Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0015
LOG Titel: Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Function.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

11.

Bestimmung der symmetrischen Verbindungen vermittelst ihrer erzeugenden Function.

(Von *C. W. Borchardt.*)

(Der physikalisch-mathematischen Klasse der Berliner Akademie vorgelegt von Herrn *Dirichlet* am 5. März 1855.)

Das von den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts bis zur Zeit *Waring*'s angewandte Verfahren, nach welchem die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung zuerst durch die Potenzsummen der Wurzeln ausgedrückt wurden und dann diese durch die Coefficienten der Gleichung, ist in neuerer Zeit durch die von *Waring*, *Gaufs* und *Cauchy* gegebenen Methoden verdrängt worden, und zwar deshalb, weil jenes ältere Verfahren nicht im Stande war, in allen Fällen nachzuweisen, dafs die ganzen Functionen der Coefficienten, denen die symmetrischen ganzen Verbindungen der Wurzeln gleich werden, auch ganzzahlige Functionen sind, d. h. solche, welche ganze Zahlen zu ihren numerischen Coefficienten haben.

Die neue Methode, welcher ich mich bediene, ist ebenso wie die letztgenannten, geeignet, diesen Nachweis zu führen, sie unterscheidet sich aber wesentlich dadurch von ihnen, dafs sie nicht wie jene eine bestimmte Ordnung unter den Wurzeln festsetzt, sondern dieselben ebenso symmetrisch in die Rechnung eintreten läfst, wie das ältere unvollständige Verfahren. Das Prinzip dieser neuen Methode ist die Zurückführung der symmetrischen ganzen Verbindungen auf *eine* erzeugende Function, aus deren Entwicklung sie sämmtlich hervorgehen. Die Bestimmung der *erzeugenden Function* durch die Coefficienten der Gleichung ist daher das Problem, auf welches die ganze Frage zurückkommt. Die Lösung dieses Problems hängt nun, wie eine genauere Untersuchung zeigt, von der Bestimmung einer bisher nicht betrachteten Determinante ab, in deren Werth jene erzeugende Function als Factor enthalten ist, ein Resultat, welches schon an sich von allgemeinerem Interesse für die Analysis zu sein scheint. Von dieser Determinante ausgehend gelangt man ohne Schwierigkeit zur Bestimmung der erzeugenden Function, und die Form, unter welcher sie erscheint, führt dann ferner auf eine Eigenschaft derselben, aus welcher durch einen einfachen Beweis gefolgert werden kann, dafs die Ausdrücke der ganzen symmetrischen Functionen der Wurzeln durch die Coefficienten nicht nur *ganz* sondern auch *ganzzahlig* sind.

Bildet man den Ausdruck

$$(1.)\qquad T = \Sigma\frac{1}{t-\alpha}\cdot\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdots\frac{1}{t_n-\alpha_n}$$

welcher alle Glieder umfassen soll, die aus dem hingeschriebenen dadurch entstehen, dafs von den beiden Reihen $t, t_1, \dots t_n$ und $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$ die eine unverändert bleibt, die andere auf alle Arten permutirt wird, einen Ausdruck, der in Bezug auf jede der beiden Reihen von Gröfsen symmetrisch ist, so führt die Entwicklung von T nach fallenden Potenzen von $t, t_1, \dots t_n$ auf jene einfachsten Typen der ganzen symmetrischen Functionen von $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$, welche aus *einem* Product ganzer Potenzen dieser Gröfsen durch Permutation hervorgehen und bekanntlich fähig sind *alle* ganzen symmetrischen Functionen von $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$ additiv zusammenzusetzen. T ist daher als die erzeugende Function der ganzen symmetrischen Verbindungen von $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$ anzusehen, und die Bestimmung dieser Verbindungen ist auf das *eine* Problem zurückgeführt, den Ausdruck der erzeugenden Function T so zu transformiren, dafs nicht mehr die einzelnen Gröfsen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$ darin vorkommen, sondern anstatt dessen die Coefficienten derjenigen ganzen Function $n+1$ten Grades fz, welche für $z = \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$ verschwindet und die Einheit zum Coefficienten der höchsten Potenz von z hat.

