23.

Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes.

(Von Herrn *Clebsch*.)

Hr. *Cayley* hat in den Philos. Transact. vom Jahre 1852 eine analytische Behandlung von *Steiner's* Ausdehnung des *Malfatti*schen Problems gegeben, und hat dort die Aufgabe

Zu drei, auf einer Oberfläche zweiter Ordnung gegebenen, ebenen Kurven, drei andere zu finden, welche sich unter einander berühren, und deren jede zugleich zwei der gegebenen Kurven berührt,

zurückgeführt auf ein System von Gleichungen, welches als specieller Fall in dem folgenden enthalten ist:

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha+\beta(y+z)+\gamma yz = \delta\sqrt{1+y^2.1+z^2} \\ \alpha'+\beta'(z+x)+\gamma' zx = \delta'\sqrt{1+z^2.1+x^2} \\ \alpha''+\beta''(x+y)+\gamma'' xy = \delta''\sqrt{1+x^2.1+y^2}. \end{cases}$$

Dies System von Gleichungen ist dort durch rein algebraische Betrachtungen gelöst, unter gewissen Bedingungen, welchen die Coefficienten genügen müssen; und so auch die algebraische Lösung der obigen Aufgabe vollständig gegeben.

Die Auflösung der Gleichungen (1.) läfst sich indefs auch aus einem andern Gesichtspunkte darstellen. Denn indem man jede der obigen Gleichungen mit der Form vergleicht, welche schon *Euler* für das Additionstheorem der elliptischen Funktionen gegeben hat, kann man die Gleichungen (1.) betrachten als die algebraischen Integrale von Gleichungen der Form

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{\sqrt{Y}}+\dfrac{dz}{\sqrt{Z}} = 0 \\ \dfrac{dz}{\sqrt{Z'}}+\dfrac{dx}{\sqrt{X'}} = 0 \\ \dfrac{dx}{\sqrt{X''}}+\dfrac{dy}{\sqrt{Y''}} = 0 \end{cases}$$

wo X', X'' ganze Funktionen vierten Grades von x sind, Y, Y'' von y, Z, Z'

von z. Und indem man diese Funktionen wirklich ausrechnet, findet man für die Gleichungen (2.) die folgenden:

$$0 = \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{(\delta^2-\beta^2-\alpha^2)-2\gamma(\alpha+\beta)y+(\delta^2-\gamma^2-\beta^2)y^2}}$$
$$+\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}\sqrt{(\delta^2-\beta^2-\alpha^2)-2\gamma(\alpha+\beta)z+(\delta^2-\gamma^2-\beta^2)z^2}}$$
etc.

Und um die Integrale dieser Gleichungen vergleichen zu können, mufs man unter den Wurzelzeichen bis auf einen constanten Faktor immer dieselbe Funktion haben, d. h. die Ausdrücke

$$(\delta^2-\beta^2-\alpha^2)-2\gamma(\alpha+\beta)u+(\delta^2-\gamma^2-\beta^2)u^2$$
$$(\delta'^2-\beta'^2-\alpha'^2)-2\gamma'(\alpha'+\beta')u+(\delta'^2-\gamma'^2-\beta'^2)u^2$$
$$(\delta''^2-\beta''^2-\alpha''^2)-2\gamma''(\alpha''+\beta'')u+(\delta''^2-\gamma''^2-\beta''^2)u^2$$

dürfen sich nur um constante Faktoren unterscheiden. Daher erhält man die Bedingungen

$$\delta^2-\beta^2-\alpha^2 : 2\gamma(\alpha+\beta) : \delta^2-\gamma^2-\beta^2$$
$$= \delta'^2-\beta'^2-\alpha'^2 : 2\gamma'(\alpha'+\beta') : \delta'^2-\gamma'^2-\beta'^2$$
$$= \delta''^2-\beta''^2-\alpha''^2 : 2\gamma''(\alpha''+\beta'') : \delta''^2-\gamma''^2-\beta''^2$$

für die Anwendbarkeit dieser Methode; und es sind dies genau die von Hrn. *Cayley* aufgestellten Bedingungen.

Man wird durch diese Betrachtung darauf geführt, das Problem nicht auf die Gleichungen (1.) zurückzuführen, sondern auf andere, welche sich an die *gewöhnliche* Form des Additionstheorems anschliefsen, wo man dann zugleich die Constanten, welche in die Integrale der Gleichungen (2.) eingehen, durch die Constanten des Problems bestimmt. Zu diesem Ende aber mufs ich die Behandlung der Aufgabe von Anfang an noch einmal kurz darstellen.

Für das *Malfatti*sche Problem selbst, wo man auf Kreisfunktionen geführt wird, hat schon Hr. Prof. *Schellbach* diesen Weg eingeschlagen und im 45sten Bande dieses Journals die sehr einfachen Resultate bekannt gemacht.

§. 1.

