19.

Bemerkung über die beiden vorstehenden Aufsätze.

(Von *C. W. Borchardt.*)

Das algebraische Prinzip, mit dessen Beweise sich die beiden vorstehenden Aufsätze beschäftigen, ist, wie mein scharfsinniger Freund Herr ***Hermite*** in seinem Briefe erwähnt, von ***Jacobi*** aufgestellt worden, der es indessen nicht bekannt gemacht hat.

Aufser dem hier gegebenen ***Jacobi**schen* ***Beweise*** jenes Prinzips, der sich unter seinen hinterlassenen Handschriften gefunden hat, kennt man durch mündliche Ueberlieferung überdies eine ***Anwendung,*** die er davon gemacht hat, und von welcher Herr ***Hermite*** in seinem Briefe ebenfalls spricht. Um über diese Anwendung einige Erläuterungen zu geben, lasse ich eine Stelle aus einem Briefe folgen, den ***Jacobi*** im März 1847 an mich richtete:

„Ich weifs nicht, wie Sie Ihren Satz *) bewiesen haben; vielleicht mittelst einer Abhandlung von ***Sturm,*** wo er seinen Satz durch combinatorische Formeln darstellt. ***Ich habe mir einen einfachen Beweis gesucht, der weder einen Satz über Gleichungen, noch über Determinanten voraussetzt.***"

Den Sinn dieser letzten Worte erfuhr ich bald darauf durch mündliche Mittheilungen von ***Jacobi.*** Das von ihm zum Beweise jenes Satzes angewandte Verfahren bestand nämlich, wie er mir sagte, in Folgendem.

Um für eine gegebene Gleichung, deren Wurzeln mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bezeichnet werden mögen, zu entscheiden, wieviel Paare derselben imaginär sind, bildete er den Ausdruck:

$$(1.)\qquad S = \Sigma(x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_{n-1})^2,$$

wo die Summe auf die Werthe $\alpha = \alpha_1, = \alpha_2, \ldots = \alpha_n$ auszudehnen ist; derselbe läfst sich auch so darstellen:

---

*) Es ist der Satz über die Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln einer Gleichung, welcher sich im *Liouville*schen Journal (T. XII, pag. 59) abgedruckt findet, und den ich bereits vor dem Druck brieflich *Jacobi* mitgetheilt hatte.

$$
\begin{aligned}
(2.)\qquad S = {} & s_0 x_0^2 + 2s_1 x_0 x_1 + 2s_2 x_0 x_2 + \cdots + 2s_{n-1} x_0 x_{n-1} \\
& + \; s_2 x_1^2 \; + 2s_3 x_1 x_2 + \cdots + 2s_n \, x_1 \, x_{n-1} \\
& \qquad\qquad + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + s_{2n-2} \, x_{n-1}^2 \\
= {} & \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{k=0}^{k=n-1} s_{i+k} \, x_i \, x_k,
\end{aligned}
$$

wo s_i die Summe der i^{ten} Potenzen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bedeutet.

Je zwei Glieder des Ausdrucks (1.), welche *zwei conjugirten imaginären* Wurzeln $a+b\sqrt{-1}$ und $a-b\sqrt{-1}$ entsprechen, geben eine Summe der Form $(P+Q\sqrt{-1})^2+(P-Q\sqrt{-1})^2 = 2P^2-2Q^2$, wo P und Q *reelle* lineare homogene Funktionen von $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ sind, d. h. sie liefern ein positives und ein negatives Quadrat; jedes einer *reellen* Wurzel entsprechende Glied von (1.) dagegen ist das positive Quadrat einer reellen linearen homogenen Funktion derselben Variablen.

