NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0017
LOG Titel: Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades).
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

13.

Über eine besondere Curve dritter Klasse (und vierten Grades).

(Von Herrn *J. Steiner.*)

(Vorgetragen in der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie zu Berlin am 7. Januar 1856.)

Die Curve tritt schon beim geradlinigen Dreieck ein. ***Fället man aus jedem Punkte in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie auf die Seiten Perpendikel, so liegen die je drei Fufspunkte allemal in irgend einer Geraden G, und die Enveloppe aller dieser Geraden ist eine Curve dritter Klasse, G^3, und vierten Grades, welche die im Unendlichen liegende Gerade, G_∞, zur ideellen Doppeltangente hat; ferner hat sie drei Rückkehrpunkte und die drei Rückkehrtangenten schneiden sich in einem und demselben Punkt.*** Die Curve berührt namentlich auch die Seiten des Dreiecks, so wie dessen drei Höhen, d. h. die aus den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Lothe.

Sei abc das gegebene Dreieck; δ der Mittelpunkt des ihm umschriebenen Kreises δ^2; ferner $a\mathfrak{a}$, $b\mathfrak{b}$, $c\mathfrak{c}$ seine drei Höhen und d der gemeinsame Schnittpunkt derselben; seien ferner α, β, γ die Mitten der Seiten und m der Mittelpunkt des durch diese Mitten und zugleich auch durch die Fufspunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Höhen gehenden Kreises m^2; endlich sei r der Radius dieses Kreises, derselbe ist halb so grofs als der Radius des Kreises δ^2. Da der Punkt m in der Mitte zwischen δ und d liegt, so ist d der äufsere Ähnlichkeitspunkt beider Kreise. ***Wird von den über den Seiten des Dreiecks liegenden Bogen des Kreises m^2, $\alpha\mathfrak{a}$, $\beta\mathfrak{b}$, $\gamma\mathfrak{c}$, von den Mitten der Seiten aus, mittels der Punkte u, v, w, je ein Drittel abgeschnitten, so dafs Bogen $\alpha u = \frac{1}{3}\alpha\mathfrak{a}$, $\beta v = \frac{1}{3}\beta\mathfrak{b}$, $\gamma w = \frac{1}{3}\gamma\mathfrak{c}$, so theilen diese Punkte die ganze Kreislinie in drei gleiche Theile, so dafs sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks uvw sind.***

Ist p ein beliebiger Punkt in der Kreislinie δ^2 und G die ihm zugehörige Fufspunkten-Linie, ***so hat der aus dem Höhenschnitt d nach p gezogene Strahl dp seine Mitte, etwa μ, allemal in G und zugleich auch im Kreise m^2***; dieser Kreis werde von G zum zweiten Mal in s geschnitten;

der Punkt μ wird *Mittelpunkt* und s *Scheitel* der Fufspunkten-Linie G genannt. Im Kreise δ^2 sei p_1 der Gegenpunkt von p, *so steht dessen Fufspunkten-Linie G_1 jedesmal auf G senkrecht,* und zwar haben beide den Scheitel s gemein und ihre Mittelpunkte μ und μ_1 sind gleicherweise Gegenpunkte im Kreise m^2, und die Durchmesser pp_1 und $\mu\mu_1$ sind parallel. *Demnach sind die Fufspunkten-Linien, oder die Tangenten der Curve G^3, paarweise zu einander rechtwinklig, auf jeder steht eine — aber nur eine einzige — bestimmte andere rechtwinklig, und der Ort der Scheitel s aller dieser rechten Winkel ist die Kreislinie m^2.* Diese Eigenschaft hat also die Curve mit den Kegelschnitten gemein. Solche rechtwinklige Tangenten-Paare sind namentlich auch die Seiten und zugehörigen Höhen des gegebenen Dreiecks. Jede zwei zu einander rechtwinklige Fufspunkten-Linien heifsen schlechthin ein *Paar.*