Die Bedingung dafs drei auf einer Oberfläche zweiter Ordnung

$$u = \sum_{i=1}^{i=4}\sum_{k=1}^{k=4} u_{ik}x_ix_k = 0$$

gegebene ebene Kurven einander berühren, erhält man leicht, indem man bemerkt, dafs jede Tangentenebene der Oberfläche:

$$P = p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4 = 0$$

der Gleichung genügen mufs

$$(3.)\qquad 0 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & p_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & p_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & p_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Denn sind nun die Ebenen der gegebenen Kurven

$$(4.)\qquad \begin{cases} C = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4 = 0 \\ C' = c_1'x_1+c_2'x_2+c_3'x_3+c_4'x_4 = 0 \\ C'' = c_1''x_1+c_2''x_2+c_3''x_3+c_4''x_4 = 0, \end{cases}$$

so müssen alle Tangentenebenen, welche durch den Schnittpunkt von C, C', C'' gehen, und welche also die Form haben

$$P = \lambda C+\lambda' C'+\lambda'' C'' = 0$$

einer Gleichung genügen

$$(5.)\qquad 0 = q^{00}\lambda^2+q^{11}\lambda'^2+q^{22}\lambda''^2+2q^{01}\lambda\lambda'+2q^{12}\lambda'\lambda''+2q^{20}\lambda''\lambda,$$

welche man erhält, indem in (3.)

$$p_i = \lambda c_i+\lambda' c_i'+\lambda'' c_i''$$

gesetzt wird. Sollen nun die Schnittkurven der C mit der Oberfläche einander berühren, so kann man durch die Schnittlinie zweier C nur immer *eine* Tangentenebene an die Oberfläche legen, d. h. nur je *eine* Ebene finden der Form

$$\lambda C+\lambda' C' = 0 \qquad \lambda' C'+\lambda'' C'' = 0 \qquad \lambda'' C''+\lambda C = 0$$

welche der Gleichung (5.) genügt. Also mufs diese Gleichung in ein vollständiges Quadrat übergehen, sobald *ein* λ verschwindet, d. h. es mufs sein

$$(6.)\qquad \begin{cases} q^{00}q^{11} = (q^{01})^2 \\ q^{11}q^{22} = (q^{12})^2 \\ q^{22}q^{00} = (q^{20})^2 \end{cases} \qquad \text{wo } q^{ik} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & c_1^i \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & c_2^i \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & c_3^i \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & c_4^i \\ c_1^k & c_2^k & c_3^k & c_4^k & 0 \end{vmatrix}.$$

Würde hiedurch die rechte Seite von Gleichung (5.) im ***Allgemeinen*** für die λ ein vollständiges Quadrat, so träte zu den Gleichungen (6.) noch diese hinzu:

$$q^{00}.q^{11}.q^{22} = q^{01}.q^{12}.q^{20} \qquad \text{oder}$$

$$\begin{vmatrix} q^{00} & q^{01} & q^{02} \\ q^{01} & q^{11} & q^{12} \\ q^{02} & q^{12} & q^{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man nun durch $\varDelta$ die Determinante von u, durch $\varDelta_{ik}$ ihre Differentialquotienten, so hat man auch

$$(7.) \qquad q^{ik} = \sum_{m=1}^{m=4} \sum_{n=1}^{n=4} \varDelta_{mn} c_m^i c_n^k$$

und dies in die letzte Gleichung eingesetzt, giebt derselben nach den bekannten Sätzen über die Multiplication der Determinanten, die Form

$$0 = \varDelta^3 . \sum_{m=1}^{m=4} \sum_{n=1}^{n=4} u_{mn} C_m C_n,$$

wo C_1, C_2, C_3, C_4 die Koordinaten des Schnittpunkts von C, C', C'' bedeuten. Verschwände hier $\varDelta$, so wäre die Oberfläche ein Kegel; verschwände der zweite Faktor, so rückte dieser Schnittpunkt in die Oberfläche. Indem man beide Fälle ausschliefst, kann man also den Gleichungen (6.) die Bestimmung hinzufügen

$$(8.) \qquad q^{00}.q^{11}.q^{22} + q^{01}.q^{12}.q^{20} = 0.$$

§. 2.

Sind in unsrer Aufgabe nun die gegebenen Ebenen $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, die gesuchten $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, und

$$(9.) \qquad \begin{cases} A^i = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + a_3^i x_3 + a_4^i x_4 \\ B^i = b_1^i x_1 + b_2^i x_2 + b_3^i x_3 + b_4^i x_4, \end{cases}$$

so giebt es unter diesen Ebenen 4 Systeme, welche sich verhalten sollen wie die C des vorigen Paragraphen, nämlich

1. $A\ B'\ B''$
2. $B\ A'\ B''$
3. $B\ B'\ A''$
4. $B\ B'\ B''$.

Für jedes dieser Systeme würden wir aus (6.) drei Gleichungen erhalten und aus (8.) eine Zeichenbestimmung. Man erhält so 12 Gleichungen, die sich indefs unmittelbar auf 9 reduziren und benutzt werden können, um die Verhältnisse der b zu bestimmen.

Um indefs absolute Bestimmungen zu erhalten, wollen wir die Gleichungen hinzufügen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}a_i^0a_k^0 = -1 & \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i^0b_k^0 = -1 \\ \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}a_i'a_k' = -1 & \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i'b_k' = -1 \\ \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}a_i''a_k'' = -1 & \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i''b_k'' = -1, \end{cases}$$

Annahmen, welche immer möglich sind, sobald nur keine der Ebenen A eine Berührungsebene der Oberfläche wird. So werden nunmehr alle q mit gleichen oberen Indices $= -1$, und die Gleichungen (6, 8.) geben das Schema:

$$(11.)\quad \begin{cases} q^{12} = \varepsilon \\ q^{20} = \varepsilon_1 \\ q^{01} = \varepsilon_2 \end{cases} \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon = 1$$

wo die ε ± 1 bedeuten.

