

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1857

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0053

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0024

LOG Titel: Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn E. Heine an den Herausgeber.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

20.

Auszug eines Schreibens über Kettenbrüche von Herrn *E. Heine* an den Herausgeber.

Halle, d. 11. Januar 1857.

. . . . In einer früheren Abhandlung im 34sten Bande dieses Journals habe ich die Nenner des Kettenbruchs, in den *Gaußs* die hypergeometrische Reihe $F(1, \beta, \gamma)$ entwickelt, angegeben; es ist mir jetzt gelungen, das Resultat auf den allgemeinen Kettenbruch für

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)},$$

den *Gaußs* in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe Sectio II, p. 13 ableitet, zu übertragen. Ich theile Ihnen das Resultat mit: Ist jener Kettenbruch

$$\frac{1}{1 - \frac{a_1 x}{1 - \frac{a_2 x}{1 - \text{etc.}}}},$$

und bezeichnet man die Zähler und Nenner des Näherungsbruches, welcher mit $a_n x$ schließt durch P_n und Q_n , so werden Q_{2n-1} , Q_{2n} , P_{2n} , P_{2n+1} gleich folgenden Ausdrücken, die *ganze* Functionen *n*ten Grades sind:

$$Q_{2n-1} = F(\alpha, \beta, \gamma) F(1-n-\alpha, -n-\beta, 1-2n-\gamma) \\ - a_0 a_1 \dots a_{2n} x^{2n+1} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma) F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1)$$

$$Q_{2n} = F(\alpha, \beta, \gamma) F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma) \\ - a_0 a_1 \dots a_{2n+1} x^{2n+2} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma) F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2)$$

$$P_{2n} = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma) \\ - a_1 a_2 \dots a_{2n+1} x^{2n+1} F(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma) F(\alpha+n+1, \beta+n+1, \gamma+2n+2)$$

$$P_{2n+1} = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) F(-n-\alpha, -n-1-\beta, -2n-1-\gamma) \\ - a_1 a_2 \dots a_{2n+2} x^{2n+2} F(1-\alpha, -\beta, 1-\gamma) F(\alpha+n+1, \beta+n+2, \gamma+2n+3).$$

Es ist hier $a_0 = \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{(\gamma-1)\gamma}$ gesetzt; a_1, a_2 etc. bezeichnen dieselben Größen, welche in dem Kettenbruche vorkommen, d. h. es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} & a_2 &= \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \\ a_3 &= \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} & a_4 &= \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)} \\ & & & \text{etc.} \end{aligned}$$

Um also z. B. Q_{2n} zu erhalten, braucht man nur das Product der zwei Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F(-n-\alpha, -n-\beta, -2n-\gamma)$ zu bilden, und in demselben den Theil allein beizubehalten, welcher keine höheren Potenzen von x als x^n enthält; die Potenzen x^{n+1}, x^{n+2} , etc., x^{2n+1} fehlen natürlich in dem Producte von selbst, und erst x^{2n+2} kann darin auftreten. Aehnliches gilt von Q_{2n-1} und den P .

Die *Ableitung* dieser Resultate, welche sich leicht *beweisen* lassen, beabsichtige ich gelegentlich mitzutheilen, und werde zu gleicher Zeit die Ausdehnung für den Fall geben, dafs man nicht die gewöhnlichen hypergeometrischen Reihen, sondern die durch ein neues Element q verallgemeinerten betrachtet. In besonderen Fällen wird übrigens das Product der hypergeometrischen Reihen, und dann P oder Q sehr einfach.