Herrn *J. Steiner.*)

(Vorgetragen in der Gesammtsitzung der Berliner Akademie am 31sten Januar 1856.)

Die höheren algebraischen Flächen sind rücksichtlich ihrer charakteristischen geometrischen Eigenschaften noch wenig erforscht. Aus den langjährigen Untersuchungen über diesen Gegenstand wird ein Theil derjenigen Resultate mitgetheilt, die sich auf die Flächen dritten Grades beziehen. Es ist daraus zu sehen, dafs diese Flächen fortan fast eben so leicht und einläfslich zu behandeln sind, als bisher die Flächen zweiten Grades. Von den schönen Eigenschaften der ersteren mögen hier, in gedrängter Kürze, nachstehende angeführt werden.

Zuerst werden mehrere verschiedene Erzeugungsarten der Flächen dritten Grades gezeigt, aus welchen die wesentlichsten Eigenschaften dieser Flächen unmittelbar hervortreten, und wovon folgende die beachtenswerthesten sind.

I. ***Durch die 9 Geraden, g, in welchen die Flächen zweier beliebigen gegebenen Trieder einander gegenseitig schneiden und durch irgend einen gegebenen Punct, P, ist eine Fläche dritten Grades, f^3, bestimmt.*** Nämlich jede durch den Punct gelegte Ebene schneidet die 9 Geraden in 9 Puncten, welche mit jenem zusammen irgend eine Curve dritten Grades bestimmen, und der Ort aller dieser Curven ist die genannte Fläche. — Unter den 9 Geraden g giebt es sechsmal drei solche, welche einander nicht schneiden, und welche also ein Hyperboloid bestimmen; jedes dieser 6 Hyperboloide schneidet die Fläche f^3 noch in drei neuen Geraden, ***so dafs also dieselbe 27 Gerade enthält.*** Rücksichtlich der zwei Schaaren Gerade, die jedes Hyperboloid enthält, gehören die je drei bestimmenden Geraden zur einen und die drei neuen Geraden zur andern Schaar, diese drei schneiden also jene, aber einander nicht.

II. ***Werden ein gegebener Flächenbüschel zweiten Grades, $B(f^2)$, und ein gegebener Ebenenbüschel $B(E)$, projectivisch auf einander be-***

zogen, so erzeugen sie irgend eine Fläche dritten Grades, f^3, welche durch die Grundcurve, R^4, *) *des ersten, so wie durch die Axe, g, des andern Büschels geht;* d. h. alle Kegelschnitte, C^2, in welchen die einzelnen Flächen zweiten Grades, f^2, von den ihnen entsprechenden Ebenen, E, geschnitten werden, **) liegen in einer Fläche dritten Grades. *Dabei giebt es fünf Ebenen E, welche die ihnen entsprechenden Flächen f^2 berühren, so dafs der zugehörige Kegelschnitt C^2 in zwei Gerade, g, zerfällt,* u. s. w.

III. *Ist ein Flächenbüschel zweiten Grades, $B(f^2)$, gegeben, so ist die Pampolare jedes beliebigen Pols, P, in Bezug auf denselben irgend ein e Flähe dritten Grades f^3, welche stets durch die Grundcurve R^4 des Büschels und auch durch den Pol geht.* Das heifst, der aus dem Pol P jeder Fläche, f^2, des gegebenen Büschels umschriebene Kegel berührt sie längs eines Kegelschnitts C^2 und alle diese Kegelschnitte liegen in einer Fläche dritten Grades f^3; die Ebenen der Kegelschnitte, als Polarebenen des Pols in Bezug auf die respectiven Flächen des Büschels, gehen sämmtlich durch eine bestimmte Gerade, g, welche auch in der Fläche f^3 liegt. Der gegebene Flächenbüschel enthält insbesondere vier Kegel, wie *Poncelet* zuerst gezeigt hat, für jeden derselben zerfällt der genannte Kegelschnitt C^2 in zwei Gerade, g_1, die sich im Scheitel des Kegels kreuzen und mit jener Geraden g ein Dreieck bilden; auch bei derjenigen Fläche des Büschels, welche durch den Pol P geht und daher daselbst von ihrer Polarebene berührt wird, zerfällt der Kegelschnitt C^2 in zwei Gerade, g_2, die sich im Pol kreuzen und gleichfalls mit jener Geraden g ein Dreieck bilden; dies sind zusammen bereits 11 in der Fläche f^3 liegende Gerade. Durch jede der beiden zuletzt genannten Geraden g_2 lassen sich vier solche Ebenen legen, welche die Grundcurve R^4 des Büschels berühren, und jede dieser Ebenen schneidet die Fläche f^3 in zwei neuen Geraden, die sich im Berührungspunct (der Ebene mit der Curve) kreuzen, was mit jenen zusammen 27 in der Fläche f^3 liegende Gerade ausmacht.