Stellt man unter dieser Form jetzt die Bedingungen der Aufgabe wirklich hin, so erhält man:

$$(12.)\quad \begin{cases} \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i a_k' = -\varepsilon_0' & \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i' a_k = -\varepsilon_1^0 \\ \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i' a_k'' = -\varepsilon_1'' & \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i'' a_k' = -\varepsilon_2' \\ \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i'' a_k = -\varepsilon_2^0 & \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i a_k'' = -\varepsilon_0'' \\ \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i' b_k'' = \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 & \\ \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i'' b_k = \varepsilon_2'\varepsilon_0' & \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\varepsilon_2'\varepsilon_0'\varepsilon_0''\varepsilon_1'' = 1 \\ \Sigma\Sigma\varDelta_{ik}b_i b_k' = \varepsilon_0''\varepsilon_1'' & \end{cases}$$

wo wieder die ε die positive oder negative Einheit bezeichnen. Durch diese Gleichungen und die Gleichungen (10.) sind die b nun vollständig bestimmt.

§. 3.

Man führt leicht diese zwölf Gleichungen auf drei zurück, indem man sich eines Satzes über die Determinanten erinnert, welchen Hr. Prof. ***Hesse*** im 49sten Bande dieses Journals p. 252 gegeben hat, und welcher uns in einem speziellen Falle das folgende Lemma giebt.

„Multiplicirt man die symmetrische Determinante

$$P = \begin{vmatrix} \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{13} & \varDelta_{14} \\ \varDelta_{21} & \varDelta_{22} & \varDelta_{23} & \varDelta_{24} \\ \varDelta_{31} & \varDelta_{32} & \varDelta_{33} & \varDelta_{34} \\ \varDelta_{41} & \varDelta_{42} & \varDelta_{43} & \varDelta_{44} \end{vmatrix}$$

„mit dem Quadrat der Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1' & a_1'' & a_1''' \\ a_2^0 & a_2' & a_2'' & a_2''' \\ a_3^0 & a_3' & a_3'' & a_3''' \\ a_4^0 & a_4' & a_4'' & a_4''' \end{vmatrix},$$

„so entsteht wiederum eine symmetrische Determinante:

$$Q = \begin{vmatrix} D_{00} & D_{01} & D_{02} & D_{03} \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{20} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{30} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix},$$

„wo

$$(13.)\quad D_{pq} = \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} \Delta_{ik} a_i^p a_k^q.\text{“}$$

Lassen wir nun den Δ und a die Bedeutungen, welche ihnen im Vorigen beigelegt waren, und setzen nur

$$(14.)\quad a_i''' = \lambda b_i + \lambda' b_i' + \lambda'' b_i'',$$

so geht das Produkt $P.R^2$ in einen Ausdruck über, welcher in den λ sich als das Quadrat eines lineären darstellt. Dasselbe also mufs geschehen mit der Determinante Q; und ist dieselbe, nach den λ geordnet:

$$(15.)\quad Q = v_{00}\lambda^2 + v_{11}\lambda'^2 + v_{22}\lambda''^2 + 2v_{01}\lambda\lambda' + 2v_{12}\lambda'\lambda'' + 2v_{20}\lambda''\lambda,$$

so müssen die v den Gleichungen genügen:

$$(16.)\quad \begin{cases} v_{00}v_{11} = v_{01}^2 \\ v_{11}v_{22} = v_{12}^2 \\ v_{22}v_{00} = v_{20}^2 \end{cases} \qquad v_{00}v_{11}v_{22} = v_{01}v_{12}v_{20}.$$

Inzwischen werden in Folge der Gleichungen (10.), (13.) D_{00}, D_{11}, D_{22} sämmtlich $= -1$; und

$$D_{33} = -[\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 - 2\varepsilon_2^0\varepsilon_1^0\lambda'\lambda'' - 2\varepsilon_0'\varepsilon_2'\lambda''\lambda - 2\varepsilon_1''\varepsilon_0''\lambda\lambda'].$$

Setzen wir ferner

$$(17.)\quad \begin{cases} -\alpha = \Sigma\Sigma\Delta_{ik} a_i' a_k'' & -\varepsilon_0^0(1+y_0) = \Sigma\Sigma\Delta_{ik} a_i b_k \\ -\alpha_1 = \Sigma\Sigma\Delta_{ik} a_i'' a_k & -\varepsilon_1'(1+y_1) = \Sigma\Sigma\Delta_{ik} a_i' b_k' \\ -\alpha_2 = \Sigma\Sigma\Delta_{ik} a_i a_k' & -\varepsilon_2''(1+y_2) = \Sigma\Sigma\Delta_{ik} a_i'' b_k'' \end{cases}$$

wo die ε_i^i wieder ± 1 sein sollen und später ihre nähere Bestimmung finden mögen; so wird

$$\begin{array}{lll} D_{12} = -\alpha & & D_{03} = -\{\varepsilon_0^0\lambda(1+y_0)+\varepsilon_1^0\lambda'+\varepsilon_2^0\lambda''\} \\ D_{20} = -\alpha_1 & & D_{13} = -\{\varepsilon_0'\lambda+\varepsilon_1'\lambda'(1+y_1)+\varepsilon_2'\lambda''\} \\ D_{01} = -\alpha_2 & & D_{23} = -\{\varepsilon_0''\lambda+\varepsilon_1''\lambda''+\varepsilon_2''\lambda''(1+y_2)\}. \end{array}$$

Die Gleichungen (16.) enthalten also nun allein die y als unbekannte Gröfsen, da in den D andere nicht vorkommen, und genügen also zur Bestimmung derselben.

