

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1857

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0053

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0023

LOG Titel: Bemerkungen über die beiden vorstehenden Aufsätze.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

19.

Bemerkung über die beiden vorstehenden Aufsätze.

(Von C. W. Borchardt.)

Das algebraische Prinzip, mit dessen Beweise sich die beiden vorstehenden Aufsätze beschäftigen, ist, wie mein scharfsinniger Freund Herr *Hermite* in seinem Briefe erwähnt, von *Jacobi* aufgestellt worden, der es indessen nicht bekannt gemacht hat.

Ausser dem hier gegebenen *Jacobischen Beweise* jenes Prinzips, der sich unter seinen hinterlassenen Handschriften gefunden hat, kennt man durch mündliche Ueberlieferung überdies eine *Anwendung*, die er davon gemacht hat, und von welcher Herr *Hermite* in seinem Briefe ebenfalls spricht. Um über diese Anwendung einige Erläuterungen zu geben, lasse ich eine Stelle aus einem Briefe folgen, den *Jacobi* im März 1847 an mich richtete:

„Ich weiss nicht, wie Sie Ihren Satz *) bewiesen haben; vielleicht mittelst einer Abhandlung von *Sturm*, wo er seinen Satz durch combinatorische Formeln darstellt. Ich habe mir einen einfachen Beweis gesucht, der weder einen Satz über Gleichungen, noch über Determinanten voraussetzt.“

Den Sinn dieser letzten Worte erfuhr ich bald darauf durch mündliche Mittheilungen von *Jacobi*. Das von ihm zum Beweise jenes Satzes angewandte Verfahren bestand nämlich, wie er mir sagte, in Folgendem.

Um für eine gegebene Gleichung, deren Wurzeln mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bezeichnet werden mögen, zu entscheiden, wieviel Paare derselben imaginär sind, bildete er den Ausdruck:

$$(1.) \quad S = \Sigma(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^2,$$

wo die Summe auf die Werthe $\alpha = \alpha_1, = \alpha_2, \dots = \alpha_n$ auszudehnen ist; derselbe lässt sich auch so darstellen:

*) Es ist der Satz über die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln einer Gleichung, welcher sich im *Liouvilleschen Journal* (T. XII, pag. 59) abgedruckt findet, und den ich bereits vor dem Druck brieflich *Jacobi* mitgetheilt hatte.

$$\begin{aligned}
 (2.) \quad S &= s_0 x_0^2 + 2s_1 x_0 x_1 + 2s_2 x_0 x_2 + \cdots + 2s_{n-1} x_0 x_{n-1} \\
 &\quad + s_2 x_1^2 + 2s_3 x_1 x_2 + \cdots + 2s_n x_1 x_{n-1} \\
 &\quad + \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
 &\quad + s_{2n-2} x_{n-1}^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{k=0}^{k=n-1} s_{i+k} x_i x_k,
 \end{aligned}$$

wo s_i die Summe der i^{ten} Potenzen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bedeutet.

Je zwei Glieder des Ausdrucks (1.), welche *zwei conjugirten imaginären* Wurzeln $a+b\sqrt{-1}$ und $a-b\sqrt{-1}$ entsprechen, geben eine Summe der Form $(P+Q\sqrt{-1})^2 + (P-Q\sqrt{-1})^2 = 2P^2 - 2Q^2$, wo P und Q reelle lineare homogene Funktionen von x_0, x_1, \dots, x_{n-1} sind, d. h. sie liefern ein positives und ein negatives Quadrat; jedes einer *reellen* Wurzel entsprechende Glied von (1.) dagegen ist das positive Quadrat einer reellen linearen homogenen Funktion derselben Variablen.

Der Ausdruck (1.) von S wird also ein *Aggregat reeller Quadrate*, von denen eben so viele das negative Zeichen haben, als sich Paare *imaginärer Wurzeln* unter $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ befinden.

