NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0020
LOG Titel: Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks. (Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch C. W. Borchardt)
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

16.

Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt.*)

Auf einen Ausdruck f, welcher sowohl von den Variablen $x, x_1 \dots x_n$ als auch von den Variablen $y, y_1 \dots y_n$ eine lineare homogene Funktion ist, und den man kurz eine zweifach lineare homogene Funktion nennen kann, läfst sich eine ähnliche Transformation anwenden, wie diejenige, vermittelst welcher man bekanntlich eine von $n+1$ Variablen $x, x_1 \dots x_n$ abhängige quadratische Form nur auf *eine* Weise als Quadratsumme $Az^2+A_1z_1^2+\dots+A_mz_m^2+\dots+A_nz_n^2$ so darstellt, dafs (für jedes m von $m=0$ bis $m=n$) z_m eine nur die Variablen $x_m, x_{m+1} \dots x_n$ enthaltende lineare homogene Funktion ist. Die in Rede stehende Transformation besteht in Folgendem:

1. Es seien $u, u_1 \dots u_n$ lineare homogene Funktionen von $x, x_1 \dots x_n$, nämlich:

$$(1.)\quad \begin{cases} u = \alpha_{0,0}\,x+\alpha_{0,1}\,x_1+\dots+\alpha_{0,n}x_n \\ u_1 = \alpha_{1,0}\,x+\alpha_{1,1}\,x_1+\dots+\alpha_{1,n}x_n \\ \vdots \\ u_n = \alpha_{n,0}x+\alpha_{n,1}x_1+\dots+\alpha_{n,n}x_n \end{cases}$$

Bildet man aus denselben Coefficienten, indem man ihre Horizontalreihen mit ihren Vertikalreihen vertauscht, $n+1$ andere lineare homogene Funktionen $v, v_1 \dots v_n$ der Variablen $y, y_1 \dots y_n$:

$$(2.)\quad \begin{cases} v = \alpha_{0,0}y+\alpha_{1,0}y_1+\dots+\alpha_{n,0}y_n \\ v_1 = \alpha_{0,1}y+\alpha_{1,1}y_1+\dots+\alpha_{n,1}y_n \\ \vdots \\ v_n = \alpha_{0,n}y+\alpha_{1,n}y_1+\dots+\alpha_{n,n}y_n \end{cases}$$

sodafs $u, u_1 \dots u_n$ und $v, v_1 \dots v_n$ zwei solche Systeme linearer homogener Funktionen resp. von $x, x_1 \dots x_n$ und $y, y_1 \dots y_n$ sind, welche man kurz zwei *conjugirte* Systeme nennt, alsdann hat man, wie unmittelbar erhellt, die identische Gleichung

$$(3.)\qquad yu+y_1u_1+\cdots+y_nu_n = xv+x_1v_1+\cdots+x_nv_n.$$

Umgekehrt ist die Gleichung (3.) die für zwei *conjugirte* Systeme von Variablen definirende Gleichung. Weifs man nämlich, dafs $u, u_1 \dots u_n$ und $v, v_1 \dots v_n$ zwei Systeme linearer homogener Funktionen resp. von $x, x_1 \dots x_n$ und von $y, y_1 \dots y_n$ sind, so genügt die Gleichung (3.), um zu beweisen, dafs beide Systeme conjugirt zu einander sind. Denn man substituire die Werthe von $u, u_1 \dots u_n$ aus (1.) in (3.), so ergeben sich die Gleichungen (2.).

Definirt man nun f durch die Doppelgleichung

$$(4.)\qquad f = yu+y_1u_1+\cdots+y_nu_n = xv+x_1v_1+\cdots+x_nv_n,$$

so ist f der allgemeinste sowohl in Bezug auf $x, x_1 \dots x_n$ als auf $y, y_1 \dots y_n$ lineare und homogene Ausdruck.