Jede Fufspunkten-Linie G_2 ($=G$) wird von jedem Paar in zwei solchen Punkten geschnitten, welche gleich weit von ihrem Mittelpunkte μ_2 abstehen, eine Folge davon ist: dafs G_2 von der Curve G^3 in demjenigen Punkte t_2 berührt wird, welcher von ihrem Mittelpunkt eben so weit absteht, als ihr Scheitel s_2, also $\mu_2 t_2 = \mu_2 s_2$. Es folgen ferner nachstehende interessante Eigenschaften. *Die Gerade, welche durch die Berührungspunkte t, t_1 irgend eines Paars GG_1 geht, ist stets auch eine Fufspunkten-Linie G_2, und diejenige, die mit ihr ein Paar bildet, geht jedesmal durch den Scheitel jenes Paars; zudem hat die Berührungs-Sehne tt_1 constante Länge, nämlich sie ist dem vierfachen Radius des Kreises m^2 gleich, $tt_1 = 4r$.* Oder umgekehrt: *die Curve G^3 schneidet jede ihrer Tangenten G_2 in zwei solchen Punkten t und t_1, deren Abstand von einander constant, und zwar dem Durchmesser des Kreises δ^2, oder dem doppelten Durchmesser des Kreises m^2 gleich ist; und die Tangenten in solchen zwei Schnittpunkten sind je ein Paar GG_1. Die in den Schnitten t, t_1 und in dem Berührungspunkte t_2 jeder Tangente G_2 auf die Curve G^3 errichteten drei Normalen treffen sich allemal in irgend einem Punkte q und der Ort dieses Punktes ist ein Kreis $[m]^2$, der mit dem Kreise m^2 concentrisch ist, und einen dreimal so grofsen Radius hat, als dieser. Die Curve G^3 berührt den Kreis m^2 in den oben genannten drei Punkten u, v, w und hat dieselben zu Scheiteln. In diesen Punkten bilden die zugehörigen Tangenten, etwa U, V, W, und die Kreisdurchmesser U_1, V_1, W_1 mit einander Paare; jene sind* *die einzigen drei Fufspunkten-Linien, bei welchen der Scheitel* (s), *Mittelpunkt* (μ) *und Berührungspunkt* (t) *vereint sind, die anderen haben die Punkte* u, v, w *zu Scheiteln, deren Gegenpunkte* u_1, v_1, w_1 (*im Kreise* m^2) *zu Mittelpunkten, und um die Länge des Durchmessers über diese hinaus ihre Berührungspunkte* u_2, v_2, w_2. *Diese letztern Punkte sind die drei Rückkehrpunkte der Curve* G^3 *und* U_1, V_1, W_1 *sind die Rückkehrtangenten, die also alle drei durch den Mittelpunkt* m *des Kreises gehen, gleich lang sind, nämlich* $mu_2 = mv_2 = mw_2 = 3r$, *und mit einander gleiche Winkel* ($= 120^0$) *bilden, so dafs die drei Rückkehrpunkte* u_2, v_2, w_2 *im oben genannten Kreise* $[m]^2$ *liegen und die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind, das* m *zum Schwerpunkt hat; auch sind die drei Rückkehrtangenten zugleich Normalen der Curve in ihren Scheiteln* u, v, w *und es ist* $uu_2 = vv_2 = ww_2 = 4r$. Der reelle Theil der Curve G^3 besteht nur aus einem regelmäfsigen Curvendreieck $u_2v_2w_2$, das innerhalb des geradlinigen Dreiecks $u_2v_2w_2$ liegt, aber den Kreis m^2 umschliefst; seine drei gleichen Seiten u_2wv_2, v_2uw_2, w_2vu_2 sind nach Innen convex und *berühren den Kreis mit ihren Mitten (Scheiteln)* u, v, w; *die Länge jeder Seite ist* $= 5\frac{1}{3}r$, *somit der ganze Umfang* $= 16r$; *der Inhalt des Curvendreiecks ist* $= 2\pi r^2$, *also gerade zweimal so grofs, als die Kreisfläche* m^2, *so dafs jeder der drei gleichen, zwischen dem Kreise und der Curve liegenden Arbelen,* $= \frac{1}{3}\pi r^2$ *ist. Jede Tangente der Curve* G^3 *berührt je einen ihrer drei Zweige und schneidet die beiden andern; ein Paar* GG_1, *d. h. die Schenkel eines ihr umschriebenen rechten Winkels berühren immer verschiedene Zweige.*