Indem Jacobi anderseits auf den Ausdruck (2.) das bekannte Verfahren anwandte, wonach man denselben und zwar nur auf eine Weise unter der Form

$$A_0 \mathbf{U}_0^2 + A_1 \mathbf{U}_1^2 + A_2 \mathbf{U}_2^2 + \cdots + A_{n-1} \mathbf{U}_{n-1}^2$$

so darstellen kann, dass \mathbf{U}_0 eine lineare homogene Funktion von $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$; \mathbf{U}_1 von x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ; \mathbf{U}_2 von x_2, \dots, x_{n-1} ; etc. endlich \mathbf{U}_{n-1} von x_{n-1} allein sei, ergaben sich für die Coefficienten A_0, A_1, \dots, A_{n-1} die Werthe:

$$A_0 = \frac{1}{p_0}, \quad A_1 = \frac{1}{p_0 p_1}, \quad A_2 = \frac{1}{p_1 p_2}, \quad \cdots \quad A_{n-1} = \frac{1}{p_{n-2} p_{n-1}},$$

wo p_m die Determinante des Systems:

$$\begin{array}{cccccc}
 s_0 & s_1 & \cdots & & s_m \\
 s_1 & s_2 & \cdots & & s_{m+1} \\
 \vdots & & & & \\
 s_m & s_{m+1} & \cdots & & s_{2m}
 \end{array}$$

bedeutet.*)

In der Reihe A_0, A_1, \dots, A_{n-1} sind also eben so viel negative Glieder als Zeichenwechsel in der Reihe $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$. Beide Resultate ver-

*) Siehe pag. 270 dieses Hefts.

einigt, gaben dann mit Hülfe des Prinzips der Unveränderlichkeit der Anzahl der positiven und negativen Quadrate den zu beweisenden Satz, wonach die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ mit der Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammenfällt.

Seit dem Jahre 1847, aus welchem ohne Zweifel auch der hier abgedruckte unvollendete *Jacobische* Aufsatz stammt, sind in neuerer Zeit die Herren *Sylvester* und *Hermite*, ohne von der *Jacobischen* Arbeit zu wissen, auf das in Rede stehende Prinzip gekommen.

Herr *Sylvester* hat dasselbe aufgestellt und dafür den Namen des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen vorgeschlagen. Die von ihm gemachte Anwendung desselben bezieht sich auf die für die *Sturmschen* Funktionen *erzeugende* quadratische Form, welche er als von Herrn *Hermite* ihm mitgetheilt anführt. (S. *Sylvester*, on a theory of the syzygetic relations etc. Phil. Trans. 1853 pag. 481, 84, und: a demonstrat. of the theorem, that every homog. quadr. polyn. etc. Phil. Magaz. 1852 II. pag. 138.)

Herr *Hermite* hat außer dem hier veröffentlichten Beweise des Prinzips eine Anwendung davon gemacht, die, mit der *Jacobischen* im Grundgedanken übereinstimmend, umfassender als diese ist. Seine erwähnte *erzeugende* quadratische Form ist der oben mit *S* bezeichneten ganz ähnlich, aber sie ist allgemeiner, und zwar in der Art, dass man aus ihr nicht nur den besonderen Fall des *Sturmschen* Satzes herzuleiten im Stande ist, wo $-\infty$ und $+\infty$ die Grenzen sind, zwischen denen die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmt werden soll, sondern eben sowohl den allgemeinen Fall, wo irgend zwei endliche reelle Größen jene Grenzen sind. Eine weitere Verallgemeinerung des Gedankens der erzeugenden quadratischen Form hat Herrn *Hermite* dazu geführt, ähnliche Untersuchungen für Gleichungen mit imaginären Coefficienten anzustellen (Bd. LII. pag. 39 dieses Journals) sowie den *Sturmschen* Satz auf zwei simultane Gleichungen auszudehnen. (S. *comptes rendus de l'ac. de Paris* 1853 I. pag. 294, 96.)

Schliesslich ist der Aufsatz des Herrn *Brioschi* anzuführen: „Sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles etc.” (Nouvelles Annales de M. *Terquem*, Juillet 1856), in welchem sich sowohl ein eleganter Beweis des in Rede stehenden Prinzips findet als seine Anwendung auf die Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln.