Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0025
LOG Titel: Sur une formule d'Analyse.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

21.
Sur une formule d'Analyse.

(Par M. *P. Tchebichev.*)

(Lu à l'académie de St. Pétersbourg le $\frac{20 \text{ octobre}}{1 \text{ novembre}}$ 1854.)

Si l'on représente par $f(x)$ une fonction entière du degré n, et que l'on connaisse ses $n+1$ valeurs

$$f(x^0),\quad f(x'),\quad f(x''),\quad \ldots\quad f(x^n).$$

la formule de *Lagrange* donne cette expression de $f(x)$

$$\frac{(x-x')(x-x'')\ldots}{(x^0-x')(x^0-x'')\ldots}f(x^0)+\frac{(x-x^0)(x-x'')\ldots}{(x'-x^0)(x'-x'')\ldots}f(x')+\cdots$$

Cette valeur de $f(x)$ peut être représentée sous différentes formes; l'une des plus remarquables est la suivante:

$$A'\sum_{i=0}^{i=n}f(x^i)-A''\psi_1(x)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_1(x^i)f(x^i)+A'''\psi_2(x)\sum_{i=0}^{i=n}\psi_2(x^i)f(x^i)-\cdots;$$

où A', A'', A''', ... désignent les coefficients de x dans les quotients de la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots}}}$$

résultante du développement de

$$\frac{1}{x-x^0}+\frac{1}{x-x'}+\cdots+\frac{1}{x-x^{(n)}},$$

et $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... les dénominateurs des fractions convergentes qu'on en tire.

Cette formule a l'avantage de donner $f(x)$ sous la forme d'une fonction entière, dont les termes, en général, présentent une série sensiblement décroissante. Dans le cas particulier de $x^0=\frac{n}{n}$, $x'=\frac{n-2}{n}$, $x''=\frac{n-4}{n}$, ... $x^{(n)}=\frac{-n}{n}$, et n infiniment grand, cette formule fournit le développement de $f(x)$ suivant les valeurs de certaines fonctions, que *Legendre* a désignées par X^m (Exer. Partic V, §. 10), et qui sont déterminées ici par la réduction de l'expression $\log\frac{x+1}{x-1}$ en fraction continue.

Mais la propriété la plus précieuse de cette formule est celle-ci:

Si l'on ne prend dans cette formule que les premiers termes en nombre quelconque m, on trouve une valeur approchée de $f(x)$ sous la forme d'un polynôme du degré $m-1$ et avec les coefficients indiqués par la *méthode des moindres carrés*, dans la supposition que les valeurs données de $f(x^0)$, $f(x')$, $f(x'')$, ... $f(x^n)$ sont affectées d'erreurs de même nature.

Dans peu de temps, j'aurai l'honneur de présenter à l'Académie un Mémoire, où l'on verra, en outre, le parti qu'on peut tirer de cette formule pour l'Analyse.