20.

Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn *E. Heine* an den Herausgeber.

Halle, d. 11. Januar 1857.

. . . . In einer früheren Abhandlung im 34sten Bande dieses Journals habe ich die Nenner des Kettenbruchs, in den *Gaufs* die hypergeometrische Reihe $F(1, \beta, \gamma)$ entwickelt, angegeben; es ist mir jetzt gelungen, das Resultat auf den allgemeinen Kettenbruch für

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)},$$

den *Gaufs* in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe Sectio II, p. 13 ableitet, zu übertragen. Ich theile Ihnen das Resultat mit: Ist jener Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{a_2x}{1-\text{etc.}}}},$$

und bezeichnet man die Zähler und Nenner des Näherungsbruches, welcher mit $a_n x$ schliefst durch P_n und Q_n, so werden Q_{2n-1}, Q_{2n}, P_{2n}, P_{2n+1} gleich folgenden Ausdrücken, die *ganze* Functionen $n$ten Grades sind:

$$Q_{2n-1} = F(\alpha, \beta, \gamma)\,F(1-n-\alpha, -n-\beta, 1-2n-\gamma)$$
$$-a_0 a_1 \ldots a_{2n} x^{2n+1} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma)\,F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1)$$

$$Q_{2n} = F(\alpha, \beta, \gamma)\,F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma)$$
$$-a_0 a_1 \ldots a_{2n+1} x^{2n+2} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma)\,F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2)$$

$$P_{2n} = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)\,F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma)$$
$$-a_1 a_2 \ldots a_{2n+1} x^{2n+1} F(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma)\,F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2)$$

$$P_{2n+1} = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)\,F(-n-\alpha, -n-1-\beta, -2n-1-\gamma)$$
$$-a_1 a_2 \ldots a_{2n+2} x^{2n+2} F(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma)\,F(\alpha+n+1, \beta+n+2, \gamma+2n+3).$$

Es ist hier $a_0 = \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{(\gamma-1)\gamma}$ gesetzt; a_1, a_2 etc. bezeichnen dieselben Gröfsen, welche in dem Kettenbruche vorkommen, d. h. es ist

$$a_1 = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} \qquad a_2 = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

$$a_3 = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \qquad a_4 = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}$$

etc.

Um also z. B. Q_{2n} zu erhalten, braucht man nur das Product der zwei Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma)$ zu bilden, und in demselben den Theil allein beizubehalten, welcher keine höheren Potenzen von x als x^n enthält; die Potenzen x^{n+1}, x^{n+2}, etc., x^{2n+1} fehlen natürlich in dem Producte von selbst, und erst x^{2n+2} kann darin auftreten. Aehnliches gilt von Q_{2n-1} und den P.

Die *Ableitung* dieser Resultate, welche sich leicht *beweisen* lassen, beabsichtige ich gelegentlich mitzutheilen, und werde zu gleicher Zeit die Ausdehnung für den Fall geben, dafs man nicht die gewöhnlichen hypergeometrischen Reihen, sondern die durch ein neues Element q verallgemeinerten betrachtet. In besonderen Fällen wird übrigens das Product der hypergeometrischen Reihen, und dann P oder Q sehr einfach.