Bilden wir nun die Determinante Q, so können wir offenbar zunächst die negativen Zeichen sämmtlich auslassen. Ferner setze ich an die Stelle der λ die Gröfsen

$$\mu = \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\lambda \qquad \mu' = \varepsilon_2'\varepsilon_0'\lambda' \qquad \mu'' = \varepsilon_0''\varepsilon_1''\lambda'';$$

alsdann gehen die D_{03}, D_{13}, D_{23}, D_{33} über in:

$$\begin{array}{ll} D_{33} = -(\mu^2+\mu'^2+\mu''^2) & D_{03} = -\varepsilon_1^0\varepsilon_2'\varepsilon_0'\{-\mu(1+y_0)+\mu'+\mu''\} \\ \qquad +2(\mu\mu'+\mu'\mu''+\mu''\mu) & D_{13} = -\varepsilon_2'\varepsilon_0''\varepsilon_1''\{\mu-\mu'(1+y_1)+\mu''\} \\ & D_{23} = -\varepsilon_0''\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\{\mu+\mu'-\mu''(1+y_2)\}, \end{array}$$

sobald man setzt

$$(18.) \qquad -\varepsilon_0^0 = \varepsilon_2'\varepsilon_0\varepsilon_2^0 \qquad -\varepsilon_1' = \varepsilon_0''\varepsilon_1''\varepsilon_0' \qquad -\varepsilon_2'' = \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0\varepsilon_1''.$$

Endlich noch kann man bei der Bildung der Determinante die Horizontalreihen und Vertikalreihen resp. mit $\varepsilon_1^0\varepsilon_2'\varepsilon_0'$, $\varepsilon_2'\varepsilon_0''\varepsilon_1''$, $\varepsilon_0''\varepsilon_1^0\varepsilon_2^0$ multiplicirt denken. Alsdann erhält man

$$(19.) \qquad Q =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_2^0\varepsilon_2'\alpha_2 & \varepsilon_1''\varepsilon_1^0\alpha_1 & -\mu(1+y_0)+\mu'+\mu'' \\ \varepsilon_2^0\varepsilon_2'\alpha_2 & 1 & \varepsilon_0'\varepsilon_0''\alpha & \mu-\mu'(1+y_1)+\mu'' \\ \varepsilon_1''\varepsilon_1^0\alpha_1 & \varepsilon_0'\varepsilon_0''\alpha & 1 & \mu+\mu'-\mu''(1+y_2) \\ -\mu(1+y_0)+\mu'+\mu'', & \mu-\mu'(1+y_1)+\mu'', & \mu+\mu'-\mu''(1+y_2), & \mu^2+\mu'^2+\mu''^2-2\mu\mu'-2\mu\mu''-2\mu'\mu'' \end{vmatrix}$$

Dies lehrt zunächst, dafs man aus *einer* Lösung der Aufgabe, für welche etwa sämmtliche $\varepsilon = +1$ sein mögen, vier erhält, indem man an die Stelle von α, α_1, α_2 die Gröfsen $\varepsilon_0'\varepsilon_0''\alpha$ etc. setzt, d. h. statt der α dieselben Gröfsen mit verändertem Vorzeichen, doch so dafs das Produkt derselben ungeändert bleibt. Ich nehme daher der Einfachheit wegen die $\varepsilon = 1$ an, oder lasse sie in die α eingehen.

Wir müssen nun die v genauer untersuchen, und zwar können wir sie jetzt die Coefficienten der μ bedeuten lassen. Es ist

$$v_{00} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & -(1+y_0) \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & 1 \\ -(1+y_0) & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & -1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2y_0 \begin{vmatrix} \alpha_2 & 1 & \alpha \\ \alpha_1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y_0^2(\alpha^2-1)$$

$$v_{12} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & -(1+y_2) \\ 1 & -(1+y_1) & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha & 1 \\ \alpha_1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha & 1 \\ \alpha_2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + y_1 y_2 (\alpha - \alpha_1\alpha_2).$$

Wendet man in diesen Determinanten das gewöhnliche Mittel an sie zu vereinfachen, indem man die letzte Horizontalreihe zu den andern addirt oder abzieht, so erhält man:

$$(20.)\quad \begin{cases} v_{00} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_2+1 & \alpha_1+1 \\ \alpha_2+1 & 0 & \alpha-1 \\ \alpha_1+1 & \alpha-1 & 0 \end{vmatrix} + 2y_0 \begin{vmatrix} \alpha_2+\alpha & 1-\alpha \\ \alpha_1+1 & \alpha-1 \end{vmatrix} + y_0^2(\alpha^2-1) \\ \quad = (\alpha-1)\{2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) + 2y_0(\alpha+\alpha_1+\alpha_2+1) + y_0^2(\alpha+1)\}, \\ v_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & \alpha_2-1 & \alpha_1+1 \\ \alpha_2+1 & 0 & \alpha+1 \\ \alpha-1 & \alpha+1 & 0 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} 1+\alpha_1 & \alpha_1+1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha+1 \end{vmatrix} \\ \qquad + y_2 \begin{vmatrix} 1+\alpha_2 & \alpha_2+1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha+1 \end{vmatrix} + y_1 y_2(\alpha-\alpha_1\alpha_2) \\ \quad = \{2(\alpha+1)+y_1y_2\}(\alpha-\alpha_1\alpha_2) + \{(1+\alpha_1)y_1+(1+\alpha_2)y_2\}(\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2). \end{cases}$$

§. 4.

Diese Ausdrücke vereinfachen sich nun indem man sich, wie schon oben angedeutet, der elliptischen Funktionen bedient.

Setzt man zunächst

$$(21.)\qquad y_i = z_i \frac{\sqrt{2.\alpha+1.\alpha_1+1.\alpha_2+1}}{\alpha_i+1},$$

so gehen die Gleichungen (20.) über in

$$(22.)\qquad \begin{cases} v_{00} = 2.\alpha-1.\alpha_1+1.\alpha_2+1.\{1+z^2+2pz\} \\ v_{12} = 2.\alpha+1.\alpha-\alpha_1\alpha_2.\{1+z_1z_2+q_0(z_1+z_2)\} \end{cases}$$

wo

$$(23.)\qquad p = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha+1)}{\sqrt{2.\alpha+1.\alpha_1+1.\alpha_2+1}} \qquad q_0 = \frac{\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha-\alpha_1\alpha_2}.\sqrt{\frac{\alpha_1+1.\alpha_2+1}{2.\alpha+1}}.$$

Erinnert man sich jetzt der identischen Gleichung

$$1+xy+\delta(x+y) = \frac{1+\delta}{2}(1+x)(1+y)+\frac{1-\delta}{2}(1-x)(1-y),$$

so wird auch

$$(24.)\qquad \begin{cases} v_{00} = 2.\alpha-1.\alpha_1+1.\alpha_2+1.\left\{\frac{1+p}{2}(1+z)^2+\frac{1-p}{2}(1-z)^2\right\} \\ v_{12} = 2.\alpha+1.\alpha-\alpha_1\alpha_2.\left\{\frac{1+q_0}{2}(1+z_1)(1+z_2)+\frac{1-q_0}{2}(1-z_1)(1-z_2)\right\}. \end{cases}$$

Nun setze ich

$$(25.)\qquad \frac{1-z_i}{1+z_i} = \cos\mathrm{am}\,v_i \qquad \text{und} \qquad k^2 = \frac{1-p}{2} \qquad k_1^2 = \frac{1+p}{2}.$$

Alsdann gehen die zwischen den v bestehenden Gleichungen (16.) durch die Substitutionen

$$v_{00} = 2.\alpha-1.\alpha_1+1.\alpha_2+1.(1+z)^2.\Delta^2\mathrm{am}\,v$$

$$v_{12} = 2.\alpha+1.\alpha-\alpha_1\alpha_2.1+z_1.1+z_2\left\{\frac{1+q_0}{2}+\frac{1-q_0}{2}\cos\mathrm{am}\,v_1\cos\mathrm{am}\,v_2\right\}$$

in die folgenden über:

$$(26.)\qquad \begin{cases} \Delta^2\mathrm{am}\,v_1\,\Delta^2\mathrm{am}\,v_2 = \frac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2}{\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1}\left\{\frac{1+q_0}{2}+\frac{1-q_0}{2}\cos\mathrm{am}\,v_1\cos\mathrm{am}\,v_2\right\}^2 \\ \Delta^2\mathrm{am}\,v_2\,\Delta^2\mathrm{am}\,v = \frac{(\alpha_1-\alpha_2\alpha)^2}{\alpha_2^2-1.\alpha^2-1}\left\{\frac{1+q_1}{2}+\frac{1-q_1}{2}\cos\mathrm{am}\,v_2\cos\mathrm{am}\,v\right\}^2 \\ \Delta^2\mathrm{am}\,v\,\Delta^2\mathrm{am}\,v = \frac{(\alpha_2-\alpha\alpha_1)^2}{\alpha^2-1.\alpha_1^2-1}\left\{\frac{1+q_2}{2}+\frac{1-q_2}{2}\cos\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,v_1\right\}^2 \end{cases}$$

$$(26.)\qquad \Delta^2\operatorname{am}v_1\,\Delta^2\operatorname{am}v_2\,\Delta^2\operatorname{am}v$$
$$=\frac{\alpha-\alpha_1\alpha_2.\alpha_1-\alpha_2\alpha.\alpha_2-\alpha\alpha_1}{\alpha^2-1.\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1}.\left\{\frac{1+q_0}{2}+\frac{1-q_0}{1}\cos\operatorname{am}v_1\cos\operatorname{am}v_2\right\}$$
$$\times\left\{\frac{1+q_1}{2}+\frac{1-q_1}{2}\cos\operatorname{am}v_2\cos\operatorname{am}v\right\}\left\{\frac{1+q_2}{2}+\frac{1-q_2}{2}\cos\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}v_1\right\}.$$

Die ersten drei dieser Gleichungen nun erinnern unwillkürlich an die Form des Additionstheorems der elliptischen Funktionen, welche unter Anderm sich bei *Jacobi* Bd. XXXIX p. 325 d. J. und Opusc. Math. II. p. 171 findet:

$$\Delta\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}(u+v)=k_1^2+k^2\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}(u+v).$$

