

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1857

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0053

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0026

LOG Titel: Über die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit, Note zu der Abhandlung im Band LII dieses Journals.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

22.

Über die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit, Note zu der Abhandlung im Band LII dieses Journals.

(Von Herrn Clebsch.)

In einer Abhandlung, welche im 52sten Bande dieses Journals erschienen ist, habe ich die Gleichungen für die Bewegung einer unbegrenzten Flüssigkeitsmasse aufgestellt, innerhalb deren ein fester Körper in irgend welcher Weise bewegt wird. Ich habe dabei besonders den Fall betrachtet, wo dieser Körper ein Ellipsoid ist, und habe die betreffenden Gleichungen zu integrieren versucht, wenn das Ellipsoid sich in der Richtung einer seiner Hauptaxen geradlinig bewegte, oder wenn es, ohne fortschreitende Bewegung, um eine seiner Hauptaxen rotirte. In Bezug auf beide Fälle habe ich eine Bemerkung hinzuzufügen.

Für den ersten Fall erhielt ich zur Bestimmung der Curven, auf welchen sich die Flüssigkeitstheilchen bewegten, die beiden Gleichungen

$$(1.) \quad \begin{cases} 2 \log y' = \int \frac{d\mu}{a' + \mu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(\Sigma_0 - S_0 + S) \sqrt{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu}} \\ 2 \log y'' = \int \frac{d\mu}{a'' + \mu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(\Sigma_0 - S_0 + S) \sqrt{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu}} \end{cases}$$

Es waren dabei y' , y'' die beiden gegen die Bewegungsrichtung des Ellipsoids senkrechten Coordinaten des betrachteten Flüssigkeitstheilchens, bezogen auf das Hauptaxensystem des Ellipsoids als Coordinatensystem; ferner a , a' , a'' die Axen des Ellipsoids, a die der Bewegungsrichtung entsprechende, μ der Parameter desjenigen confocalen auf welchem sich das Theilchen gerade befand. Endlich war

$$(2.) \quad \begin{cases} S^i = \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\mu}{a^{(i)} + \mu \cdot \sqrt{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu}} \\ \Sigma = S + S' + S'' = \frac{2}{\sqrt{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu}} \end{cases}$$

und S_0^i , Σ_0 dieselben Größen, bezogen auf die Oberfläche des Ellipsoids, wo $\mu=0$.

Die Gleichungen (1.) nehmen auch die Form an:

$$(3.) \log y^{(i)} = \int \frac{d\mu}{a^{(i)} + \mu \cdot \sqrt{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu}} - \Sigma_0 + S_0 - S}$$

oder, nach den Gleichungen (2.):

$$(4.) \log y' = \int \frac{dS'}{S'_0 + S''_0 - S' - S''} \quad \log y'' = \int \frac{dS''}{S'_0 + S''_0 - S' - S''}.$$

Diese einfachere Gestalt der Integrale läßt zugleich einsehen, dafs, indem man dieselben addirt, ein ausführbares Integral erhalten wird, dessen Resultat ist:

$$(5.) \begin{cases} \frac{\text{Const.}}{y'y''} = S'_0 + S''_0 - S' - S'' \\ = \int_0^\mu \left(\frac{1}{a' + \mu} + \frac{1}{a'' + \mu} \right) \frac{d\mu}{\sqrt{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu}}, \end{cases}$$

so dafs also wenigstens *ein* Integral der in Frage stehenden Bewegung auf ein elliptisches Integral der zweiten Gattung unmittelbar zurückkommt; und zwar wird auf diese Weise das Product der Entfernungen des Theilchens von denjenigen Hauptebenen des Ellipsoids ausgedrückt, welche sich in der Bewegungsaxe schneiden.

Für den andern der erwähnten Fälle erhielt ich damals nur ein einziges Integral, während über das zweite nichts festzustehen schien. Aus der Theorie des letzten Multipliers aber erhellt die Aufstellbarkeit dieses Integrales von vorn herein. Die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeitstheilchen sind nämlich, bezogen auf ein im Raume festes Coordinatensystem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

wo

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = 0.$$

Da nun hiernach der letzte Multiplier des Systems = 1 ist, also auch bekannt für jedes neue System von Variablen, so folgt, dafs aus zwei Integralen des Systems sich immer das dritte ohne Weiteres ergibt.

Man sieht ferner leicht, dafs der Multiplier nicht nur aus eben diesem Grunde bekannt, sondern sogar = 1 ist für das im Körper feste Coordinatensystem, für welches die Formeln (5.) der citirten Abhandlung die Gleichungen geben

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - A - y'' A^{10} + y' A^{20}$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y'} - A' - y A^{21} + y'' A^{01}$$

$$\frac{dy''}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y''} - A'' - y' A^{02} + y A^{12}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y''^2} = 0,$$

wo die A die Geschwindigkeiten, translatorische und rotatorische, in Bezug auf die Hauptaxen des Körpers darstellen, und lediglich Funktionen der Zeit sind. Verschwinden nun alle diese Geschwindigkeiten bis auf Eine, so wird φ dieser Einen proportional. Die Verhältnisse der rechten Theile werden also von der Zeit unabhängig, und die Gleichungen nehmen die Form an:

$$dy:dy':dy'' = Y:Y':Y'' \text{ und es ist noch } \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Y''}{\partial y''} = 0$$

der Multiplikator des neuen Systems also wiederum $= 1$; und somit aus *einem* Integrale der Gleichungen das zweite bekannt. Man hat also den Satz:

Sobald die Bewegung des Körpers nur von *einer* der sechs Geschwindigkeiten abhängt, bedarf es nur *eines* Integrals, um die beiden übrigen sogleich zu finden.

Dasselbe geschieht noch, wenn die sechs Geschwindigkeiten nur in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen.

Nachdem also hierdurch die Aufstellbarkeit des fehlenden Integrales nachgewiesen war, wurde es nicht schwer, dasselbe auf Quadraturen zurückzuführen. Rotirte das Ellipsoid um die y Axe, mit der Geschwindigkeit A^{12} , so waren die Bewegungsgleichungen (110. der citirten Abhandlung) folgende:

$$(6.) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\mu - \mu_1 \cdot \mu - \mu_2}{a + \mu \cdot a' + \mu \cdot a'' + \mu} \cdot \frac{d\mu}{dt} \\ & = 2y'y'' A^{12} \left[\left(\frac{1}{a' + \mu} - \frac{1}{a'' + \mu} \right) + k(S' - S'') \left(\frac{1}{a' + \mu} + \frac{1}{a'' + \mu} \right) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + 2k \frac{\partial(S' - S'')}{\partial \mu} \right] \\ & \frac{\mu_1 - \mu_2 \cdot \mu_1 - \mu}{a + \mu_1 \cdot a' + \mu_1 \cdot a'' + \mu_1} \cdot \frac{d\mu_1}{dt} \\ & = 2y'y'' A^{12} \left[\left(\frac{1}{a' + \mu_1} - \frac{1}{a'' + \mu_1} \right) + k(S' - S'') \left(\frac{1}{a' + \mu_1} + \frac{1}{a'' + \mu_1} \right) \right] \\ & \frac{\mu_2 - \mu \cdot \mu_2 - \mu_1}{a + \mu_2 \cdot a' + \mu_2 \cdot a'' + \mu_2} \cdot \frac{d\mu_2}{dt} \\ & = 2y'y'' A^{12} \left[\left(\frac{1}{a' + \mu_2} - \frac{1}{a'' + \mu_2} \right) + k(S' - S'') \left(\frac{1}{a' + \mu_2} + \frac{1}{a'' + \mu_2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Dabei sind μ_1, μ_2 die Parameter der confocalen Hyperboloide und k eine Constante

$$(7.) \quad k = \frac{a' - a''}{(a' - a'')\Sigma_0 + (a' + a'')(S'_0 - S''_0)},$$

während die übrigen Größen die schon erwähnten Bedeutungen beibehalten.

