15.

Propriétés générales des courbes algébriques et théorèmes sur les coniques homothétiques.

(Par *M. Woepcke.*)

I.

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes de l'ordre n, passant par $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ mêmes points, r étant un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-3$. Les courbes C_2 et C_3 se couperont, en outre, en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_1, et pareillement les courbes C_1 et C_2 se couperont en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_3, et les courbes C_1 et C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_2. Par les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_1 menons une courbe c_1 de l'ordre $n-1$; elle coupera, en outre, C_2 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2, et C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3. Par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3 et par $2(n-1)-r$ des points a_2 faisons passer une courbe c_2 de l'ordre $n-1$, et de même par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2 et par $2(n-1)-r$ des points a_3 une courbe c_3 également de l'ordre $n-1$. Je dis que c_2 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_2, que c_3 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_3, et que des $(n-1)^2$ points d'intersection des courbes c_2 et c_3, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ sont situés sur la courbe C_1 et $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ sur la courbe c_1.

En effet, considérons les systèmes (C_2, c_2) et (C_3, c_3) comme deux courbes de l'ordre $2n-1$. Le système (C_1, c_1) passe par $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)+3\}-1$ points d'intersection des deux premiers systèmes, à savoir 1° par les n^2 points d'intersection des courbes C_2 et C_3, 2° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2 et les $2(n-1)-r$ points a_3, intersections des courbes C_2 et c_3, 3° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3 et les $2(n-1)-r$ points a_2, intersections des courbes C_3 et c_2. Il s'ensuit que le système (C_1, c_1) passe aussi par les $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)-3\}+1$ autres points d'intersection de (C_2, c_2) avec (C_3, c_3), à savoir 1° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points d'intersection de C_2 avec c_3, 2° par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points d'intersection de C_3 avec c_2, 3° par les $(n-1)^2$ points d'intersection de c_2 avec c_3.

Or, nous connaissons tous les $n(n-1)$ points que la courbe c_1 a en commun avec la courbe C_2; ce sont les $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_1 et les

$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2; conséquemment les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points d'intersection de C_2 avec c_3 ne peuvent pas se trouver sur c_1, mais doivent être situés sur C_1. Donc ces $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points d'intersection de C_2 avec c_3 doivent se trouver parmi les intersections de C_1 avec C_2; mais ce ne peuvent être ni les $\frac{1}{2}n(n-1)+1+r$ points communs aux courbes C_1, C_2, C_3, parce que ceux-ci font partie du 1^er^ des trois groupes dont se composent les $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)+3\}-1$ points ci-dessus mentionnés, tandis-que les points dont il s'agit ici sont du nombre des $\frac{1}{2}(2n-1)\{(2n-1)-3\}+1$ autres points; et ce ne peuvent pas être non plus les $2(n-1)-r$ points a_3 par lesquels on avait fait passer dès l'abord la courbe c_3. Ces deux groupes de points étant exclus, il ne reste plus des intersections de C_1 avec C_2 que les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_3; donc la courbe c_3 passe aussi par ces $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_3. On démontre de la même manière que la courbe c_2 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ points a_2 par lesquels on ne l'avait pas fait passer d'abord.

Considérons maintenant les $(n-1)^2$ points d'intersection de c_2 avec c_3. La courbe c_2 coupe C_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_2 et en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ autres points α'; de même elle coupe c_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3 et en $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ autres points β'. Pareillement la courbe c_3 coupe C_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-r$ points a_3 et en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ autres points α'', et c_1 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2 et en $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ autres points β''. Nous avons vu que le système (C_1, c_1) passe par les $(n-1)^2$ intersections de c_2 avec c_3, c'est à dire que parmi tous les points que c_2 a en commun avec C_1 et c_1, $(n-1)^2$ coincident avec des points que c_3 a en commun avec C_1 et c_1. Or, c_2 n'a en commun avec C_1 et c_1 que les $n(n-1)$ points a_2 et p_3 et les $(n-1)^2$ points α' et β'; de même c_3 n'a en commun avec C_1 et c_1 que les $n(n-1)$ points a_3 et p_2 et les $(n-1)^2$ points α'' et β''; les points a_2 et p_3 étant distincts des points a_3 et p_2 ne peuvent pas être les points coincidants; conséquemment il faut que ce soient les points α' et β' qui coincident avec les points α'' et β'', ou en d'autres termes, il s'ensuit que des $(n-1)^2$ points d'intersection de c_2 avec c_3, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ sont situés sur la courbe C_1 et $\frac{1}{2}n(n-1)-r$ sur la courbe c_1.

Corollaire.

Étant données une conique H_1 et une droite L_1, si par un point π_1 pris sur la circonférence de H_1 on mène deux droites L_2 et L_3 dont

la première coupe la conique H_1 en π_1 et p_2, et la droite L_1 en π_3, et dont la seconde coupe la conique H_1 en π_1 et p_3, et la droite L_1 en π_2, et si on fait passer par les points p_3 et π_2 une conique H_2 homothétique à H_1 et coupant la conique H_1 en p_3 et P, et la droite L_1 en π_2 et p_1; les points P, p_1, p_2, π_3 se trouvent sur une conique H_3 homothétique à H_1 et H_2.

On déduit ce corollaire du théorème général en faisant $n=2$, $r=1$ et en prenant $\frac{1}{2}2(2-1)+1=2$ points communs aux trois courbes C_1, C_2, C_3 sur la droite située à l'infini. En faisant $r=0$, on obtient ce théorème connu que trois coniques homothétiques ont toujours trois cordes communes réelles passant par un même point.