Sind GG_1 und HH_1 irgend zwei Paare, wird G von H und H_1 beziehlich in a_1, d_1 und G_1 von denselben in b_1, c_1 geschnitten, so sind die Geraden a_1c_1, b_1d_1 allemal ein drittes Paar, etwa JJ_1, d. h. sie sind auch zu einander rechtwinklige Fufspunkten-Linien oder Tangenten der Curve G^3. Ein eben solches Trippel von drei Paaren GG_1, HH_1, JJ_1 mit einem Quadrupel von vier Schnittpunkten a, b, c, d bilden auch die Seiten und zugehörigen Höhen des gegebenen Dreiecks; beiderseits hat man ein vollständiges Viereck ($a_1b_1c_1d_1$ oder $abcd$), dessen drei Paar Gegenseiten zu einander senkrecht sind, oder vier solche Punkte, von denen jeder der Höhenschnitt des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks ist. *Bei allen diesen Vierecken ist die Summe der Quadrate der Gegenseiten constant, und zwar* $= 16r^2$; *also* $ad^2 + bc^2 = ac^2 + bd^2 = ab^2 + cd^2 = 16r^2$. *Alle Quadrupel* $abcd$,

30*

deren vier Punkte sämmtlich reell sind, liegen innerhalb des Curvendreiecks G^3; und umgekehrt, *durch jeden innerhalb dieses Dreiecks liegenden Punkt d ist ein reelles Quadrupel bestimmt,* denn es gehen immer drei reelle Tangenten G_1, H_1, I_1 durch denselben, und die zu diesen senkrechten Tangenten G, H, I, sind ihre Gegenseiten in einem vollständigen Viereck $abcd$. *Liegt hingegen der gegebene Punkt d ausserhalb des Curvendreiecks G^3, so geht nur eine reelle Tangente, etwa G, durch ihn, und alsdann ist von den andern drei Punkten nur einer, etwa a, reell, der gleichfalls in G und auf der andern Seite aufserhalb der Curve liegt; die conjugirte Tangente G_1 ist auch reell und enthält die zwei imaginären Punkte b und c; die beiden andern Paare HH_1 und II_1 sind imaginär. Die den vier Dreiecken abc, abd, acd, bcd umschriebenen Kreise, deren Mittelpunkte beziehlich δ, γ, β, α heifsen sollen, sind gleich, und bei allen Quadrupeln von gleicher Gröfse, nämlich der Radius eines jeden ist dem Durchmesser des Kreises m^2 gleich, also $= 2r$. Das Viereck $\alpha\beta\gamma\delta$ ist dem Viereck $abcd$ gleich und liegt so, dafs die vier Geraden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ alle durch den Mittelpunkt m gehen und durch ihn gehälftet werden; daher haben umgekehrt die den vier Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ umschriebenen Kreise ihre Mittelpunkte in d, c, b, a, und ihre Radien sind ebenfalls $= 2r$; und ferner sind die Gegenseiten $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zu einander rechtwinklig, oder bilden drei Paare $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{I}\mathfrak{I}_1$, deren Scheitel im nämlichen Kreise m^2 liegen, und deren Enveloppe eine der vorigen, G^3, gleiche Curve $\mathfrak{G}^3$ ist, aber um den Mittelpunkt m um 180^0 herumbewegt, so dafs sie den Kreis in den oben erwähnten Punkten u_1, v_1, w_1 berührt. Alle reellen Quadrupel $\alpha\beta\gamma\delta$ liegen innerhalb des Curvendreiecks $\mathfrak{G}^3$. Enthält das Quadrupel $abcd$ zwei imaginäre Punkte b und c, so sind die den Dreiecken adc und adb umschriebenen Kreise β^2 und γ^2, so wie ihre Mittelpunkte β und γ imaginär, wogegen die den Dreiecken abc und bcd umschriebenen Kreise δ^2 und α^2 sammt ihren Mittelpunkten δ und α reell bleiben, diese letztern jedoch jetzt aufserhalb des Curvendreiecks $\mathfrak{G}^3$ liegen.*

