Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0022
LOG Titel: Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen. (Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch C. W. Borchardt).
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

18.

Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen.

(Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch *C. W. Borchardt.*)

1.

Man weifs, dafs jede reelle rationale ganze homogene Function 2ten Grades auf unendlich viel Arten als ein lineares Aggregat von Quadraten reeller linearer von einander unabhängiger Functionen dargestellt werden kann. Wie verschieden aber auch diese Darstellungen sein mögen, *so wird in allen die Anzahl der positiven, so wie die Anzahl der negativen Quadrate dieselbe bleiben.*

Man nennt in diesem Satze positive und negative Quadrate des Aggregates diejenigen, welche mit einem positiven oder negativen Coefficienten behaftet sind. Man kann jeden dieser Coefficienten, positiv genommen, in das Quadrat, in welches er multiplicirt ist, einbegreifen, indem man für αu^2 oder $-\alpha u^2$, wo α einen constanten Coefficienten und u eine reelle lineare homogene Function bedeutet, $(\sqrt{\alpha}.u)^2$ oder $-(\sqrt{\alpha}.u)^2$ schreibt, wodurch die lineare homogene Function, welche in's Quadrat erhoben wird, nicht aufhört, reell zu sein. Es kann daher der Allgemeinheit unbeschadet angenommen werden, dafs alle Quadrate nur mit dem Coefficienten $+1$ oder -1 behaftet sind.

Unter dieser Annahme kann der obige Satz so ausgesprochen werden:

Fundamentalsatz.

Es seien $r_1, r_2, \dots r_i, s_1, s_2, \dots s_k$ und $u_1, u_2, \dots u_m, v_1, v_2, \dots v_n$ zwei Systeme reeller von einander unabhängiger *) linearer homogener Functionen, zwischen deren Quadraten die lineare Gleichung

$$\begin{aligned} & r_1^2+r_2^2+\dots+r_i^2-s_1^2-s_2^2-\dots-s_k^2 \\ = & u_1^2+u_2^2+\dots+u_m^2-v_1^2-v_2^2-\dots-v_n^2 \end{aligned}$$

identisch Statt finde, so ist nothwendig

$$i=m, \qquad k=n.$$

---

*) d. h. zwei Systeme, deren jedes aus Functionen besteht, die von einander unabhängig sind.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich aus den folgenden elementaren Betrachtungen.

Wenn man, was immer verstattet ist, eine Anzahl von einander unabhängiger linearer homogener Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ an die Stelle einer gleichen Anzahl von Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_i$ in eine lineare homogene Function A einführt, so wird diese wieder eine lineare homogene Function der Gröfsen $B_1, B_2, \ldots B_i$ und der übrigen Variablen x_{i+1}, x_{i+2}, etc.

$$A = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \cdots + \lambda_i B_i + \mu_1 x_{i+1} + \mu_2 x_{i+2} + \text{etc.}$$

Wenn die sämmtlichen Coefficienten μ_1, μ_2 etc. verschwinden, wird A blofs durch die Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ bestimmt, und dann mufs es auch immer zugleich mit ihnen verschwinden. Wenn dagegen auch nur einer der Coefficienten μ_1, μ_2 etc. nicht verschwindet, ist A von den Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ unabhängig, indem es für alle Werthe, die man diesen Functionen beilegt, seinerseits noch wieder jeden beliebigen Werth annehmen kann, und es braucht daher in diesem Falle A auch nicht zugleich mit den Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ zu verschwinden. Hat man nun k von einander unabhängige lineare homogene Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ und ist $k > i$, so kann es niemals geschehen, dafs durch diese Einführung der Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ als Variablen an die Stelle der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_i$ in allen Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ zugleich alle übrigen Variablen x_{i+1}, x_{i+2} etc. von selbst herausgehen. Denn sonst wären $A_1, A_2, \ldots A_k$ blofs Functionen von $B_1, B_2, \ldots B_i$, und niemals kann die Anzahl von einander unabhängiger Functionen, wie $A_1, A_2, \ldots A_k$ sein sollen, gröfser als die Anzahl der Variablen sein, wie es hier der Fall wäre, da man vorausgesetzt hat, dafs $k > i$. Es werden also die k Functionen $A_1, A_2, \ldots A_k$ nicht nothwendig zugleich mit den i Functionen $B_1, B_2, \ldots B_i$ verschwinden müssen. Hat man mehr als i lineare homogene Functionen $B_1, B_2, \ldots B_m$, von denen aber nur $B_1, B_2, \ldots B_i$ von einander unabhängig sind, während die übrigen $B_{i+1}, B_{i+2}, \ldots B_m$ durch sie bestimmt sind, so werden alle Functionen $B_1, B_2, \ldots B_m$ verschwinden, wenn $B_1, B_2, \ldots B_i$ verschwinden. Ist nun $m < k$, also gewifs $i < k$, so hat man das folgende Lemma:

Lemma.