Die verlangte Transformation der erzeugenden Function T würde, direct angegriffen, eine ihrer Complication wegen schwer lösbare Aufgabe sein. Sie vereinfacht sich aber im höchsten Grade, wenn man sie von der Betrachtung der Determinante

$$D = \Sigma\pm\frac{1}{(t-\alpha)^2}\,\frac{1}{(t_1-\alpha_1)^2}\cdots\frac{1}{(t_n-\alpha_n)^2}$$

abhängig macht. Diese Determinante D, welche schon in ihrer Bildung die gröfste Aehnlichkeit mit der in der Analysis durch ihre vielfache Anwendung so bekannten Determinante

$$\triangle = \Sigma\pm\frac{1}{t-\alpha}\cdot\frac{1}{t_1-\alpha_1}\cdots\frac{1}{t_n-\alpha_n}$$

zeigt, steht mit derselben überdies in der merkwürdigen Beziehung, dafs sie, durch jene dividirt, die erzeugende Function T als Quotienten giebt, so dafs

$$(2.)\qquad D = T.\triangle$$

ist. Der Ausdruck $(ft, ft_1, \dots ft_n)^2 D$ ist nämlich eine ganze Function von $t, t_1, \dots t_n, \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$, welche ebensowohl durch das Product aller Differenzen zwischen $t, t_1, \dots t_n$, als auch durch das Product aller Differenzen zwischen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$ theilbar ist. Es bleibt daher nach der Division durch beide Producte wiederum eine ganze Function als Quotient, und es hat keine Schwierigkeit, die Werthe zu bestimmen, welche dieser Quotient annimmt, wenn jede der Gröfsen $t, t_1 \dots t_n$ mit irgend einer der Gröfsen $\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n$ zusammenfällt *). Diese $(n+1)^{n+1}$ Werthe des Quotienten sind aber gerade hinreichend, seinen allgemeinen Ausdruck vermöge der auf mehrere Variablen ausgedehnten *Lagrange*'schen Interpolationsformel zu bilden, und das Ergebnifs hiervon ist von der oben angeführten merkwürdigen Gleichung $D = T.\triangle$ nur dadurch unterschieden, dafs an der Stelle der Determinante $\triangle$ ihr bekannter Werth

$$(3.) \qquad \triangle = (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} \frac{\Pi(t, t_1 \dots t_n)\, \Pi(\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n)}{ft\, ft_1 \dots ft_n}$$

steht, in welchem $\Pi(t, t_1 \dots t_n)$ das Product aller aus $t, t_1 \dots t_n$ gebildeten Differenzen bedeutet, jede so genommen, dafs ein t mit kleinerem Index von einem t mit gröfserem Index abgezogen wird.

Indem man jetzt noch die Bemerkung hinzufügt, dafs die Determinante D aus der Determinante $\triangle$ durch successive Differentiation nach sämmtlichen Variablen $t, t_1 \dots t_n$ hervorgeht, leitet man aus den Gleichungen (2, 3) den folgenden Ausdruck für T her:

$$(4.) \qquad (-1)^{n+1} \frac{ft\, ft_1 \dots ft_n}{\Pi(t, t_1 \dots t_n)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_n} \left(\frac{\Pi(t, t_1 \dots t_n)}{ft\, ft_1 \dots ft_n} \right)$$

Der Ausdruck (4.), in dem nicht mehr die einzelnen Gröfsen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$, sondern anstatt dessen die Coefficienten von fx vorkommen, und der zur Unterscheidung von dem in Gleichung (1.) gegebenen Ausdruck von T mit Θ bezeichnet werden möge, leistet die verlangte Transformation der erzeugenden Function. Diese Transformation kann als die symbolische Zusammenfassung der Rechnungsoperationen angesehen werden, welche das oben besprochene ältere Verfahren für die Bestimmung aller ganzen symmetrischen Functionen vorschrieb.

---

*) Fallen nämlich $t, t_1, \dots t_n$ resp. mit $\alpha_i, \alpha_{i_1}, \dots \alpha_{i_n}$ zusammen, so wird der Quotient $= (-1)^{\frac{n.n+1}{2}} f'\alpha\, f'\alpha_1 \dots f'\alpha_n$ oder $= 0$, jenachdem $i, i_1 \dots i_n$ sämmtlich von einander verschieden sind, oder nicht.