---

*) Das heifst, die Raumcurve 4ten Grades, die der gemeinsame Schnitt aller Flächen des $B(f^2)$ ist.

**) Die projectivische Beziehung der gegebenen Büschel geschieht unter anderem dadurch, dafs man in irgend einem Puncte P der Curve R^4 an alle Glieder des Flächenbüschels $B(f^2)$ Berührungsebenen E_1 legt, die einen Ebenenbüschel $B(E_1)$ bilden, diesen sodann mit dem gegebenen Ebenenbüschel $B(E)$, durch willkürliche Annahme von drei Paar sich entsprechender Ebenen, E und E_1, projectivisch bezieht und nachher an Stelle jeder Ebene E_1 diejenige Fläche f^2 nimmt, welche sie berührt.

IV. *Sind irgend drei Flächen zweiten Grads gegeben, so schneiden sich die drei Polarebenen jedes Pols P in Bezug auf dieselben, im Allgemeinen, in je einem andern Puncte P_1; bewegt sich der Pol P in einer beliebigen gegebenen Ebene, so beschreibt der Punct P_1 irgend eine Fläche dritten Grads.* Oder: *Denkt man sich alle Flächen zweiten Grads, welche durch beliebig gegebene sieben Puncte gehen, so liegen die irgend einer gegebenen Ebene in Bezug auf dieselben entsprechenden Pole sämmtlich in einer Fläche dritten Grads.* Die vielen weitern interessanten Umstände, welche dabei noch stattfinden, müssen hier übergangen werden.

Aus diesen Entstehungsarten — und weiterhin durch Hülfe einiger Polaritäts-Sätze — ergeben sich nachstehende merkwürdige Haupteigenschaften der Flächen dritten Grads.

„*Eine allgemeine Fläche dritten Grads f^3 enthält 27 gerade Linien g (reelle oder imaginäre); jede derselben wird von 10 der übrigen geschnitten, und zwar von fünf Paaren die einander selbst schneiden, so dafs sie mit jener fünf Dreiecke bilden. Alle 27 Geraden g schneiden sonach einander zu zweien in 135 Puncten δ und bilden im Ganzen 45 Dreiecke $\triangle$. Die fünf Paar Schnittpuncte, δ, in jeder Geraden, g, gehören zu einem Involutions-Punctensystem; ist dasselbe hyperbolisch, so enthält es zwei Asymptotenpuncte (Doppelpuncte) π. Die Seiten jedes Dreiecks $\triangle$ enthalten entweder* 1° *alle drei hyperbolisches, oder* 2° *nur eine hyperbolisches und zwei elliptisches Puncten-System.* Oder umfassender:

Es giebt 27 verschiedene Systeme von solchen Ebenen, E, welche die Fläche f^3 in Kegelschnitten, C^2, schneiden, und zwar bestehen dieselben aus 27 Ebenenbüscheln, $B(E)$, welche die 27 Geraden g respective zu Axen haben; und umgekehrt, *jede Ebene, welche die Fläche f^3 in einem Kegelschnitte schneidet, schneidet dieselbe nothwendig noch in einer der 27 Geraden und gehört zu einem der Ebenenbüschel. Die Schaar Kegelschnitte, C^2, die den Ebenen eines und desselben Ebenenbüschels angehören, schneiden dessen Axe, g, in dem genannten Puncten-System; jede Ebene ist als eine die Fläche f^3 doppelt berührende anzusehen, und die Schnitte ihres Kegelschnitts mit der Axe als die Berührungspuncte; unter den Kegelschnitten giebt es insbesondere zwei, C_0^2, welche die Axe berühren, und zwar in den genannten Asymptotenpuncten π; ferner giebt es fünf Kegelschnitte, die in je zwei Gerade g zer-*

fallen, so dafs die zugehörige Ebene die Fläche f^3 in drei Puncten berührt, nämlich in den Ecken des in ihr liegenden Dreiecks $\triangle$. Die Ebenen der 45 Dreiecke $\triangle$ sind die einzigen, welche die Fläche f^3 in drei Puncten berühren.