Wenn eine Anzahl von einander unabhängiger homogener linearer Functionen die Anzahl anderer homogener linearer Functionen über-

trifft, so kann man immer bewirken, dafs diese letzteren verschwinden, ohne dafs zugleich auch die ersteren alle verschwinden.

Dieses *Lemma,* welches vielleicht nicht einmal eines Beweises bedurft hätte, führt sogleich zu dem aufgestellten Fundamentalsatz.

Man nehme nämlich an, dafs in der identischen Gleichung

$$r_1^2+r_2^2+\dots+r_i^2-s_1^2-s_2^2-\dots-s_k^2$$
$$=u_1^2+u_2^2+\dots+u_m^2-v_1^2-v_2^2-\dots-v_n^2$$

die Zahlen i und m verschieden sein könnten, und dafs $m<i$, so wäre auch $m+k<i+k$, und es könnten die $m+k$ Functionen

$$u_1,\ u_2,\ \dots\ u_m,\ s_1,\ s_2,\ \dots\ s_k$$

verschwinden, ohne dafs die $i+k$ von einander unabhängigen Functionen

$$r_1,\ r_2,\ \dots\ r_i,\ s_1,\ s_2,\ \dots\ s_k$$

alle mit ihnen zugleich verschwinden. Man hätte dann die Gleichung

$$r_1^2+r_2^2+\dots+r_i^2=-v_1^2-v_2^2-\dots-v_n^2,$$

in der $r_1,\ r_2,\ \dots\ r_i,\ v_1,\ v_2,\ \dots\ v_n$ reelle Gröfsen sind, und $r_1,\ r_2,\ \dots\ r_i$ nicht alle verschwinden, welches absurd ist. Ganz eben so beweist man, dafs auch n und k nicht von einander verschieden sein können, wozu man nur in der gegebnen identischen Gleichung alle Zeichen umzukehren und dieselben Betrachtungen zu wiederholen braucht.

Der vorstehende Beweis zeigt, dafs man die Bedingung, dafs $u_1,\ u_2,\ \dots\ u_m,\ v_1,\ v_2,\ \dots\ v_n$ von einander unabhängig seien, fortlassen, und dann den Satz etwas allgemeiner so aussprechen kann:

Wenn $r_1,\ r_2,\ \dots r_i,\ s_1,\ s_2,\ \dots s_k;\ u_1,\ u_2,\ \dots\ u_m,\ v_1,\ v_2,\ \dots\ v_n$ reelle homogene lineare Functionen und

$$r_1,\ r_2,\ \dots\ r_i,\ s_1,\ s_2,\ \dots\ s_k$$

von einander unabhängig sind, so kann eine identische Gleichung

$$r_1^2+r_2^2+\dots+r_i^2-s_1^2-s_2^2-\dots-s_k^2$$
$$=u_1^2+u_2^2+\dots+u_m^2-v_1^2-v_2^2-\dots-v_n^2$$

niemals bestehen, wenn $m<i$ oder $n<k$.

Der aufgestellte Satz zeigt, dafs die reellen homogenen Functionen zweiten Grades sich spezifisch von einander unterscheiden, je nach der Anzahl positiver und negativer Quadrate reeller linearer von einander unabhängiger Functionen, durch welche sie dargestellt werden können, indem diese Anzahl von der

Wahl der linearen Functionen, die man sehr verschiedenartig treffen kann, gänzlich unabhängig ist.

Die Aufgabe, reelle lineare Substitutionen anzugeben, durch welche ein Ausdruck

$$r_1^2+r_2^2+\cdots+r_i^2-s_1^2-s_2^2-\cdots-s_k^2$$

wieder dieselbe Form

$$u_1^2+u_2^2+\cdots+u_i^2-v_1^2-v_2^2-\cdots-v_k^2$$

erhält, kann auf die ähnliche Aufgabe zurückgeführt werden, in welcher die Quadrate der beiden Aggregate sämmtlich positiv sind. Hat man nämlich $i+k$ lineare Functionen von $r_1, r_2, \ldots r_i, v_1, v_2, \ldots v_k$, welche mit $u_1, u_2, \ldots u_i, s_1, s_2, \ldots s_k$ bezeichnet werden sollen, von der Beschaffenheit, dafs die identische Gleichung Statt findet:

$$\begin{aligned} & u_1^2+u_2^2+\cdots+u_i^2+s_1^2+s_2^2+\cdots+s_n^2 \\ = {} & r_1^2+r_2^2+\cdots+r_i^2+v_1^2+v_2^2+\cdots+v_k^2, \end{aligned}$$

welche mit der vorgelegten übereinkommt, so kann man mittelst der $i+k$ linearen Gleichungen, welche das eine System Variablen durch das andere bestimmen, jede $i+k$ der $2(i+k)$ Variablen linear durch die übrigen $i+k$ ausdrücken, und daher auch die Gröfsen $r_1, r_2, \ldots r_i, s_1, s_2, \ldots s_k$ durch die Gröfsen $u_1, u_2, \ldots u_i, v_1, v_2, \ldots v_k$.