Damit die obigen Gleichungen aber mit dieser vollständig übereinstimmen, ist es nöthig nachzuweisen, dafs man setzen dürfe:

$$(27.)\quad\begin{cases}\dfrac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)}{\sqrt{\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1}}.\dfrac{1+q_0}{2}=\dfrac{k_1^2}{\Delta\operatorname{am}(u+v)}\\[2ex]\dfrac{\alpha-\alpha_1\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1}}.\dfrac{1-q_0}{2}=\dfrac{k^2\cos\operatorname{am}(u+v)}{\Delta\operatorname{am}(u+v)}\end{cases}$$

d. h. es mufs die identische Gleichung erfüllt sein, welche entsteht, wenn man diese beiden quadrirt, die erste mit $k^2=\frac{1-p}{2}$ multiplicirt, die zweite mit $k_1^2=\frac{1+p}{2}$, und sie dann addirt. So erhalten wir rechts $k^2k_1^2=\frac{1-p^2}{4}$, und

$$\frac{1-p^2}{4}=\frac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2}{\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1}\left\{\left(\frac{1+q_0}{2}\right)^2.\frac{1+p}{2}+\left(\frac{1-q_0}{2}\right)^2.\frac{1-p}{2}\right\}.$$

Führt man rechts die Quadrate in der Parenthese aus, so kommt

$$1-p^2=\frac{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2}{\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1}\{1+q_0^2+2q_0p\}$$

oder

$$\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1\left\{1-\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha+1)^2}{2.\alpha_1+1.\alpha_2+1.\alpha+1}\right\}$$
$$=(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2\left\{1+\frac{(\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2}.\frac{\alpha_1+1.\alpha_2+1}{2.\alpha+1}+\frac{(\alpha+1)^2-(\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha-\alpha_1\alpha_2}.\frac{1}{\alpha+1}\right\}.$$

Giebt man dieser Gleichung die Form

$$\alpha_1^2-1.\alpha_2^2-1-(\alpha-\alpha_1\alpha_2)^2$$
$$=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha+1)^2}{2.\alpha+1}.\alpha_1-1.\alpha_2-1+\frac{(\alpha+1-\alpha_1-\alpha_2)^2}{2.\alpha+1}.\alpha_1+1.\alpha_2+1$$
$$+\frac{(\alpha+1)^2-(\alpha_1+\alpha_2)^2}{\alpha+1}(\alpha-\alpha_1\alpha_2),$$

so sieht man leicht, dafs auf beiden Seiten die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 & \alpha \\ \alpha_1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

steht, dafs die obige Gleichung also wirklich eine identische ist, wie wir auch aus den im Anfange aufgestellten Prinzipien zu schliefsen berechtigt waren.

Setzen wir also, den Gleichungen (27.) entsprechend

$$(28.)\quad \frac{1-q_0}{1+q_0} = \cos\operatorname{am}\beta \qquad \frac{1-q_1}{1+q_1} = \cos\operatorname{am}\beta_1 \qquad \frac{1-q_2}{1+q_2} = \cos\operatorname{am}\beta_2,$$

so gehen die Gleichungen (26.) über in

$$(29.)\quad \begin{cases} k_1^2 + k^2 \cos\operatorname{am} v_1 \cos\operatorname{am} v_2 \cos\operatorname{am}\beta = (-1)^m \varDelta\operatorname{am} v_1 \varDelta\operatorname{am} v_2 \varDelta\operatorname{am}\beta \\ k_1^2 + k^2 \cos\operatorname{am} v_2 \cos\operatorname{am} v \cos\operatorname{am}\beta_1 = (-1)^{m_1} \varDelta\operatorname{am} v_2 \varDelta\operatorname{am} v \varDelta\operatorname{am}\beta_1 \\ k_1^2 + k^2 \cos\operatorname{am} v \cos\operatorname{am} v_1 \cos\operatorname{am}\beta_2 = (-1)^{m_2} \varDelta\operatorname{am} v \varDelta\operatorname{am} v_1 \varDelta\operatorname{am}\beta_2 \end{cases}$$

und die letzte Gleichung giebt

$$m + m_1 + m_2 = \text{gerade}.$$

Alsdann aber zeigt die Theorie der elliptischen Funktionen, dafs die Gröfsen v den Gleichungen genügen müssen:

$$(30.)\quad \begin{cases} v_1 + v_2 = \eta\beta + 2m(K+iK') + 4m'K \\ v_2 + v = \eta_1\beta_1 + 2m_1(K+iK') + 4m_1'K \\ v + v_1 = \eta_2\beta_2 + 2m_2(K+iK') + 4m_2'K \end{cases}$$

wo K, K' die gewöhnliche Bedeutung haben, die η ± 1 bedeuten, und die m, m' ganze Zahlen sind. Lösen wir die Gleichungen nach den v auf, und lassen die geraden Vielfachen von $K+iK'$ und $2K$ in den Werthen der v aus, da wir nur die cos am kennen wollen und diese hiedurch keine Veränderung erfahren, so erhalten wir

$$(31.)\quad \begin{cases} v = \dfrac{-\eta\beta + \eta_1\beta_1 + \eta_2\beta_2}{2} + 2mK \\[2ex] v_1 = \dfrac{\eta\beta - \eta_1\beta_1 + \eta_2\beta_2}{2} + 2mK \\[2ex] v_2 = \dfrac{\eta\beta + \eta_1\beta_1 - \eta_2\beta_2}{2} + 2mK \end{cases}$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet. Da übrigens das Zeichen der v beliebig ist, und keinen Einflufs auf $\cos\operatorname{am} v$ ausübt, so können wir *eins* der η willkürlich bestimmen, und haben so nur 8 wesentlich verschiedene Systeme der v.

§. 5.