Der in Θ vorkommende Differentialquotient $n+1$ter Ordnung enthält in seinem Zähler das aus den Differenzen von $t, t_1 \dots t_n$ gebildete Product als Factor. Indem man sich dies Product fortgehoben denkt, überzeugt man sich leicht, dafs bei der Entwicklung von Θ nach fallenden Potenzen der Variablen $t, t_1 \dots t_n$ die Entwicklungscoefficienten ganze und ganzzahlige Functionen der in fz vorkommenden Coefficienten sind.

Aber hiermit ist die Aufgabe noch nicht vollständig gelöst. In der That, betrachtet man die symmetrische Function

$$(5.)\qquad \Sigma\alpha^{p}\alpha_1^{p_1}\dots\alpha_n^{p_n},$$

wo das Summenzeichen alle diejenigen durch Permutation von $\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n$ aus dem hingeschriebenen Gliede hervorgehenden Glieder umfassen soll, welche für gegebene Werthe der Exponenten und willkührliche Werthe von $\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n$ von einander verschieden sind, oder mit anderen Worten: betrachtet man einen jener einfachsten Typen der ganzen symmetrischen Functionen, von welchen oben die Rede war, so kommt derselbe in der Entwicklung von T nur dann ohne weiteren numerischen Factor als Entwicklungscoefficient vor, wenn die Exponenten $p, p_1 \dots p_n$ sämmtlich von einander verschieden sind. Bedeuten dagegen $a, b, \dots h$ ganze Zahlen, deren Summe $= n+1$ ist, und finden sich unter den Exponenten a welche $= p$, b welche $= q$, etc. ... h welche $= s$ sind, so kommt in der Entwicklung von T die symmetrische Function (5.) mit dem Factor

$$N = 1.2\dots a \times 1.2\dots b \times \dots \times 1.2\dots h$$

behaftet als Entwicklungscoefficient vor. Unter der Voraussetzung, dafs zwischen den Exponenten $p, p_1 \dots p_n$ die soeben angenommenen Coincidenzen stattfinden, ist daher die symmetrische Function (5.) nur dann ein ganzzahliger Ausdruck der Coefficienten von fz, wenn in der Entwicklung von Θ der sie enthaltende Entwicklungscoefficient durch N theilbar ist. Diese Theilbarkeit bleibt also zu beweisen übrig, d. h. es bleibt zu zeigen, dafs, wenn in einem Term der Entwicklung von Θ die Variablen $t, t_1 \dots t_n$ in irgend einer Ordnung genommen zu den Exponenten $-(p+1), -(p_1+1) \cdots -(p_n+1)$ erhoben sind, und diese Exponenten resp. zu a, zu b, ... zu h coincidiren, dafs dann der Coefficient dieses Terms durch N theilbar ist.

Der Beweis dieser Theilbarkeit beruht nun auf folgenden beiden Punkten:

I. Anstatt die Exponenten $-(p+1)$, $-(p_1+1)$, $\cdots-(p_n+1)$ resp. zu a, zu b ... zu h coincidiren zu lassen, setze man fest, dafs die Variablen t, $t_1 \ldots t_n$ in denselben Anzahlen coincidiren, sodafs a derselben $=x$, b derselben $=y$, etc. ... endlich h derselben $=w$ werden, und stelle sich die Aufgabe, den Werth von Θ unter dieser Hypothese zu bestimmen.

Θ unterscheidet sich von dem Quotienten $\frac{D}{\triangle}$ nur dadurch, dafs der constante Factor $\Pi(\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ im Zähler und Nenner fortgehoben worden ist. Jede der Determinanten D und $\triangle$ verschwindet, sobald Coincidenzen zwischen den Variablen eintreten. Θ erscheint daher in dem vorliegenden Fall unter der Form $\frac{0}{0}$. Aber während bei Functionen von mehreren Variablen $\frac{0}{0}$ im Allgemeinen unbestimmt ist, hat es hier einen völlig bestimmten Werth, und dieser Werth kann nach denselben einfachen Regeln ermittelt werden, welche in der Differentialrechnung in Bezug auf Functionen von einer Variablen angegeben zu werden pflegen. Durch gehörige Anwendung dieser Regeln gelangt man zu dem Resultat, dafs unter Annahme der festgesetzten Coincidenzen der Variablen die erzeugende Function Θ dem Nfachen einer Function von $x, y \ldots w$ gleich wird, welche nach fallenden Potenzen dieser Variablen entwickelt, lauter ganze und ganzzahlige Ausdrücke der Coefficienten von fz zu Entwicklungscoefficienten hat. Dies kann man auch so ausdrücken: Läfst man in der Entwicklung von Θ nach fallenden Potenzen von t, $t_1 \ldots t_n$ die Variablen resp. zu a, zu b, ... zu h in die Werthe $x, y \ldots w$ coincidiren, so werden in der so reducirten, nach fallenden Potenzen von $x, y, \ldots w$ geordneten Entwicklung alle Coefficienten durch $N = 1.2 \ldots a \times 1.2 \ldots b \times \ldots$ $\ldots \times 1.2 \ldots h$ theilbar.

