22.

Über die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit, Note zu der Abhandlung im Band LII dieses Journals.

(Von Herrn *Clebsch.*)

In einer Abhandlung, welche im 52sten Bande dieses Journals erschienen ist, habe ich die Gleichungen für die Bewegung einer unbegränzten Flüssigkeitsmasse aufgestellt, innerhalb deren ein fester Körper in irgend welcher Weise bewegt wird. Ich habe dabei besonders den Fall betrachtet, wo dieser Körper ein Ellipsoid ist, und habe die betreffenden Gleichungen zu integriren versucht, wenn das Ellipsoid sich in der Richtung einer seiner Hauptaxen geradlinig bewegte, oder wenn es, ohne fortschreitende Bewegung, um eine seiner Hauptaxen rotirte. In Bezug auf beide Fälle habe ich eine Bemerkung hinzuzufügen.

Für den ersten Fall erhielt ich zur Bestimmung der Curven, auf welchen sich die Flüssigkeitstheilchen bewegten, die beiden Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} 2\log y' = \int \frac{\partial\mu}{a'+\mu} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0 - S_0 + S)\sqrt{a+\mu \,.\, a'+\mu \,.\, a''+\mu}} \\ 2\log y'' = \int \frac{d\mu}{a''+\mu} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}(\Sigma_0 - S_0 + S)\sqrt{a+\mu \,.\, a'+\mu \,.\, a''+\mu}}. \end{cases}$$

Es waren dabei y', y'' die beiden gegen die Bewegungsrichtung des Ellipsoids senkrechten Coordinaten des betrachteten Flüssigkeitstheilchens, bezogen auf das Hauptaxensystem des Ellipsoids als Coordinatensystem; ferner a, a', a'' die Axen des Ellipsoids, a die der Bewegungsrichtung entsprechende, μ der Parameter desjenigen confocalen auf welchem sich das Theilchen gerade befand. Endlich war

$$(2.)\quad \begin{cases} S^i = \int_\mu^\infty \frac{d\mu}{a^{(i)}+\mu \,.\, \sqrt{a+\mu \,.\, a'+\mu \,.\, a''+\mu}} \\ \Sigma = S + S' + S'' = \frac{2}{\sqrt{a+\mu \,.\, a'+\mu \,.\, a''+\mu}} \end{cases}$$

und S_0^i, Σ_0 dieselben Gröfsen, bezogen auf die Oberfläche des Ellipsoids, wo $\mu = 0$.

Die Gleichungen (1.) nehmen auch die Form an:

$$(3.)\quad \log y^{(i)} = \int \frac{d\mu}{a^{(i)}+\mu.\sqrt{a+\mu.a'+\mu.a''+\mu}}.\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{a+\mu.a'+\mu.a''+\mu}}-\Sigma_0+S_0-S}$$

oder, nach den Gleichungen (2.):

$$(4.)\quad \log y' = \int \frac{dS'}{S'_0+S''_0-S'-S''} \qquad \log y'' = \int \frac{dS''}{S'_0+S''_0-S'-S''}.$$

Diese einfachere Gestalt der Integrale läfst zugleich einsehen, dafs, indem man dieselben addirt, ein ausführbares Integral erhalten wird, dessen Resultat ist:

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{\text{Const.}}{y'y''} = S'_0+S''_0-S'-S'' \\ \qquad = \displaystyle\int_0^\mu \left(\frac{1}{a'+\mu}+\frac{1}{a''+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{a+\mu.a'+\mu.a''+\mu}}, \end{cases}$$

so dafs also wenigstens *ein* Integral der in Frage stehenden Bewegung auf ein elliptisches Integral der zweiten Gattung unmittelbar zurückkommt; und zwar wird auf diese Weise das Product der Entfernungen des Theilchens von denjenigen Hauptebenen des Ellipsoids ausgedrückt, welche sich in der Bewegungsaxe schneiden.