2. Es sei

$$(5.)\qquad \left\{\begin{array}{ll} u'_1 = u_1 - \dfrac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{0,0}}u & v'_1 = v_1 - \dfrac{\alpha_{0,1}}{\alpha_{0,0}}v \\ u'_2 = u_2 - \dfrac{\alpha_{2,0}}{\alpha_{0,0}}u & v'_2 = v_2 - \dfrac{\alpha_{0,2}}{\alpha_{0,0}}v \\ \vdots & \vdots \\ u'_n = u_n - \dfrac{\alpha_{n,0}}{\alpha_{0,0}}u & v'_n = v_n - \dfrac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{0,0}}v \end{array}\right.$$

sodafs in $u'_1, u'_2 \dots u'_n$ die Variable x fehlt, in $v'_1, v'_2 \dots v'_n$ die Variable y, dann verwandelt sich der Ausdruck (4.) in den folgenden:

$$f = u\left\{y+\frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{0,0}}y_1+\frac{\alpha_{2,0}}{\alpha_{0,0}}y_2+\cdots+\frac{\alpha_{n,0}}{\alpha_{0,0}}y_n\right\}+y_1u'_1+y_2u'_2+\cdots+y_nu'_n$$

$$= v\left\{x+\frac{\alpha_{0,1}}{\alpha_{0,0}}x_1+\frac{\alpha_{0,2}}{\alpha_{0,0}}x_2+\cdots+\frac{\alpha_{0,n}}{\alpha_{0,0}}x_n\right\}+x_1v'_1+x_2v'_2+\cdots+x_nv'_n$$

oder, was dasselbe ist, es wird

$$f = \frac{uv}{\alpha_{0,0}}+f_1,$$

wo

$$f_1 = y_1u'_1+y_2u'_2+\cdots+y_nu'_n = x_1v'_1+x_2v'_2+\cdots+x_nv'_n.$$

Diese Doppelgleichung zeigt, zufolge der früheren Erörterung, dafs die linearen homogenen Funktionen $u'_1, u'_2 \dots u'_n$ von $x_1, x_2 \dots x_n$ und $v'_1, v'_2 \dots v'_n$ von $y_1, y_2 \dots y_n$ wiederum zwei *conjugirte* Systeme bilden, deren Coefficienten durch α' mit zwei unteren Indices bezeichnet werden mögen.

3. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man nach m maliger Transformation

$$(6.)\quad f=\frac{uv}{\alpha_{0,0}}+\frac{u'_1v'_1}{\alpha'_{1,1}}+\frac{u''_2v''_2}{\alpha''_{2,2}}+\cdots+\frac{u^{(m-1)}_{m-1}v^{(m-1)}_{m-1}}{\alpha^{(m-1)}_{m-1,m-1}}+f_m,$$

$$f_m=y_mu^{(m)}_m+y_{m+1}u^{(m)}_{m+1}+\cdots+y_nu^{(m)}_n=x_mv^{(m)}_m+x_{m+1}v^{(m)}_{m+1}+\cdots+x_nv^{(m)}_n,$$

wo die linearen homogenen Funktionen $u^{(m)}_m, u^{(m)}_{m+1}\dots u^{(m)}_n$ von $x_m, x_{m+1}\dots x_n$ und $v^{(m)}_m, v^{(m)}_{m+1}\dots v^{(m)}_n$ von $y_m, y_{m+1}\dots y_n$ ebenfalls zwei *conjugirte* Systeme bilden, deren Coefficienten resp. durch

$$(7.)\quad \begin{cases}\alpha^{(m)}_{m,m} & \alpha^{(m)}_{m,m+1} & \dots & \alpha^{(m)}_{m,n}\\ \alpha^{(m)}_{m+1,m} & \alpha^{(m)}_{m+1,m+1} & \dots & \alpha^{(m)}_{m+1,n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{cases}\quad\text{und}\quad \begin{matrix}\alpha^{(m)}_{m,m} & \alpha^{(m)}_{m+1,m} & \dots & \alpha^{(m)}_{n,m}\\ \alpha^{(m)}_{m,m+1} & \alpha^{(m)}_{m+1,m+1} & \dots & \alpha^{(m)}_{n,m+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\end{matrix}$$

bezeichnet werden mögen.