II. Auf dieses Resultat sich stützend beweist man die oben ausgesprochene auf den Fall coincidirender Exponenten bezügliche Theilbarkeit der Entwicklungscoefficienten von Θ, und zwar folgendermafsen. Indem man die Anzahl der Zahlen $a, b, \ldots h$ mit μ bezeichnet, nimmt man an, die behauptete Theilbarkeit finde statt, so lange μ einen der Werthe $n+1$, n, $n-1 \ldots \nu+1$ hat, und beweist, dafs unter dieser Annahme die Theilbarkeit auch für $\mu = \nu$ stattfinden mufs.

Es sei für einen bestimmten Entwicklungscoefficienten $\mu = \nu$. Man theile die Variablen t, $t_1 \ldots t_n$ in ν Gruppen, von welchen die erste die ersten a Variablen, die zweite die folgenden b Variablen etc., die letzte die letzten h Variablen in sich begreife. Hierauf theile man die Glieder der Entwicklung von Θ in zwei Klassen. Man setze in die erste Klasse diejenigen Glieder, in welchen die Variablen je einer Gruppe zu einem und demselben Exponenten erhoben sind, in die zweite Klasse alle übrigen Glieder. Läfst man nun die Variablen der ersten Gruppe in den Werth x, der zweiten in y, etc. der letzten in w coincidiren, so reducirt sich (in Folge der für $\mu > \nu$ angenommenen Theilbarkeit) der in der *zweiten* Klasse vereinigte Theil der Entwicklung von Θ auf lauter Glieder, deren Coefficienten durch N theilbar sind. Da aber dasselbe unter I. von der *ganzen* Entwicklung von Θ bewiesen worden ist, so gilt es auch von dem in der *ersten* Klasse vereinigten Theil für sich. Dies Resultat ist gleichbedeutend damit, dafs die zu beweisende Theilbarkeit für $\mu = \nu$ stattfindet, vorausgesetzt, dafs sie für $\mu > \nu$ wahr ist. Für $\mu = n+1$ ist sie evident, weil dann $N = 1$ ist, folglich gilt sie auch für $\mu = n$, folglich auch für $\mu = n-1$, etc. folglich allgemein.

Schliefslich sei noch bemerkt, dafs für die speciellen symmetrischen Functionen (5.), in welchen eine gewisse Anzahl von Exponenten, z. B. p_n, $p_{n-1}, \ldots p_{m+1}$ verschwinden, eine specielle erzeugende Function aufgestellt werden kann, welche nur $m+1$ Variablen enthält. Ihr Ausdruck durch die Coefficienten von fz ist dem Ausdruck Θ ganz analog, nämlich:

$$(6.)\qquad (-1)^{m+1}\frac{ft\,ft_1\ldots ft_m}{\Pi(t,t_1\ldots t_m)}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial}{\partial t_m}\left(\frac{\Pi(t,t_1\ldots t_m)}{ft\,ft_1\ldots ft_m}\right)$$

Man erhält denselben als die Grenze, welcher sich für unendlich grofse Werthe von $t_{m+1}, t_{m+2}, \ldots t_n$ der Ausdruck $t_{m+1}.t_{m+2}\ldots t_n.\Theta$ nähert. Die Functionen, welche in diesem Falle die Determinanten D und $\triangle$ vertreten, sind weniger einfach als jene Gröfsen, sie gehen aus denselben durch Anwendung des sogenannten *Laplace*'schen Determinantensatzes hervor.

Für $m=0$ wird der Ausdruck (6.) die bekannte erzeugende Function der Potenzensummen von $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n$, nämlich $\dfrac{1}{ft}\,\dfrac{\partial ft}{\partial t}$.