2.

Aus dem Fundamentalsatz ergiebt sich sogleich der bekannte Satz:

dafs die Gleichung eines Kegelschnitts oder einer Fläche 2ten Grades immer eine Curve oder Fläche derselben Art darstellt, das Coordinatensystem mag ein rechtwinkliges oder ein beliebiges schiefwinkliges sein.

Werden nämlich für zwei verschiedene Coordinatensysteme, auf welche die gegebene Gleichung der Fläche bezogen wird, die auf die Richtung der Hauptachsen bezogenen Gleichungen

$$\begin{aligned} Ap^2+Bq^2+Cr^2+Dp+Eq+Fr+G &= 0, \\ A'p'^2+B'q'^2+C'r'^2+D'p'+E'q'+F'r'+G &= 0, \end{aligned}$$

so werden die ersten Theile der beiden Gleichungen identisch, wenn man für p, q, r und für p', q', r' gewisse reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z substituirt. Damit aber diese Identität Statt finden kann, mufs es nach dem Theorem unter den Coefficienten A, B, C eben so viel positive, negative und verschwindende geben, als unter den Gröfsen A', B', C'. Die Art der Fläche hängt aber davon ab, wie viel von diesen Gröfsen positive, negative oder verschwindende sind, wodurch der Satz für die Flächen folgt, und ebenso auch für die Kegelschnitte erhellt.

Auf ähnliche Art und ebenso unmittelbar ergiebt sich aus dem Fundamentalsatz der bekannte Satz,

> dafs wenn eine Fläche zweiter Ordnung, durch eine auf ein System conjugirter Durchmesser bezogene Gleichung, $Ap^2+Bq^2+Cr^2=1$, gegeben ist, immer gleich viel von den Coefficienten A, B, C positiv und negativ werden, welches System conjugirter Durchmesser der Fläche man auch zu Coordinatenachsen genommen hat.

Wenn nämlich $Ap^2+Bq^2+Cr^2=1$ und $A'p'^2+B'q'^2+C'r'^2=1$ Gleichungen derselben Fläche, auf verschiedene Systeme conjugirter Durchmesser bezogen, bedeuten, so müssen wieder die beiden Ausdrücke $Ap^2+Bq^2+Cr^2$ und $A'p'^2+B'q'^2+C'r'^2$ identisch werden, wenn man für p, q, r und für p', q', r' gewisse reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen der Coordinaten x, y, z substituirt, und daher unter den Coefficienten A, B, C und A', B', C' dieselbe Anzahl positiv und negativ sein.

Die allgemeinste Correlation zwischen räumlichen Figuren von der Beschaffenheit, dafs die entsprechenden Flächen immer denselben Grad haben, besteht darin, dafs man für die Coordinaten der Puncte der einen Figur Brüche setzt, die denselben Nenner haben, und deren Zähler, so wie der gemeinschaftliche Nenner, lineare Functionen der Coordinaten der Puncte der anderen Figur sind. Es seien die Gleichungen zweier sich zufolge solcher Correlatiou einander entsprechenden Flächen 2ten Grades, auf Systeme conjugirter Durchmesser bezogen,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2 = 0,$$
$$A'p^2+B'q^2+C'r^2+D's^2 = 0,$$

wo $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ und $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s}$ die Coordinaten der Puncte der beiden Flächen bedeuten. Es mufs dann die identische Gleichung

$$A'p^2+B'q^2+C'r^2+D's^2 = Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2$$

dadurch erhalten werden können, dafs man für p, q, r, s reelle lineare homogene von einander unabhängige Functionen von x, y, z, w setzt, und daher unter den Coefficienten A, B, C, D und A', B', C', D' eine gleiche Anzahl positiv und negativ sein. Wenn drei dieser Coefficienten positiv und einer negativ oder drei negativ und einer positiv sind, so können diese Gleichungen sowohl Ellipsoiden als elliptische (zweiflächige) Hyperboloiden darstellen; wenn dagegen von diesen Coefficienten zwei positiv nnd zwei negativ sind, nur das hyperbolische (einflächige) Hyperboloid. Man hat daher den Satz:

Nach der allgemeinsten Correlation, bei welcher je zwei einander entsprechende Flächen denselben Grad haben, können einander Ellipsoide und elliptische Hyperboloide, aber hyperbolischen Hyperboloiden nur wieder hyperbolische Hyperboloide entsprechen.

(Der Schlufs dieser Abhandlung, welcher für die weiteren Anwendungen des Fundamentalsatzes bestimmt war, ist nicht vorhanden. Von einer dieser Anwendungen giebt die folgende Bemerkung Nachricht.)