Für $k=1, 2 \dots n$ ist u'_k eine lineare Verbindung von u und u_k.

Für $k=2, 3 \dots n$ ist u''_k eine lineare Verbindung von u'_k und u'_1, daher auch von u, u_1 und u_k u. s. w.

Allgemein: für $k=m, m+1 \dots n$ ist $u^{(m)}_k$ eine lineare Verbindung von $u, u_1 \dots u_{m-1}$ und u_k, und zwar eine solche, in welcher $x, x_1 \dots x_{m-1}$ nicht vorkommen. Hierdurch allein wird $u^{(m)}_k$, abgesehen von einem constanten Faktor, bestimmt, und zwar als die Determinante des Systems

$$(8.)\quad \begin{cases}\alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,m-1} & u\\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-1} & u_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m-1,0} & \alpha_{m-1,1} & \dots & \alpha_{m-1,m-1} & u_{m-1}\\ \alpha_{k,0} & \alpha_{k,1} & \dots & \alpha_{k,m-1} & u_k.\end{cases}$$

Aehnliches gilt für die Bestimmung von $v^{(m)}_k$.

4. Die übrig bleibende Ermittlung des constanten Faktors geschieht einfach durch folgende Betrachtung:

Man setze gleichzeitig

$$u=0,\quad u_1=0,\quad u_2=0\quad\dots\quad u_{m-1}=0,$$

so folgt hieraus, wie leicht zu sehen,

$$u'_1=0,\quad u'_2=0\quad\dots\quad u'_{m-1}=0$$

und hieraus auf dieselbe Weise

$$u''_2=0\quad\dots\quad u''_{m-1}=0$$

u. s. w. bis man endlich zu der letzten Gleichung:

$$u^{(m-1)}_{m-1}=0 \quad\text{gelangt.}$$

Ist nun k eine der Zahlen $m, m+1 \dots n$, so folgt aus $u=0$ in Folge der Gleichungen (5.):

$$u'_k = u_k,$$

ebenso folgt aus $u'_1 = 0$:

$$u''_k = u'_k$$

u. s. w. und endlich aus $u^{(m-1)}_{m-1} = 0$:

$$u^{(m)}_k = u^{(m-1)}_k.$$

Als schliefsliches Resultat erhält man also, dafs wenn gleichzeitig $u, u_1, \dots u_{m-1}$ verschwinden,

$$u^{(m)}_k = u_k$$

wird (wo $k = m, m+1 \dots n$ sein kann).

Hieraus geht hervor, dafs die Determinante des Systems (8.) durch den Coefficienten von u_k in derselben dividirt werden mufs, d. h. durch die aus

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,m-1} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-1} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m-1,0} & \alpha_{m-1,1} & \dots & \alpha_{m-1,m-1} \end{matrix}$$

gebildete Determinante, um $u^{(m)}_k$ zu geben.

Bezeichnet man mit *Bezout* die Determinante dadurch, dafs man ein positiv zu nehmendes Glied derselben in runde Klammern einschliefst, so erhält man nach Einsetzung der Ausdrücke (1.) von $u, u_1 \dots u_{m-1}, u_k$:

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1})\, u^{(m)}_k \\ = &(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,m})\, x_m \\ + &(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,m+1})\, x_{m+1} \\ + &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + &(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{k,n})\, x_n \end{aligned}\right.$$

und hieraus endlich ergiebt sich für die Coefficienten (7.) die Gleichung:

$$(10.)\quad \alpha^{(m)}_{k,i} = \frac{(\alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1} \dots \alpha_{m-1,m-1}\, \alpha_{k,i})}{(\alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1} \dots \alpha_{m-1,m-1})},$$

(wo sowohl i als k die Werthe $m, m+1, \dots n$ haben können).

