

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1857

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0053

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0053](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053)

**LOG Id:** LOG\_0012

**LOG Titel:** Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## 8.

## Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten.

(Von Herrn *L. Kronecker* zu Berlin.)

I. **W**enn die Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung, in welcher der erste Coefficient *Eins* ist, alle imaginär und ihre analytischen Moduln sämtlich gleich *Eins* sind, so müssen dieselben stets Wurzeln der Einheit sein.

*Beweis.* Es seien  $a, b, c, \dots$  die Wurzeln der Gleichung:

$$F(x) = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \dots + N = 0,$$

in welcher  $A, B, C, \dots, N$  ganze Zahlen bedeuten. Da nun die Wurzeln  $a, b, c, \dots$  lauter imaginäre Größen mit dem Modul *Eins* sein sollen, so setze man, indem man  $\sqrt{-1}$  mit  $i$  bezeichnet:

$$a = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad b = \cos \beta + i \sin \beta, \quad c = \cos \gamma + i \sin \gamma, \quad \dots$$

Alsdann erhält man, wenn die Coefficienten  $A, B, C, \dots$  durch die Wurzeln ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} A &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \dots \\ B &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \gamma) + \cos(\alpha + \delta) + \dots \\ C &= \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \delta) + \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Also muß  $A$  gleich einer Summe von  $n$  Größen sein, deren jede größer als  $-1$  und kleiner als  $+1$  ist. Ebenso muß  $B$  gleich einer Summe von  $\frac{n(n-1)}{1.2}$  solchen Größen sein,  $C$  gleich einer Summe von  $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$  solchen Größen u. s. w. Da aber  $A, B, C, \dots$  ganze Zahlen sein sollen, so sieht man, daß jeder Coefficient der Gleichung  $F(x) = 0$  nur eine begrenzte Anzahl von Werthen haben kann; und das Produkt aller dieser Anzahlen giebt offenbar die Anzahl aller derjenigen Werthsysteme an, welche den Coefficienten  $A, B, C, \dots$  überhaupt zukommen können. Hieraus geht hervor, daß es für jeden bestimmten Grad  $n$  nur eine endliche Anzahl von Gleichungen geben kann, welche die im obigen Satze angegebenen Bedingungen erfüllen.

Die Anzahl aller dieser Gleichungen  $n$ ten Grades sei  $r$ , und es sei ferner für irgend eine ganze Zahl  $k$ :

$$F_k(x) = (x - a^k)(x - b^k)(x - c^k) \dots$$

Dann genügt auch die Gleichung  $F_k(x) = 0$  allen in dem obigen Satze gemachten Voraussetzungen. Denn erstens sind die Coefficienten dieser Gleichung als symmetrische Functionen von  $a, b, c, \dots$  offenbar ganze Zahlen, und zweitens sind die analytischen Moduln ihrer Wurzeln:

$$a^k = \cos k\alpha + i \sin k\alpha, \quad b^k = \cos k\beta + i \sin k\beta, \quad c^k = \cos k\gamma + i \sin k\gamma, \quad \dots$$

sämmtlich gleich *Eins*. Folglich müssen mindestens zwei unter den Gleichungen:

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(x) = 0, \quad F_3(x) = 0, \quad \dots \quad F_{r+1}(x) = 0$$

identisch sein, d. h. es muß zwei von einander verschiedene Zahlen  $h$  und  $k$  geben, für welche  $F_h(x) = F_k(x)$  ist. Die Wurzeln der Gleichung  $F_h(x) = 0$ , nämlich:  $a^h, b^h, c^h, \dots$  müssen daher mit den Wurzeln der Gleichung  $F_k(x) = 0$ , nämlich mit:  $a^k, b^k, c^k, \dots$ , abgesehen von der Ordnung, übereinstimmen.

Für irgend eine Gröfse der ersten Reihe z. B.  $a^h$  sei nun  $b^k$  diejenige aus der zweiten Reihe, welche derselben gleich wird, so daß  $a^h = b^k$  ist. Ebenso sei  $b^h = c^k, c^h = d^k, \dots$ . Wenn man so fortfährt, muß man offenbar auch zu einer Gleichung kommen, in welcher  $a^k$  auf der rechten Seite steht. Man erhält also ein System von Gleichungen von folgender Form:

$$a^h = b^k, \quad b^h = c^k, \quad c^h = d^k, \quad \dots, \quad m^h = a^k.$$

Wird die Anzahl dieser Gleichungen mit  $\mu$  bezeichnet, und eliminirt man aus denselben die  $(\mu - 1)$  Gröfsen:  $b, c, d, \dots, m$ , so erhält man, wie leicht zu sehen:

$$a^{h\mu - k\mu} = 1$$

Da nun, wie oben bemerkt,  $h$  und  $k$  von einander verschiedene ganze Zahlen sind, so zeigt diese Gleichung, daß  $a$  in der That eine Wurzel der Einheit ist; und dieses Resultat gilt offenbar für *alle* Wurzeln der Gleichung  $F(x) = 0$ , da  $a$  ganz beliebig unter denselben gewählt worden ist.

II. Wenn eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, von denen der erste gleich *Eins* ist, lauter reelle Wurzeln hat, die in den Grenzen  $-2$  und  $+2$  liegen, die also durch  $2 \cos \alpha, 2 \cos \beta, 2 \cos \gamma, \dots$  dargestellt werden können, so stehen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  sämmtlich in commensurabilem Verhältniß zu einem Rechten.

*Beweis.* Es sei  $\Phi(y) = 0$  eine Gleichung von den angegebenen Eigenschaften, und  $2 \cos \alpha, 2 \cos \beta, 2 \cos \gamma, \dots$  die Wurzeln derselben. Wenn man nun den Grad von  $\Phi(y)$  mit  $\nu$  bezeichnet, und man setzt:

$$x^\nu \cdot \Phi\left(x + \frac{1}{x}\right) = F(x)$$

so ist  $F(x) = 0$  offenbar eine Gleichung, in welcher alle Coefficienten ganze Zahlen sind und der erste derselben gleich *Eins*. Ferner sieht man leicht, dafs die Wurzeln dieser Gleichung:

$$\cos \alpha \pm i \sin \alpha, \quad \cos \beta \pm i \sin \beta, \quad \cos \gamma \pm i \sin \gamma, \quad \dots$$

sind, also lauter imaginäre Gröfsen mit dem Modul *Eins*. Somit genügt die Gleichung  $F(x) = 0$  allen in dem obigen ersten Satze aufgestellten Bedingungen, und durch Anwendung desselben ergibt sich, dafs die Wurzeln:  $\cos \alpha \pm i \sin \alpha, \cos \beta \pm i \sin \beta, \dots$  sämtlich Wurzeln der Einheit sein müssen; ein Resultat, aus welchem die zu beweisende Eigenschaft der Winkelgröfsen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  unmittelbar hervorgeht.