Es bleibt nur übrig noch die b selbst zu bestimmen, nachdem wir durch die Gleichungen (21. 28. 31.) die y bestimmt haben. Setzen wir die Determinante

$$(32.)\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4$$

so dafs die A die Koordinaten des Schnittpunkts der drei gegebenen Ebenen bedeuten; so folgt aus der Gleichung, welche den Beginn des §. 3 bildete

$$PR^2 = v_{00}\mu^2 + v_{11}\mu'^2 + v_{22}\mu''^2 + 2v_{01}\mu\mu' + 2v_{12}\mu'\mu'' + 2v_{20}\mu''\mu$$

$$= \Delta^3 . \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 & a''_1 & b_1\lambda + b'_1\lambda' + b''_1\lambda'' \\ a_2 & a'_2 & a''_2 & b_2\lambda + b'_2\lambda' + b''_2\lambda'' \\ a_3 & a'_3 & a''_3 & b_3\lambda + b'_3\lambda' + b''_3\lambda'' \\ a_4 & a'_4 & a''_4 & b_4\lambda + b'_4\lambda' + b''_4\lambda'' \end{vmatrix}^2,$$

indem wir auf beiden Seiten die Coefficienten der λ vergleichen:

$$(33.)\quad \begin{cases} \{A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4\}^2 = \dfrac{v_{00}}{\Delta^3} \\ \{A_1 b'_1 + A_2 b'_2 + A_3 b'_3 + A_4 b'_4\}\{A_1 b''_1 + A_2 b''_2 + A_3 b''_3 + A_4 b''_4\} = \dfrac{\varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 v_{12}}{\Delta^3}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt

$$(34.)\quad A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 + A_4 b_4 = \zeta_0 \sqrt{\frac{v_{00}}{\Delta^3}},$$

wo $\zeta = \pm 1$. Da aber alsdann die zweite ergiebt

$$(34\,a.)\quad \zeta_1 \zeta_2 \sqrt{v_{11} v_{22}} = \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 v_{12},$$

so ist, wenn wir den Gröfsen $\sqrt{v_{00}}$ etc. eine feste Bedeutung beilegen von den ζ nur ein *einziges* willkürlich, so dafs es also nur zwei Systeme der ζ giebt. Man sieht, dafs an dieser Stelle zum letzten Male eine Zweideutigkeit entsteht, da von hier ab nur mit linearen Gleichungen zu operiren ist. Daher können wir schon die Anzahl der möglichen Lösungen angeben, welche auf 64 steigt.

Die Gleichung (34.) verbinden wir nun mit den Gleichungen

$$(35.)\quad \begin{cases} \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i\, a_k = -\varepsilon_0^0(1 + y_0) \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i\, a'_k = -\varepsilon'_0 \\ \Sigma\Sigma \Delta_{ik}\, b_i\, a''_k = -\varepsilon''_0. \end{cases}$$

So haben wir 4 lineare Gleichungen zur Bestimmung von b_1, b_2, b_3, b_4. Setzt man nun für den Augenblick

$$(36.)\qquad \omega_i = \Delta_{i1}b_1 + \Delta_{i2}b_2 + \Delta_{i3}b_3 + \Delta_{i4}b_4$$

und bezeichnet mit U den Ausdruck in welchen die Funktion u für die Koordinaten des Schnittpunkts der gegebenen Ebenen übergeht

$$(37.)\qquad U = \Sigma\Sigma u_{ik} A_i A_k,$$

so gehen die Gleichungen (34. 35.) in diese über:

$$(38.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\omega_1\frac{\partial U}{\partial A_1} + \omega_2\frac{\partial U}{\partial A_2} + \omega_3\frac{\partial U}{\partial A_3} + \omega_4\frac{\partial U}{\partial A_4}\right\} = \zeta_0\sqrt{\frac{v_{00}}{\Delta}} \\ \omega_1 a_1 + \omega_2 a_2 + \omega_3 a_3 + \omega_4 a_4 = -\varepsilon_0^0(1+y_0) \\ \omega_1 a_1' + \omega_2 a_2' + \omega_3 a_3' + \omega_4 a_4' = -\varepsilon_0' \\ \omega_1 a_1'' + \omega_2 a_2'' + \omega_3 a_3'' + \omega_4 a_4'' = -\varepsilon_0''. \end{cases}$$

Die Determinante dieses Systems ist U; ihr Differentialquotient nach dem Elemente $\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial A_i}$ ist A_i, und ihr Differentialquotient nach a_i^k ist der vollständige Differentialquotient $\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial a_i^k}$. Die Auflösung der Gleichungen giebt also:

$$(39.)\qquad U\omega_i = A_i\zeta_0\sqrt{\frac{v_{00}}{\Delta}} - \frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0^0(1+y_0)\frac{\partial U}{\partial a_i} + \varepsilon_0'\frac{\partial U}{\partial a_i'} + \varepsilon_0''\frac{\partial U}{\partial a_i''}\right\}.$$

Die Gleichung der Ebene B läfst sich in der Form darstellen:

$$2\Delta B = \omega_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + \omega_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \omega_3\frac{\partial u}{\partial x_3} + \omega_4\frac{\partial u}{\partial x_4}.$$