5. Die Gleichungen (6.), (9.), (10.), in deren erster man $m=n$ zu setzen hat, enthalten die Transformation, von der hier die Rede ist, und geben:

$$f = \frac{uv}{\alpha_{0,0}} + \frac{\alpha_{0,0}\, u'_1 v'_1}{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1})} + \frac{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1})\, u''_2 v''_2}{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1}\alpha_{2,2})} + \dots + \frac{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1} \dots \alpha_{n-1,n-1})\, u^{(n)}_n v^{(n)}_n}{(\alpha_{0,0}\alpha_{1,1} \dots \alpha_{n-1,n-1}\alpha_{n,n})},$$

wo

$$(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1})u_m^{(m)} = \sum_{i=m}^{i=n}(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{m,i})x_i$$

$$(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1})v_m^{(m)} = \sum_{i=m}^{i=n}(\alpha_{0,0}\ \alpha_{1,1}\ \dots\ \alpha_{m-1,m-1}\ \alpha_{i,m})y_i.$$

Man kann dies Resultat in folgendes Theorem zusammenfassen:

Theorem. Es sei

$$f = \sum_{i=0}^{i=n}\sum_{k=0}^{k=n}\alpha_{k,i}\, x_i\, y_k$$

eine lineare homogene Funktion sowohl von $x, x_1 \dots x_n$ als von $y, y_1 \dots y_n$, so kann dieselbe nur auf *eine* Weise in der Form

$$f = AUV + A_1U_1V_1 + \dots + A_mU_mV_m + \dots + A_nU_nV_n$$

so dargestellt werden, dafs (für jedes m) U_m und V_m zwei resp. nur die Variablen $x_m, x_{m+1} \dots x_n$ und $y_m, y_{m+1} \dots y_n$ enthaltende lineare Funktionen sind. Diese Darstellung ist:

$$f = \frac{UV}{p_0} + \frac{U_1V_1}{p_0p_1} + \dots + \frac{U_mV_m}{p_{m-1}p_m} + \dots + \frac{U_nV_n}{p_{n-1}p_n},$$

wo U_m und V_m die Determinanten der Systeme

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,m-1} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m-1} & \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,m-1} & \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \dots & \alpha_{m-1,0} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{m-1,1} & \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{0,m} & \alpha_{1,m} & \dots & \alpha_{m-1,m} & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{matrix}$$

und p_m die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \dots & \alpha_{0,m} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \dots & \alpha_{m,m} \end{matrix}$$

bedeuten.

Läfst man hierin die Variablen $x, x_1 \dots x_n$ und $y, y_1 \dots y_n$ mit einander zusammenfallen und unterwirft zugleich die Coefficienten α der Bedingung, dafs sie ungeändert bleiben wenn man Horizontal- und Vertikalreihen mit einander vertauscht, so erhält man das bekannte

Theorem. Eine quadratische Form

$$f = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=n} \alpha_{k,i}\, x_i\, x_k$$

(wo $\alpha_{k,i} = \alpha_{i,k}$ ist) läfst sich nur auf ***eine*** Weise in der Form der Quadratsumme

$$f = AU^2 + A_1 U_1^2 + \cdots + A_m U_m^2 + \cdots + A_n U_n^2$$

so darstellen, dafs (für jedes m) U_m eine lineare homogene Funktion nur von den Variablen $x_m,\ x_{m+1} \ldots x_n$ ist. Diese Darstellung ist:

$$f = \frac{U^2}{p_0} + \frac{U_1^2}{p_0 p_1} + \cdots + \frac{U_m^2}{p_{m-1} p_m} + \cdots + \frac{U_n^2}{p_{n-1}\, p_n},$$

wo U_m die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_m} \end{matrix}$$

und p_m die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \ldots & \alpha_{0,m} \\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,m} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{m,0} & \alpha_{m,1} & \ldots & \alpha_{m,m} \end{matrix}$$

bedeuten.