Durch jedes Quadrupel $abcd$ geht ein Büschel gleichseitige Hyperbeln, $B(H^2)$; *die verschiedenen Paare Asymptoten derselben bestehen aus den gesammten vorgenannten Paaren GG_1 und sind somit Tangenten der nämlichen Curve G^3.* Oder in Bezug auf das Dreieck abc kann man sagen: *jede Fufspunkten-Linie G sei Asymptote einer ihm umschriebenen gleich-*

seitigen Hyperbel H^2, welche nothwendig auch durch den Höhenschnitt d geht und den Scheitel s von G zum Mittelpunkt hat. In Betracht aller Quadrupel *abcd* hat man auf diese Weise eine Schaar-Schaar gleichseitige Hyperbeln, $SS(H^2)$. Denkt man sich in Bezug auf jedes Paar GG_1 alle Hyperbeln, welche dasselbe zu Asymptoten haben, so hat man die nämliche $SS(H^2)$. *Je zwei dieser Hyperbeln schneiden sich in irgend einem Quadrupel, also nur innerhalb des Curvendreiecks G^3, wofern ihre Schnittpunkte alle vier reell sind; berühren sich dieselben, indem etwa a und d sich vereinen, so berühren sie zugleich auch die Gerade $ad = G$ in deren Mittelpunkt μ, und alsdann liegen die beiden andern Schnitte b und c in der Curve G^3 selbst und sind die Berührungspunkte eines Paars HH_1, dessen Scheitel in jenem Punkte μ liegt. Je zwei Quadrupel liegen in einer und derselben Hyperbel H^2, oder insbesondere in einem und demselben Paar GG_1.* Die Rechtecke unter den je zwei Perpendikeln, welche aus den einzelnen Punkten irgend eines Quadrupels auf ein beliebiges Paar GG_1 gefället werden, haben jedesmal unter sich gleichen Inhalt. *Sind in einer Ebene zwei rechte Winkel GG_1 und HH_1 gegeben, und sollen zwei Hyperbeln die Schenkel derselben beziehlich zu Asymptoten haben und einander berühren, so ist der Ort ihres Berührungspunktes μ ein bestimmter Kreis m^2, welcher durch die Scheitel der Winkel und durch die Mitten der Strecken geht, welche auf den Schenkeln jedes Winkels durch die Schenkel des andern begrenzt werden.*

Das System Paare GG_1 kann insbesondere auch wie folgt bestimmt werden. Wird in der Kreislinie m^2 irgend ein Punkt p und nebstdem eine beliebige Gerade $\mathfrak{Q}$ angenommen, und werden sodann aus jedem Punkte s des Kreises zwei unbegrenzte Gerade P und Q beziehlich durch p und parallel $\mathfrak{Q}$ gezogen und die von denselben gebildeten Nebenwinkel mittels zweier Geraden G und G_1 gehälftet, *so sind alle diese Geraden-Paare GG_1 ein dem obigen gleiches System, so dafs sie eine gleiche Curve G^3 umhüllen.*

In dem Kreise m^2 ziehe man eine fortlaufende Reihe Sehnen unter folgender Bedingung. Aus dem Anfangspunkt s ziehe man die erste Sehne ss_1 willkührlich; sodann aus s_1 die zweite Sehne s_1s_2 senkrecht auf den durch s gehenden Durchmesser; ferner aus s_2 die dritte Sehne s_2s_3 senkrecht zu dem durch s_1 gehenden Durchmesser, und so durch jeden neuen Punkt diejenige Sehne, welche zu dem durch den vorhergehenden Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht ist, so entsteht — wenn nicht zufällig der über der ersten

Sehne liegende Bogen mit dem Kreisumfange commensurabel ist — eine unbegrenzte Reihe von Sehnen, welche sämmtlich eine der obigen gleiche Curve G^3 berühren. Wird auf jede Sehne in ihrem zweiten Endpunkte eine Senkrechte errichtet, so berühren auch diese Senkrechten alle die nämliche Curve und bilden mit den respectiven Sehnen die obigen Paare GG_1. Ist dagegen der Bogen über der ersten Sehne mit dem Kreisumfange commensurabel, verhält er sich zu diesem, wie $n:m$, wo n und m ganze und relative Primzahlen sind, *so schliefst sich die Reihe Sehnen jedesmal, so dafs ein geschlossenes Polygon entsteht;* jedoch kehrt die Reihe nicht immer in den Anfangspunkt s zurück, sondern sie kann auch in $s_1, s_2, \dots$ zurückkehren, je nachdem die Zahl m beschaffen ist. Ferner sind in diesem Falle die Endpunkte $s, s_1, s_2, \dots$ der Sehnen immer Ecken eines regelmäfsigen mEcks, und die Sehnen selbst sind Seiten verschiedener Ordnung desselben (oder Seiten und Diagonalen). *Das Sehnen-Polygon nimmt nur dann alle Ecken des mEcks in Anspruch und ist selbst ein mEck, wenn m eine Potenz der Zahl 3 ist; seine Seiten sind alsdann zu drei und drei einander gleich, und zwar sind sie Seiten des regelmäfsigen vollständigen mEcks von allen denjenigen Ordnungen, welche nicht durch 3 theilbar sind.* Nämlich bei einem regelmäfsigen vollständigen $(2\mu+1)$Eck hat man (nach Gröfse) Seiten von 1ster, 2ter, 3ter, ... bis $(\mu-1)$ter Ordnung zu unterscheiden. — *Hierbei berühren alle Sehnen gleicherweise eine Curve G^3, so dafs das Sehnen-Polygon dieser Curve um- und zugleich dem Kreise eingeschrieben ist.* Es folgen daraus noch mehrere specielle Sätze, die hier übergangen werden.

In Bezug auf das Obige ist die Curve G^3, unter andern, auch noch wie folgt bestimmt. Denkt man sich rücksichtlich irgend eines der oben beschriebenen Quadrupel $abcd$ die Schaar Kegelschnitte, welche durch einen der vier Punkte, etwa durch d, gehen und dem durch die drei übrigen bestimmten Dreieck abc eingeschrieben sind, ferner in jedem Kegelschnitt den durch den Punkt d gehenden Durchmesser dd_1 und in dessen anderem Endpunkte d_1 die Tangente G des Kegelschnitts, *so ist die Enveloppe aller dieser Tangenten die dort betrachtete Curve G^3, und zwar für alle unzähligen Quadrupel stets die nämliche Curve.* Auf diese Eigenschaft wurde der Verfasser durch seinen Freund, den Professor *Schläfli* in Bern, aufmerksam gemacht. — Die Curve G^3 wird ferner auch durch rollende Bewegung erzeugt.

Analogerweise gelangt man zu etwas allgemeineren Sätzen, wobei der obige Kreis m^2 durch einen beliebigen Kegelschnitt vertreten wird, und wobei die Gegenseiten der vollständigen Vierecke *abcd* nicht mehr zu einander rechtwinklig sind. Folgendes Beispiel möge hier genügen.

Sind ms und $m\mu$ zwei beliebige Halbmesser einer gegebenen Ellipse m^2 und bewegen sich dieselben gleichzeitig um den Mittelpunkt m nach entgegengesetzten Richtungen so, dafs der vom Halbmesser ms beschriebene Sektor in jedem Moment doppelt so grofs ist, als der vom andern, $m\mu$, beschriebene Sektor, so ist die Enveloppe der durch die Endpunkte der Halbmesser gehenden Geraden, $s\mu = G$, eine Curve dritter Klasse G^3 und vierten Grades, welche die Gerade G_∞ zur ideellen Doppeltangente hat, und deren reeller Theil nur aus einem krummlinigen Dreieck $u_2v_2w_2$ besteht, welches die Ellipse umschliefst und sie mit seinen drei Seiten (Bogen) in drei solchen Punkten u, v, w berührt, welche die Ecken eines der Ellipse eingeschriebenen gröfsten Dreiecks sind; die Ecken jenes Dreiecks $u_2v_2w_2$ sind Rückkehrpunkte der Curve G^3, die Rückkehrtangenten gehen alle drei durch den Mittelpunkt der Ellipse und respective durch die genannten Berührungspunkte u, v, w; bis zu diesen Punkten genommen sind sie gerade doppelt so grofs, als die auf ihnen liegenden Durchmesser der Ellipse. Der Inhalt des Curvendreiecks ist zweimal so grofs, als die Fläche der Ellipse, und jeder der drei Arbelen zwischen beiden Curven ist einem Drittheil der Ellipsen-Fläche gleich.