Der Ausdruck (1.) *von S wird also ein Aggregat reeller Quadrate, von denen eben so viele das negative Zeichen haben, als sich Paare imaginärer Wurzeln unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ befinden.*

Indem *Jacobi* andrerseits auf den Ausdruck (2.) das bekannte Verfahren anwandte, wonach man denselben und zwar nur auf *eine* Weise unter der Form

$$A_0 U_0^2 + A_1 U_1^2 + A_2 U_2^2 + \cdots + A_{n-1} U_{n-1}^2$$

so darstellen kann, dafs U_0 eine lineare homogene Funktion von $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$; U_1 von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$; U_2 von $x_2, \ldots x_{n-1}$; etc. endlich U_{n-1} von x_{n-1} allein sei, ergaben sich für die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ die Werthe:

$$A_0 = \frac{1}{p_0}, \quad A_1 = \frac{1}{p_0 p_1}, \quad A_2 = \frac{1}{p_1 p_2}, \quad \ldots \quad A_{n-1} = \frac{1}{p_{n-2} p_{n-1}},$$

wo p_m die Determinante des Systems:

$$
\begin{matrix}
s_0 & s_1 & \ldots & s_m \\
s_1 & s_2 & \ldots & s_{m+1} \\
\vdots & & & \\
s_m & s_{m+1} & \ldots & s_{2m}
\end{matrix}
$$

bedeutet.*)

In der Reihe $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ sind also eben so viel negative Glieder als Zeichenwechsel in der Reihe $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$. Beide Resultate ver-

---

*) Siehe pag. 270 dieses Hefts.

einigt, gaben dann mit Hülfe des Prinzips der Unveränderlichkeit der Anzahl der positiven und negativen Quadrate den zu beweisenden Satz, wonach die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $p_0, p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ mit der Anzahl der Paare imaginärer Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammenfällt.

Seit dem Jahre 1847, aus welchem ohne Zweifel auch der hier abgedruckte unvollendete *Jacobi*sche Aufsatz stammt, sind in neuerer Zeit die Herren *Sylvester* und *Hermite,* ohne von der *Jacobi*schen Arbeit zu wissen, auf das in Rede stehende Prinzip gekommen.

Herr *Sylvester* hat dasselbe aufgestellt und dafür den Namen des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen vorgeschlagen. Die von ihm gemachte Anwendung desselben bezieht sich auf die für die *Sturm*schen Funktionen *erzeugende* quadratische Form, welche er als von Herrn *Hermite* ihm mitgetheilt anführt. (S. Sylvester, on a theory of the syzygetic relations etc. Phil. Trans. 1853 pag. 481, 84, und: a demonstrat. of the theorem, that every homog. quadr. polyn. etc. Phil. Magaz. 1852 II. pag. 138.)

Herr *Hermite* hat aufser dem hier veröffentlichten Beweise des Prinzips eine Anwendung davon gemacht, die, mit der *Jacobi*schen im Grundgedanken übereinstimmend, umfassender als diese ist. Seine erwähnte *erzeugende* quadratische Form ist der oben mit S bezeichneten ganz ähnlich, aber sie ist allgemeiner, und zwar in der Art, dafs man aus ihr nicht nur den besonderen Fall des *Sturm*schen Satzes herzuleiten im Stande ist, wo $-\infty$ und $+\infty$ die Grenzen sind, zwischen denen die Anzahl der reellen Wurzeln bestimmt werden soll, sondern eben sowohl den allgemeinen Fall, wo irgend zwei endliche reelle Gröfsen jene Grenzen sind. Eine weitere Verallgemeinerung des Gedankens der erzeugenden quadratischen Form hat Herrn *Hermite* dazu geführt, ähnliche Untersuchungen für Gleichungen mit imaginären Coefficienten anzustellen (Bd. LII. pag. 39 dieses Journals) sowie den *Sturm*schen Satz auf zwei simultane Gleichungen auszudehnen. (S. comptes rendus de l'ac. de Paris 1853 I. pag. 294, 96.)

Schliefslich ist der Aufsatz des Herrn *Brioschi* anzuführen: „Sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles etc." (Nouvelles Annales de M. *Terquem,* Juillet 1856), in welchem sich sowohl ein eleganter Beweis des in Rede stehenden Prinzips findet als seine Anwendung auf die Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln.