Es giebt ferner 45 Systeme von solchen Flächen zweiten Grads, f^2, welche die Fläche dritten Grads f^3 in je drei Kegelschnitten C^2 schneiden; jedem Dreieck $\triangle$ entspricht ein solches System, nämlich jede drei Ebenen, die beziehlich durch dessen drei Seiten gehen, enthalten drei solche Kegelschnitte C^2, durch welche allemal irgend eine Fläche zweiten Grads geht; und umgekehrt: *Hat eine Fläche zweiten Grads f^2 mit der Fläche dritten Grads f^3 irgend drei Kegelschnitte gemein, so gehen die Ebenen derselben jedesmal durch die drei Seiten eines der 45 Dreiecke* $\triangle$; oder *geht eine Fläche f^2 durch zwei in der Fläche f^3 liegende Kegelschnitte, so schneiden sich beide Flächen allemal noch in irgend einem dritten Kegelschnitt und die Ebenen der drei Kegelschnitte gehen durch die drei Seiten eines und desselben Dreiecks* $\triangle$. Die Seiten jedes Dreiecks $\triangle$ werden von den vorgenannten besondern Kegelschnitten C_0^2 in ihren Asymptoten-Puncten π berührt; *die drei Paar oder sechs Asymptoten-Puncte liegen zu drei und drei in vier Geraden, l, und durch die je drei zugehörigen Kegelschnitte C_0^2 geht ein Kegel zweiten Grads, f_0^2, welcher die Ebene des Dreiecks längs der zugehörigen Geraden l berührt, und die Scheitel aller vier Kegel liegen in einer Geraden.* Aufserdem enthält das dem Dreieck entsprechende Flächensystem zweiten Grads, f^2, noch unendlich viele Kegel; *ihre Scheitel liegen sämmtlich in einer Fläche vierten Grads.*

Die drei Kegelschnitte C^2, durch welche je eine Fläche zweiten Grads f^2 geht, können insbesondere auch aus drei Paar Geraden g bestehen, wobei dann die Fläche ein einfaches Hyperboloid, h^2, ist. *Nimmt man von den 27 Geraden g irgend drei, welche einander nicht schneiden, so bestimmen sie ein solches Hyperboloid, denn dasselbe schneidet die Fläche f^3 allemal noch in drei andern Geraden g, welche jene drei treffen, aber einander nicht. „Es giebt im Ganzen 360 solche Hyperboloide h^2; jedes der 45 Systeme Flächen zweiten Grads enthält 48 derselben, und jedes Hyperboloid kommt in 8 verschiedenen Systemen vor."*

Wählt man von den 45 Dreiecken $\triangle$ zwei solche, welche keine Gerade g gemein haben, deren Ebenen sich also in einer andern Geraden, etwa k, schneiden, die ihre *Kante* heifst, so treffen sich die Seiten beider

Dreiecke paarweise auf dieser Kante, in drei Puncten δ. Bezeichnet man die Dreiecke durch A und B, ihre Seiten (die Gerade g sind) beziehlich durch a, a_1, a_2 und b, b_1, b_2, so schneiden sich etwa die Paare a und b, a_1 und b_1, a_2 und b_2 auf der Kante k, und sodann sind diese Paare Seiten von drei andern Dreiecken △: abc, $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$ oder A_1, B_1, C_1, deren dritte Seiten c, c_1, c_2, für sich, die Seiten eines sechsten Dreiecks △ oder C sind. Die Ebenen der Dreiecke A, B, C bilden ein Trieder, T, auf dessen drei Kanten k ihre Seiten einander paarweise schneiden, und ebenso bilden die Ebenen der Dreiecke A_1, B_1, C_1 ein Trieder, T_1, auf dessen Kanten ihre Seiten einander treffen; jene Dreiecke, wie diese, haben die nämlichen 9 Geraden g, oder $aa_1a_2bb_1b_2cc_1c_2$ zu Seiten, und die Flächen beider Trieder schneiden einander gegenseitig in denselben (wie oben I.). Zwei solche Trieder heifsen *conjugirte Trieder.*

„Die Ebenen der 45 Dreiecke △ bilden auf diese Weise im Ganzen 240 Trieder, oder 120 Paare conjugirte Trieder T und T_1.“ Diese Paare ordnen sich zu drei und drei in 40 Gruppen, wovon jede Gruppe alle 27 Geraden g enthält.

„Jedes Dreieck △ kommt in 16 verschiedenen Triedern vor, so dafs also 16 Trieder-Scheitel in seine Ebene fallen; diese 16 Scheitel liegen allemal in einer Curve vierten Grads, welche die Seiten des Dreiecks zu Doppeltangenten hat, und zwar dieselben in ihren Asymptotenpuncten π berührt.“

Die 240 Trieder haben zusammen 720 verschiedene Kanten k; *also liegen die 135 Schnittpuncte δ der 27 Geraden g zu drei und drei in 720 Geraden k, welche sich zu drei und drei in 240 neuen Puncten T (Scheiteln der Trieder) treffen.* Durch jeden Schnittpunct δ gehen je 16 Gerade k, wovon jede noch durch zwei andere Schnittpuncte, etwa δ_1 und δ_2 (statt δ), geht; nimmt man in jeder derselben einen vierten Punct, λ, so, dafs $\delta\delta_1\ \lambda\delta_2$ harmonisch sind, *so liegen die 16 Puncte λ zweimal zu vier und vier in vier Geraden, und diese 8 Geraden sammt den zwei Geraden g, deren Schnitt jener erste Punct δ ist, liegen in einem Hyperboloid.*

Wird durch irgend einen in der Fläche f^3 liegenden Kegelschnitt C^2 eine beliebige Fläche zweiten Grads, f^2, gelegt, *so schneidet sie jene Fläche, im Allgemeinen, noch in einer Raumcurve vierten Grads, R^4, durch welche allemal unzählige andere Flächen zweiten Grads gehen, oder ein Flächenbüschel zweiten Grads geht; unter diesen Flächen befinden sich 5 solche,* *welche die gegebene Fläche f^3 in je einem Puncte berühren, und die Berührungsebenen in diesen fünf Puncten sammt der Ebene jenes Kegelschnitts C^2 gehen durch eine und dieselbe Gerade g; zudem enthält jede der 5 Berührungsebenen noch zwei andere Gerade g, die sich im Berührungspunct kreuzen, so dafs also jede ein Dreieck $\triangle$ enthält.* — Legt man durch irgend zwei einander nicht schneidende Gerade g ein beliebiges Hyperboloid, *so schneidet dasselbe die Fläche f^3 aufserdem noch in einer solchen Raumcurve vierten Grads, R_1^4, durch welche keine andere Fläche zweiten Grads geht;* diese Curve ist also wesentlich verschieden von der vorigen R^4, welche als der Schnitt irgend zweier Flächen zweiten Grads anzusehen ist, und *welche man bisher für die einzige Raumcurve vierten Grades hielt.* Die beiden Curven unterscheiden sich namentlich noch in folgenden Eigenschaften. „*Die Tangentenfläche der Curve R_1^4* (d. h. *die Fläche, in welcher alle ihre Tangenten liegen*) *ist vom 6ten Grad und von der 6ten Klasse; wogegen die Tangentenfläche der Curve R^4 vom 8ten Grad und von der 12ten Klasse ist.*" Ferner: „*Von den zwei Schaaren Gerade, welche in dem durch die Curve R_1^4 gehenden einzigen Hyperboloid liegen, schneidet jede Gerade der einen Schaar die Curve in drei und jede Gerade der andern Schaar nur in einem Punct; wogegen bei jedem Hyperboloid, welches durch die Curve R^4 geht, jede Gerade aus der einen oder andern Schaar dieselbe in zwei Puncten trifft.*"

„*Somit giebt es zwei wesentlich verschiedene Arten von Raumcurven vierten Grads, R^4 und R_1^4.*"

Wird der gegebenen Fläche dritten Grads, f^3, aus irgend einem Puncte oder Pol P ein Kegel umschrieben, so ist derselbe vom 6ten Grad und berührt die Fläche längs einer Raumcurve 6ten Grads, durch die jedesmal irgend eine Fläche zweiten Grads, f^2, geht, welche die *erste Polare* des Pols P in Bezug auf die gegebene Fläche f^3 heifst. Es giebt unendlich viele solche besondere Pole, deren erste Polare je ein Kegel zweiten Grades, f_0^2, ist, und es findet das Gesetz statt: „*dafs wenn P_1 der Scheitel dieses Kegels ist, dann auch seine erste Polare gleichfalls ein Kegel ist, und dafs der Scheitel desselben in jenem ersten Pol P liegt.*" Solche zwei Puncte P und P_1 heifsen *reciproke Pole* in Bezug auf die Fläche f^3.

„*Der gemeinsame Ort aller reciproken Pole ist eine bestimmte Fläche vierten Grads, P^4,*" welche die *Kernfläche* der gegebenen Fläche dritten Grads f^3 genannt wird.

