Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0021
LOG Titel: Extrait d'une lettre de M. C. Hermite à M. Borchardt sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

17.

Extrait d'une lettre de M. *C. Hermite* à M. *Borchardt* sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogènes du second degré.

Paris, ce 24 avril 1856.

. . . . . . Dans le cas, où Vous le jugeriez convenable, Vous pourriez publier la démonstration suivante, du principe découvert par *Jacobi,* et employé par lui à la démonstration des belles formules pour les conditions de réalité des racines des équations algébriques, que Vous avez données dans Votre mémoire, sur l'équation à l'aide de laquelle etc. Rien d'ailleurs n'est plus simple que d'établir ce principe que j'énoncerai ainsi:

Quelque substitution réelle, que l'on employe, pour réduire un polynome homogène du second degré à une somme de carrés, le nombre des coefficients de ces carrés qui auront un signe donné sera toujours le même.

Supposons en effet qu'un polynome homogène du second degré f, à $n+1$ indéterminées $x, y, \dots v$ se réduise à l'expression suivante:

$$f = \varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2$$

en faisant:

$$(1.)\quad \begin{cases} x = \alpha x_0 + \alpha' x_1 + \dots + \alpha^{(n)} x_n \\ y = \beta x_0 + \beta' x_1 + \dots + \beta^{(n)} x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ v = \lambda x_0 + \lambda' x_1 + \dots + \lambda^{(n)} x_n \end{cases}$$

Si l'on donne une seconde substitution également réelle,

$$(2.)\quad \begin{cases} x = aX_0 + a'X_1 + \dots + a^{(n)} X_n \\ y = bX_0 + b'X_1 + \dots + b^{(n)} X_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ v = lX_0 + l'X_1 + \dots + l^{(n)} X_n \end{cases}$$

de laquelle résulte la transformation analogue:

$$f = \eta_0 X_0^2 + \eta_1 X_1^2 + \dots + \eta_n X_n^2$$

il s'agit de prouver que le nombre des coefficients ε, qui auront un signe donné, sera égal au nombre des coefficients η, qui auront le même signe.

A cet effet, et pour fixer les idées, supposons négatifs, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_i$ et positifs les coefficients suivants: $\varepsilon_{i+1}, \varepsilon_{i+2}, \dots \varepsilon_n$. Supposons aussi que $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_k$ soient négatifs, tandis que $\eta_{k+1}, \eta_{k+2}, \dots \eta_n$ seront positifs. On aura d'abord en égalant entre elles les deux expressions de la forme f,

$$\varepsilon_0 x_0^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \dots + \varepsilon_n x_n^2 = \eta_0 X_0^2 + \eta_1 X_1^2 + \dots + \eta_n X_n^2$$

les variables étant liées par ces équations:

$$(3.)\quad \begin{cases} \alpha x_0 + \alpha' x_1 + \dots + \alpha^{(n)} x_n = a X_0 + a' X_1 + \dots + a^{(n)} X_n \\ \beta x_0 + \beta' x_1 + \dots + \beta^{(n)} x_n = b X_0 + b' X_1 + \dots + b^{(n)} X_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda x_0 + \lambda' x_1 + \dots + \lambda^{(n)} x_n = l X_0 + l' X_1 + \dots + l^{(n)} X_n \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, j'observe qu'on pourra toujours les résoudre par rapport aux indéterminées x ou X, si l'invariant de f est différent de zéro, et si aucune des quantités ε et η, n'est nulle. Soit en effet, J l'invariant de f, δ et d, les déterminants relatifs aux substitutions (1.) et (2.), on aura:

$$\varepsilon_0\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = J\delta^2$$
$$\eta_0\, \eta_1 \dots \eta_n = J d^2$$

de sorte que d et δ, ne pourront jamais être supposés nuls sous les conditions admises.

Cela remarqué, remplaçons $x_0, x_1, \dots x_i$ d'une part, $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots x_n$ de l'autre par: $\frac{x_0}{\sqrt{-\varepsilon_0}}, \frac{x_1}{\sqrt{-\varepsilon_1}}, \dots \frac{x_i}{\sqrt{-\varepsilon_i}}$ et: $\frac{x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon_{i+1}}}, \frac{x_{i+2}}{\sqrt{\varepsilon_{i+2}}}, \dots \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon_n}}$. Remplaçons de même $X_0, X_1, \dots X_k$ par: $\frac{X_0}{\sqrt{-\eta_0}}, \frac{X_1}{\sqrt{-\eta_1}}, \dots \frac{X_k}{\sqrt{-\eta_k}}$ et: $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots X_n$ par: $\frac{X_{k+1}}{\sqrt{\eta_{k+1}}}, \frac{X_{k+2}}{\sqrt{\eta_{k+2}}}, \dots \frac{X_n}{\sqrt{\eta_n}}$; puis effectuons par rapport à ces nouvelles indéterminées, la résolution des équations (3.). On sera par là amené à la relation suivante:

$$-x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \dots + x_n^2$$
$$= -X_0^2 - X_1^2 - \dots - X_k^2 + X_{k+1}^2 + X_{k+2}^2 + \dots + X_n^2$$