Für den andern der erwähnten Fälle erhielt ich damals nur ein einziges Integral, während über das zweite nichts festzustehen schien. Aus der Theorie des letzten Multiplicators aber erhellt die Aufstellbarkeit dieses Integrales von vorn herein. Die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeitstheilchen sind nämlich, bezogen auf ein im Raume festes Coordinatensystem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$$

wo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0.$$

Da nun hiernach der letzte Multiplicator des Systems $=1$ ist, also auch bekannt für jedes neue System von Variabeln, so folgt, dafs aus zwei Integralen des Systems sich immer das dritte ohne Weiteres ergiebt.

Man sieht ferner leicht, dafs der Multiplicator nicht nur aus eben diesem Grunde bekannt, sondern sogar $=1$ ist für das im Körper feste Coordinatensystem, für welches die Formeln (5.) der citirten Abhandlung die Gleichungen geben

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - A - y''A^{10} + y'A^{20}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y'} - A' - yA^{21} + y''A^{01}$$

$$\frac{dy''}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial y''} - A'' - y'A^{02} + yA^{12}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y''^2} = 0,$$

wo die A die Geschwindigkeiten, translatorische und rotatorische, in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers darstellen, und lediglich Funktionen der Zeit sind. Verschwinden nun alle diese Geschwindigkeiten bis auf Eine, so wird φ dieser Einen proportional. Die Verhältnisse der rechten Theile werden also von der Zeit unabhängig, und die Gleichungen nehmen die Form an:

$$dy:dy':dy'' = Y:Y':Y'' \quad \text{und es ist noch} \quad \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Y''}{\partial y''} = 0$$

der Multiplicator des neuen Systems also wiederum $= 1$; und somit aus *einem* Integrale der Gleichungen das zweite bekannt. Man hat also den Satz:

Sobald die Bewegung des Körpers nur von *einer* der sechs Geschwindigkeiten abhängt, bedarf es nur *eines* Integrals, um die beiden übrigen sogleich zu finden.

Dasselbe geschieht noch, wenn die sechs Geschwindigkeiten nur in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen.

Nachdem also hierdurch die Aufstellbarkeit des fehlenden Integrales nachgewiesen war, wurde es nicht schwer, dasselbe auf Quadraturen zurückzuführen. Rotirte das Ellipsoid um die y Axe, mit der Geschwindigkeit A^{12}, so waren die Bewegungsgleichungen (110. der citirten Abhandlung) folgende:

$$(6.)\quad\begin{cases}
\dfrac{\mu-\mu_1.\mu-\mu_2}{a+\mu.a'+\mu.a''+\mu}.\dfrac{d\mu}{dt} \\
= 2y'y''A^{12}\Big[\Big(\dfrac{1}{a'+\mu} - \dfrac{1}{a''+\mu}\Big) + k(S'-S'')\Big(\dfrac{1}{a'+\mu} + \dfrac{1}{a''+\mu}\Big) \\
\qquad\qquad + 2k\dfrac{\partial(S'-S'')}{\partial\mu}\Big] \\
\dfrac{\mu_1-\mu_2.\mu_1-\mu}{a+\mu_1.a'+\mu_1.a''+\mu_1}.\dfrac{d\mu_1}{dt} \\
= 2y'y''A^{12}\Big[\Big(\dfrac{1}{a'+\mu_1} - \dfrac{1}{a''+\mu_1}\Big) + k(S'-S'')\Big(\dfrac{1}{a'+\mu_1} + \dfrac{1}{a''+\mu_1}\Big)\Big] \\
\dfrac{\mu_2-\mu.\mu_2-\mu_1}{a+\mu_2.a'+\mu_2.a''+\mu_2}.\dfrac{d\mu_2}{dt} \\
= 2y'y''A^{12}\Big[\Big(\dfrac{1}{a'+\mu_2} - \dfrac{1}{a''+\mu_2}\Big) + k(S'-S'')\Big(\dfrac{1}{a'+\mu_2} + \dfrac{1}{a''+\mu_2}\Big)\Big].
\end{cases}$$

Dabei sind μ_1, μ_2 die Parameter der confocalen Hyperboloide und k eine Constante

$$(7.)\quad k = \frac{a'-a''}{(a'-a'')\Sigma_0+(a'+a'')(S_0'-S_0'')},$$

während die übrigen Gröfsen die schon erwähnten Bedeutungen beibehalten.