„Die Kernfläche P^4 geht namentlich auch durch die Scheitel der obigen **240** *Trieder, und zwar sind die Scheitel jedes der* **120** *Paar conjugirten Trieder T und T_1 auch ein Paar reciproke Pole."* Dabei findet noch der nähere Umstand statt, *dafs der Polarkegel f_0^2 des Scheitels T dem conjugirten Trieder T_1 umschrieben ist, d. h. durch dessen drei Kanten k geht, und ebenso auch umgekehrt.*

„Ferner sind auch die zwei Asymptotenpuncte π in jeder der **27** *Geraden g ein Paar reciproke Pole P und P_1, und zwar wird die Gerade in denselben von der Kernfläche P^4 berührt."* —

„Es giebt im Ganzen **10** *solche spezielle Pole P, oder P_0, deren Polarkegel f_0^2 in zwei Ebenen, F und F_1, zerfällt, (so dafs auch der aus dem Pol der Fläche f^3 umschriebene Kegel in zwei Kegel dritten Grads und ebenso die Berührungscurve in zwei ebene Curven dritten Grads zerfällt); dabei ist dann der reciproke Pol, P_1, nicht mehr absolut bestimmt, sondern er liegt längs der Schnittlinie oder Kante, p_1, der beiden Ebenen überall, so dafs für jeden in dieser Kante liegenden Punct P_1 die erste Polare ein Kegel f_0^2 ist, und dafs die Scheitel aller dieser Kegel in jenem Pol P_0 vereinigt sind." „Den* **10** *Polen P_0 entsprechen demnach* **10** *reciproke Grade p_1." „Die* **10** *Pole sind Knotenpuncte der Kernfläche P^4 und die* **10** *Geraden liegen ganz in derselben."* Die gegenseitige Lage dieser Pole und Geraden ist der Art, *dafs in jeder Kante p_1 je drei der* **10** *Pole liegen, und dafs auch durch jeden Pol P_0 je drei der* **10** *Kanten gehen.* Oder genauer: *„Die* **10** *Pole P_0 und die* **10** *Geraden p_1 sind die Ecken und Kanten eines vollständigen Pentaeders, d. h. es giebt* **5** *bestimmte Ebenen, E_0, die sich paarweise in den* **10** *Geraden und zu je drei in den* **10** *Polen schneiden, und wobei die Schnittlinie je zweier Ebenen und der Schnittpunct der jedesmaligen drei andern reciprok sind." Die Kernfläche P^4 wird hiernach von jeder der* **5** *Ebenen E_0 in je vier Geraden p_1 geschnitten. Die durch jede Kante p_1 gehenden, vorgenannten zwei Ebenen F und F_1 sind zu den zugehörigen zwei Ebenen E_0 zugeordnet harmonisch.* Die zehn Ebenenpaare F und F_1 haben auch noch interessante gegenseitige Beziehungen unter sich.

Es giebt nun ferner auch noch solche Pole P, deren Polarkegel f_0^2 insbesondere Cylinder sind. *„Der Ort dieser Pole ist eine auf der Kernfläche liegende Raumcurve* **6***ten Grads, R^6, welche durch die* **10** *Knotenpuncte P_0 derselben geht"* (da deren Polaren, F und F_1, auch als Cylinder anzusehen sind). „*Die Axe, a, jedes Cylinders schneidet die Curve* R^6 *in drei Puncten, und durch jeden Punct der Curve gehen je drei Axen.*" *Der gemeinschaftliche Ort aller Cylinder-Axen a ist eine (geradlinige) Fläche 8ten Grads,* a^8, *welche die Curve* R^6 *zur dreifachen Linie hat, und in welcher namentlich auch die 10 Kanten* p_1 *des vorgenannten Pentaeders liegen.*" Mehrere merkwürdige Eigenschaften dieser Fläche können hier nicht entwickelt werden.