Die Gleichungen (7.) nehmen ohne Weiteres auch die Form an:

$$(8.) \quad \begin{cases} \mu - \mu_1 \cdot \mu - \mu_2 \cdot \frac{d\mu}{d\Omega} = (a + \mu)[(a'' - a')(1 - k\Sigma) + k(S' - S'')(a' + a'' + 2\mu)] \\ \mu_1 - \mu_2 \cdot \mu_1 - \mu \cdot \frac{d\mu_1}{d\Omega} = (a + \mu_1)[(a'' - a') + k(S' - S'')(a' + a'' + 2\mu_1)] \\ \mu_2 - \mu \cdot \mu_2 - \mu_1 \cdot \frac{d\mu_2}{d\Omega} = (a + \mu_2)[(a'' - a') + k(S' - S'')(a' + a'' + 2\mu_2)]. \end{cases}$$

Ich setze nun der Kürze wegen

$$(9.) \quad \begin{cases} (a'' - a')(1 - k\Sigma) + k(S' - S'')(a' + a'' + 2\mu) = N \\ (a'' - a') + k(S' - S'')(a' + a'') = p, \quad 2k(S' - S'') = q. \end{cases}$$

Dann gehen die Gleichungen (8.), indem man zugleich die beiden letzten durch die erste dividirt, in die folgenden über:

$$(10.) \quad \begin{cases} (\mu_2 - \mu_1) \frac{d\mu_1}{d\mu} (a + \mu) N = (a + \mu_1)(p + q\mu_1)(\mu - \mu_2) \\ (\mu_1 - \mu_2) \frac{d\mu_2}{d\mu} (a + \mu) N = (a + \mu_2)(p + q\mu_2)(\mu - \mu_1). \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen subtrahirt, oder dasselbe thut, nachdem man sie zuvor mit μ_2 und μ_1 multiplicirt hat, so erhält man zwei für $\mu_1 + \mu_2$ und $\mu_1\mu_2$ lineäre Gleichungen:

$$(11.) \quad \begin{cases} \frac{d(\mu_1 + \mu_2)}{d\mu} \cdot (a + \mu) N = -\{ap + \mu(aq + p)\} - \mu q(\mu_1 + \mu_2) + q\mu_1\mu_2 \\ \frac{d(\mu_1\mu_2)}{d\mu} \cdot (a + \mu) N = ap\mu - ap(\mu_1 + \mu_2) - (aq + p + q\mu)\mu_1\mu_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nun werden integrirt, indem man zunächst die erste mit a multiplicirt und zu der zweiten hinzufügt. Man erhält dann

$$(12.) \quad \frac{d.(a + \mu_1 \cdot a + \mu_2)}{d\mu} \cdot (a + \mu) N = -(\mu q + p) \cdot a + \mu_1 \cdot a + \mu_2$$

und durch Integration:

$$(13.) \quad a + \mu_1 \cdot a + \mu_2 = c \cdot e^{-\int \frac{\mu q + p}{N} \cdot \frac{d\mu}{a + \mu}}.$$

Dies ist das auch in der citirten Abhandlung gegebene Integral. Offenbar kann man aber nun entweder $\mu_1\mu_2$ durch $\mu_1 + \mu_2$ oder umgekehrt aus-

drücken, und erhält dann aus den Gleichungen (11.) lineare Differentialgleichungen mit je einer unbekanntem Gröfse; nämlich, wenn wir mit V den Ausdruck bezeichnen, welcher die rechte Seite der Gleichung (13.) bildet:

$$(14.) \quad \begin{cases} \frac{d \cdot \mu_1 + \mu_2}{d\mu} \cdot N + q(\mu_1 + \mu_2) = \frac{qV}{a + \mu} - (aq + p) \\ \frac{d \cdot \mu_1 \mu_2}{d\mu} \cdot N + q(\mu_1 \mu_2) = ap \left(1 - \frac{V}{a \cdot a + \mu} \right). \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$(15.) \quad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = e^{-\int \frac{qd\mu}{N}} \int e^{\int \frac{qd\mu}{N}} \left\{ \frac{qV}{a + \mu} - (aq + p) \right\} \frac{d\mu}{N} \\ \mu_1 \mu_2 = e^{-\int \frac{qd\mu}{N}} \int e^{\int \frac{qd\mu}{N}} \left\{ 1 - \frac{V}{a \cdot a + \mu} \right\} ap \cdot \frac{d\mu}{N} \end{cases}$$

wodurch das Problem auf Quadraturen zurückgeführt ist.

Berlin, den 26. Mai 1856.