Die Gleichungen (7.) nehmen ohne Weiteres auch die Form an:

$$(8.)\quad \begin{cases} \mu-\mu_1.\mu-\mu_2\cdot\dfrac{d\mu}{d\Omega} = (a+\mu)[(a''-a')(1-k\Sigma)+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu)] \\ \mu_1-\mu_2.\mu_1-\mu\cdot\dfrac{d\mu_1}{d\Omega} = (a+\mu_1)[(a''-a')+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu_1)] \\ \mu_2-\mu.\mu_2-\mu_1\cdot\dfrac{d\mu_2}{d\Omega} = (a+\mu_2)[(a''-a')+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu_2)]. \end{cases}$$

Ich setze nun der Kürze wegen

$$(9.)\quad \begin{cases} (a''-a')(1-k\Sigma)+k(S'-S'')(a'+a''+2\mu) = N \\ (a''-a')+k(S'-S'')(a'+a'') = p, \qquad 2k(S'-S'') = q. \end{cases}$$

Dann gehen die Gleichungen (8.), indem man zugleich die beiden letzten durch die erste dividirt, in die folgenden über:

$$(10.)\quad \begin{cases} (\mu_2-\mu_1)\dfrac{d\mu_1}{d\mu}(a+\mu)N = (a+\mu_1)(p+q\mu_1)(\mu-\mu_2) \\ (\mu_1-\mu_2)\dfrac{d\mu_2}{d\mu}(a+\mu)N = (a+\mu_2)(p+q\mu_2)(\mu-\mu_1). \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen subtrahirt, oder dasselbe thut, nachdem man sie zuvor mit μ_2 und μ_1 multiplicirt hat, so erhält man zwei für $\mu_1+\mu_2$ und $\mu_1\mu_2$ lineäre Gleichungen:

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{d(\mu_1+\mu_2)}{d\mu}\cdot(a+\mu)N = -\{ap+\mu(aq+p)\}-\mu q(\mu_1+\mu_2)+q\mu_1\mu_2 \\ \dfrac{d(\mu_1\mu_2)}{d\mu}\cdot(a+\mu)N = ap\mu-ap(\mu_1+\mu_2)-(aq+p+q\mu)\mu_1\mu_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nun werden integrirt, indem man zunächst die erste mit a multiplicirt und zu der zweiten hinzufügt. Man erhält dann

$$(12.)\quad \frac{d.(a+\mu_1.a+\mu_2)}{d\mu}\cdot(a+\mu)N = -(\mu q+p).a+\mu_1.a+\mu_2$$

und durch Integration:

$$(13.)\quad a+\mu_1.a+\mu_2 = c.e^{-\int\frac{\mu q+p}{N}\cdot\frac{d\mu}{a+\mu}}.$$

Dies ist das auch in der citirten Abhandlung gegebene Integral. Offenbar kann man aber nun entweder $\mu_1\mu_2$ durch $\mu_1+\mu_2$ oder umgekehrt ausdrücken, und erhält dann aus den Gleichungen (11.) lineare Differentialgleichungen mit je einer unbekannten Gröfse; nämlich, wenn wir mit V den Ausdruck bezeichnen, welcher die rechte Seite der Gleichung (13.) bildet:

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\mu_1+\mu_2}{d\mu}.N+q(\mu_1+\mu_2) = \dfrac{qV}{a+\mu}-(aq+p) \\ \dfrac{d.\mu_1\mu_2}{d\mu}.N+q(\mu_1\mu_2) = ap\left(1-\dfrac{V}{a.a+\mu}\right). \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$(15.)\quad \begin{cases} \mu_1+\mu_2 = e^{-\int\frac{qd\mu}{N}}\int e^{\int\frac{qd\mu}{N}}\left\{\dfrac{qV}{a+\mu}-(aq+p)\right\}\dfrac{d\mu}{N} \\ \mu_1\mu_2 = e^{-\int\frac{qd\mu}{N}}\int e^{\int\frac{qd\mu}{N}}\left\{1-\dfrac{V}{a.a+\mu}\right\}ap.\dfrac{d\mu}{N} \end{cases}$$

wodurch das Problem auf Quadraturen zurückgeführt ist.

Berlin, den 26. Mai 1856.