Autre énoncé du corollaire.

Si l'on a trois coniques homothétiques H_1, H_2, H_3 passant par un même point P et se coupant en outre deux à deux en trois points p_1, p_2, p_3; il existe une infinité de triangles dont les côtés passent par p_1, p_2, p_3 et dont les trois sommets sont situés sur les trois coniques respectivement.

Si les coniques H_1, H_2, H_3 sont des cercles on voit immédiatement que tous ces triangles sont semblables à celui qui a pour sommets les centres des trois cercles donnés.

II.

Soient C_1, C_2, C_3 trois courbes de l'ordre n, passant par $\frac{1}{2}n(n+1)+1+r$ mêmes points, r étant un des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots, n-3$. Les courbes C_2 et C_3 se couperont, en outre, en $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ points a_1, et pareillement les courbes C_1 et C_2 se couperont en $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ points a_3, et les courbes C_1 et C_3 en $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ points a_2. Par les $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)-r$ points a_1 menons une courbe c_1 de l'ordre $n-2$; elle coupera, en outre, C_2 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2, et C_3 en $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3. Par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_3 et par $(n-2)-r$ des points a_2 faisons passer une courbe c_2 de l'ordre $n-2$, et de même par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ points p_2 et par $(n-2)-r$ des points a_3 une courbe c_3 également de l'ordre $n-2$. Je dis que c_2 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_2, que c_3 passe aussi par les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres points a_3, et que des $(n-2)^2$ points d'in-

tersection des courbes c_2 *et* c_3, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+r$ *sont situés sur la courbe* C_1 *et* $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)-r$ *sur la courbe* c_1.

Je supprime ici la démonstration de ce théorème parce qu'elle est entièrement semblable à celle du théorème précédent.

III.

1. *Étant données une conique* U *et une droite* u, *prenons sur* U *deux points quelconques* s_1 *et* s_2. *Par le point* s_1 *menons deux transversales* a_1 *et* c_1 *dont la première coupe* U *en* s_1 *et* p_1, *et* u *en* l_1, *et dont la seconde coupe* U *en* s_1 *et* π_1, *et* u *en* λ_1; *prenons ensuite sur* U *un point quelconque* P_1 *et désignons par* A_1 *la conique homothétique à* U *qui passe par les points* P_1, π_1, λ_1, *et par* C_1 *la conique homothétique à* U *qui passe par les points* P_1, p_1, l_1; *en vertu du corollaire du théorème* I^{er} *les coniques* A_1 *et* C_1 *passent par un même point* L_1 *de la droite* u. *Faisons ensuite une construction tout à fait pareille pour le point* s_2. *Je dis que les quatorze points d'intersection dans lesquels d'une part la conique* C_1 *et la droite* c_1 *sont rencontrées par la conique* C_2 *et la droite* c_2, *et d'autre part la conique* A_1 *et la droite* a_1 *par la conique* A_2 *et la droite* a_2, *se trouvent sur une courbe du troisième ordre qui passe par les deux points situés sur la droite à l'infini dans la direction des asymptotes de la conique* U.

La démonstration suit immédiatement d'un théorème que j'ai donné dans le journal de M. *Liouville* (Tome XIX, pag. 407), si on considère les systèmes U et u, C_1 et c_1, C_2 et c_2, A_1 et a_1, A_2 et a_2 comme cinq courbes du troisième ordre, et si on remarque que les courbes (C_1, c_1) et (A_1, a_1) d'une part, et les courbes (C_2, c_2) et (A_2, a_2) d'autre part forment deux couples passant par deux systèmes de neuf points pris sur la courbe (U, u).

2. Si on fait a_2 parallèle à a_1 et c_2 parallèle à c_1, la courbe du troisième ordre se décompose dans une conique et la droite située à l'infini. En ce cas les douze points d'intersection de c_1 avec C_2, de C_1 avec c_2, de C_1 avec C_2, de a_1 avec A_2, de A_1 avec a_2, de A_1 avec A_2 se trouvent sur une conique.

3. Si on fait coincider les points s_1 et s_2 et les droites a_1 et a_2, les six points d'intersection de c_1 avec C_2, de C_1 avec c_2 et de A_1 avec A_2 sont sur une conique homothétique à U.

Corollaire.

Étant donnés trois cercles C_1, C_2, C_3 passant par un même point p et se coupant, en outre, en trois points, à savoir C_1 et C_3 en P_2, C_2 et C_3 en P_1, et C_1 et C_2 en P_3, si on mène la corde commune $P_3 p$ qui rencontre le cercle C_3 en p et s, et si par s on mène deux transversales quelconques dont l'une c_1 coupe C_2 en q_1 et r_1, et dont l'autre c_2 coupe C_1 en q_2 et r_2, les quatre points q_1, r_1, q_2, r_2 sont toujours sur un cercle C_4.

Si par le point P_3 on mène une transversale quelconque c_3 coupant C_1 en L_1 et C_2 en L_2, le cercle qui passe par les points P_2 et L_1 et par les intersections de c_1 avec C_3 et c_3, et le cercle qui passe par les points P_1 et L_2 et par les intersections de c_2 avec C_3 et c_3, se coupent également sur C_4.

Berlin, au mois de Juin 1856.