Die Kernfläche P^4 schneidet die gegebene Fläche f^3 längs einer Raumcurve 12ten Grads, R^{12}, welche für die letztere Fläche sehr charakteristisch ist. *Zunächst geht diese Curve durch die 54 Asymptotenpuncte* π *der 27 Geraden g und berührt sie in denselben, so dafs sie also jede Gerade zur Doppeltangente hat.*

„*Sodann scheidet die Curve* R^{12} *auf der Fläche* f^3 *diejenigen Regionen von einander ab, wo das Krümmungsmafs positiv und wo dasselbe negativ ist; längs der Curve selbst ist dasselbe Null.*"

Ferner ist die Curve R^{12} *der Ort aller derjenigen Puncte auf der Fläche* f^3, *in welchen die zugehörige Berührungsebene die Fläche mit Rückkehrpunct schneidet, d. h. in einer solchen Curve dritten Grads* C^3 *schneidet, welche den Punct zum Rückkehrpunct hat, so dafs also die Rückkehrtangente, t, der Curve* C^3 *die Fläche* f^3 *im selben Puncte osculirt oder dreipunctig berührt.*

„*Der Ort aller dieser Rückkehrtangenten t ist eine abwickelbare Fläche 30sten Grads,* t^{30}, *welche die Fläche* f^3 *längs der Curve* R^{12} *osculirt und die 27 Geraden g zu Doppellinien hat, so dafs also die Schnittcurve beider Flächen,* t^{30} *und* f^3, *die vom 90sten Grad sein mufs, aus der dreifachen Curve* R^{12} *und aus den doppelt zu zählenden 27 Geraden g besteht.*" *U. s. w.*

Eine beliebige Ebene, *E*, schneidet die gegebene Fläche f^3 in einer Curve dritten Grads; *die der Fläche längs dieser Curve umschriebene abwickelbare Fläche,* Φ, *ist vom 12ten Grad und von der 6ten Klasse, und ihre Rückkehrlinie (arrête de rebroussement) ist vom 18ten Grad.* Die zweite Polare irgend eines Pols *P* in Bezug auf die gegebene Fläche f^3 ist eine Ebene, etwa *e*. „*Bewegt sich der Pol P in jener festen Ebene E, so ist die Enveloppe seiner Polarebene e eine Fläche dritten Grads*

*e^3 **und nur vierter Klasse** *), **welche vier Knotenpuncte,** Q_0, **hat, und jener abwickelbaren Fläche** Φ **eingeschrieben ist; auch ist die Fläche** e^3 **allemal der Kernfläche** P^4 **eingeschrieben und berührt dieselbe längs einer Raumcurve 6ten Grads** R^6, **in welcher namentlich auch die 4 Knotenpuncte** Q_0 **sich befinden, so dafs also letztere jedesmal in der Kernfläche** P^4 **liegen.**"* Die Fläche e^3 heifst die *zweite* ***Polare*** der Ebene E in Bezug auf die gegebene Fläche f^3. Dieselbe hat (vor andern Flächen gleichen Grades) die merkwürdige besondere Eigenschaft: ***dafs der aus irgend einem in ihr liegenden Puncte ihr umschriebene Kegel (der für andere Puncte vom 6ten Grad ist) in zwei Kegel zweiten Grads und in die zugehörige Berührungsebene zerfällt; letztere berührt beide Kegel, und diese gehen stets beide durch die vier Knotenpuncte** Q_0. **Versetzt man die Ebene** E **ins Unendliche, so ist ihre zweite Polare** e^3 **die Enveloppe aller Durchmesser-Ebenen der gegebenen Fläche** f^3**; dieselbe behält alle angegebenen Eigenschaften, sie ist den Flächen** P^4 **und** Φ **eingeschrieben, etc.,*** die letztere, Φ, ist in diesem Falle eine Art asymptotischer Fläche der gegebenen Fläche f^3.

Bewegt sich der Pol P in irgend einer festen Geraden D, ***so ist die Enveloppe seiner Polarebene e ein Kegel zweiten Grads, etwa*** d^2, welcher die *zweite* ***Polare*** der Geraden D in Bezug auf die gegebene Fläche f^3 heifst.

„Es giebt im Ganzen 100 solche besondere Gerade D, deren zweite Polare sich auf eine Gerade d reducirt, d. h. wobei jener Kegel d^2 ***sich auf seine Axe d reducirt, so dafs alle Polarebenen e einen Büschel um dieselbe bilden."*** Den 100 Geraden D entsprechen jedoch zusammen nur 25 Gerade d, indem jede der letztern je vier von jenen entspricht. ***Die 25 Geraden d bestehen aus den 10 Kanten*** p_1 ***des obigen Pentaeders und aus den 15 Diagonalen desselben.***

*) Eine allgemeine Fläche dritten Grads ist von der zwölften Klasse; im obigen Fall wird die Klasse durch jeden Knotenpunct um 2 erniedrigt, eben so, wie nach *Poncelet*'s Satz, bei den ebenen Curven die Klasse durch jeden Doppelpunct um 2 verringert wird.