où l'on pourra supposer:

$$(4.)\quad \begin{cases} x_0 = p_0 X_0 + q_0 X_1 + \dots + s_0 X_n \\ x_1 = p_1 X_0 + q_1 X_1 + \dots + s_1 X_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = p_n X_0 + q_n X_1 + \dots + s_n X_n \end{cases}$$

les coefficients étant essentiellement *réels*. Or je vais établir l'impossibilité d'une telle relation dès que l'on suppose k différent de i. Pour fixer les idées j'admettrai qu'on ait $k > i$, et j'observerai que parmi les diverses équations auxquelles les coefficients de la substitution (4.) doivent satisfaire, on voit s'offrir en premier lieu celle-ci:

$$-p_0^2 - p_1^2 - \cdots - p_i^2 + p_{i+1}^2 + p_{i+2}^2 + \cdots + p_n^2 = -1$$

qui ne pourrait évidemment être vérifiée que pour des valeurs imaginaires des quantités p, si l'on avait:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 0, \quad \ldots \quad p_i = 0.$$

Or on va voir comment de la substitution (4.), il est possible de déduire une nouvelle, qui transformant le polynome

$$(5.) \qquad -x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + \cdots + x_n^2$$

en:

$$(6.) \qquad -X_0^2 - X_1^2 - \cdots - X_k^2 + X_{k+1}^2 + X_{k+2}^2 + \cdots + X_n^2$$

ait encore ses coefficients réels, et de plus présente ce caractère, que l'indéterminée X_0 ait disparu dans les expressions des indéterminées x_0, x_1, ... x_{k-1}. Comme on suppose $k > i$, $k-1$ sera au moins égal à i, et les conditions précédemment énoncées, se trouvant réalisées, notre théorème se trouve par là même démontré.

A cet effet nous remarquerons qu'on peut sans changer le polynome (6.) y remplacer X_0 et X_1, par: $\cos\varphi\, X_0 + \sin\varphi\, X_1$, $\sin\varphi\, X_0 - \cos\varphi\, X_1$ et introduire par là un angle arbitraire dans les formules (4.), qui deviendront:

$$\begin{aligned}
x_0 &= (p_0 \cos\varphi + q_0 \sin\varphi) X_0 + (p_0 \sin\varphi - q_0 \cos\varphi) X_1 + \cdots \\
x_1 &= (p_1 \cos\varphi + q_1 \sin\varphi) X_0 + (p_1 \sin\varphi - q_1 \cos\varphi) X_1 + \cdots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= (p_n \cos\varphi + q_n \sin\varphi) X_0 + (p_n \sin\varphi - q_n \cos\varphi) X_1 + \cdots
\end{aligned}$$

Maintenant et quelque soient les coefficients p, q, etc. on pourra disposer de cet angle, de manière à avoir:

$$p_0 \cos\varphi + q_0 \sin\varphi = 0$$

et l'on sera amené à une nouvelle substitution également réelle, où l'indéterminée X_0, aura déjà disparu dans la valeur de x_0. Cela fait, partons de cette nouvelle substitution pour y introduire de nouveau un angle arbitraire, en remplaçant X_1 et X_2, par: $\cos\varphi\, X_1 + \sin\varphi\, X_2$, $\sin\varphi\, X_1 - \cos\varphi\, X_2$, ce qui se fera encore, sans changer le polynome (6.). On voit en raisonnant comme tout à l'heure, qu'on pourra annuler le coefficient de X_1, dans l'expression de x_0. Or des calculs analogues pourront être continués, jusqu'à ce qu'on soit amené à remplacer X_{k-1} et X_k par: $\cos\varphi X_{k-1} + \sin\varphi X_k$, $\sin\varphi X_{k-1} - \cos\varphi X_k$, et en dernière analyse, on voit que de la substitution (4.) on aura déduit par des opérations toujours possibles, une substitution réelle dans laquelle X_0, $X_1, \ldots X_{k-1}$ auront disparu de l'expression de l'indéterminée x_0. Ce premier point établi, nous concevons qu'on repète, en raisonnant sur l'indéterminée suivante x_1, des opérations toutes semblables, mais en se bornant à faire disparaître de proche en proche, dans l'expression de cette indéterminée, les coefficients de X_0, X_1, ... X_{k-2}. On n'aura ainsi besoin d'introduire dans les substitutions successives que les indéterminées X_0, X_1, ... X_{k-1}, de sorte que ces calculs faits, on ne verra reparaître dans la valeur de x_0 aucune des indéterminées, qui en ont déjà été éliminées. Cela posé, il est clair qu'en raisonnant d'une manière analogue successivement sur x_2, x_3 etc., on sera en dernier lieu conduit à faire disparaître la seule indéterminée X_0, de la valeur de x_{k-1}. Elle ne se trouvera point d'ailleurs dans les indéterminées précédentes, x_{k-2}, x_{k-3}, ... x_0, et de la sorte on sera parvenu à une dernière substitution, conséquence de la substitution (4.), transformant encore le polynome (5.) dans le polynome (6.), et qui tombe dans le cas indiqué plus haut, où il est manifestement impossible que les coefficients soient des quantités réelles.