Führt man hier die Werthe der ω ein, und setzt

$$X = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta}}\left\{A_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + A_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + A_3\frac{\partial u}{\partial x_3} + A_4\frac{\partial u}{\partial x_4}\right\}$$

$$X^{(k)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=4}\frac{\partial U}{\partial a_i^k}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

so wird

$$\Delta.U.B = \zeta_0\sqrt{-v_{00}}.X - \{\varepsilon_0^0(1+y_0)X^0 + \varepsilon_0' X' + \varepsilon_0'' X''\}$$

oder indem man mit ε_0^0 multiplicirt:

$$\varepsilon_0^0.\Delta UB = \zeta_0\varepsilon_0^0\sqrt{-v_{00}}X + \{-(1+y_0)X^0 + \varepsilon_2'\varepsilon_2^0 X' + \varepsilon_1^0\varepsilon_1'' X''\}$$

$$\sqrt{-v_{00}} = \sqrt{2.1-\alpha.\alpha_1+1.\alpha_2+1}.\frac{2\Delta\,\mathrm{am}\,v_0}{1+\cos\mathrm{am}\,v_0}$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{2.\alpha_1+1.\alpha_2+1}{\alpha+1}\cdot\frac{1-\cos\mathrm{am}\,v_0}{1+\cos\mathrm{am}\,v_0}}.$$

In Betreff der ζ ist noch eine Bemerkung zu machen. Bei der für $\sqrt{-v_{00}}$ gewählten Bedeutung giebt die Gleichung (34 *a.*)

$$\zeta^0\zeta' = \varepsilon_0''\varepsilon_1'' \qquad \zeta'\zeta'' = \varepsilon_1^0\varepsilon_2^0 \qquad \zeta''\zeta^0 = \varepsilon_0'\varepsilon_0''.$$

Also

$$\zeta^0\varepsilon_0^0 : \zeta'\varepsilon_1' : \zeta''\varepsilon_2'' = \varepsilon_0'\varepsilon_0'' : \varepsilon_1^0\varepsilon_1'' : \varepsilon_2^0\varepsilon_2';$$

so dafs die Gleichungen der sämmtlichen gesuchten Ebenen folgende sind:

$$(40.)\quad \begin{cases} 0 = \zeta.\varepsilon_0'\varepsilon_0''\sqrt{-v_{00}}\,X + \{-(1+y_0)X^0 + \varepsilon_2'\varepsilon_2^0 X' + \varepsilon_1^0\varepsilon_1'' X''\} \\ 0 = \zeta.\varepsilon_1''\varepsilon_1^0\sqrt{-v_{11}}\,X + \{\varepsilon_2'\varepsilon_2^0 X^0 - (1+y_1)X' + \varepsilon_0''\varepsilon_0' X''\} \\ 0 = \zeta.\varepsilon_2^0\varepsilon_2'\sqrt{-v_{22}}\,X + \{\varepsilon_1^0\varepsilon_1'' X^0 + \varepsilon_0'\varepsilon_0'' X' - (1+y_2)X''\} \end{cases} \qquad \zeta = \pm 1.$$

Man sieht, dafs von den ε nur die Verbindungen $\varepsilon_0'\varepsilon_0''$, $\varepsilon_1^0\varepsilon_1''$, $\varepsilon_2^0\varepsilon_2'$ eingehen, welche auch in den y allein vorkommen. Dies würde also vier Gruppen von Lösungen geben, die verschiedenen Werthe der $\cos\operatorname{am} v$ acht, und die ζ zwei, so dafs man 64 Lösungen erhält.

§. 6.

Herr Prof. *Schellbach* hat eine Auflösung des vorliegenden Problems für den Fall einer Kugel bekannt gemacht, welche von drei Ebenen in gröfsten Kreisen geschnitten wird (45ster Band dieses Journals) und die dort gegebenen Formeln sind zunächst die Veranlassung zu der vorliegenden Untersuchung gewesen. Jene Formeln indefs lassen sich unmittelbar auf die allgemeine Aufgabe ausdehnen, bei welcher statt der Ebenen dreier gröfsten Kreise irgend andere gegeben sind. Sei die Gleichung der Kugel

$$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$$

und die Gleichungen der gegebenen und gesuchten Kreise

$$A^i \sin\vartheta^i = x_1\cos a_1^i + x_2\cos a_2^i + x_3\cos a_3^i - x_4\cos\vartheta^i = 0$$
$$\varepsilon_i^i B^i \sin\theta^i = x_1\cos b_1^i + x_2\cos b_2^i + x_3\cos b_3^i - x_4\cos\theta^i = 0.$$

Dann wird

$$(40\,a.)\quad \begin{cases} \alpha_i = \dfrac{\cos a_1^h\cos a_1^k + \cos a_2^h\cos a_2^k + \cos a_3^h\cos a_3^k - \cos\vartheta^h\cos\vartheta^k}{\sin\vartheta^h\sin\vartheta^k} \\ \quad = \dfrac{\cos V^i - \cos\vartheta^h\cos\vartheta^k}{\sin\vartheta^h\sin\vartheta^k} = \cos\delta^i, \end{cases}$$

wenn V^i die Seiten des von den gegebenen Kreismittelpunkten gebildeten sphärischen Dreiecks bedeuten, δ^i die Winkel, welche die von zwei Ecken dieses Dreiecks nach den Schnittpunkten ihrer Kreise gezogenen sphärischen Bogen mit einander bilden.

Nun denke man sich ein sphärisches Dreieck construirt, dessen Winkel Γ, Γ_1, Γ_2 und dessen Seiten g, g_1, g_2, welches dadurch bestimmt ist, dafs

$$(40\,b.)\qquad \cos\Gamma = -\varepsilon_0'\varepsilon_0''\cos\delta^0 \text{ etc.}$$

Die vier verschiedenen Dreiecke, welche den verschiedenen Systemen der ε entsprechen, werden durch dieselben gröfsten Kreise gebildet, und wenn man durch Γ, Γ_1, Γ_2, g, g_1, g_2 Winkel und Seiten *eines* derselben bezeichnet, so sind die der übrigen:

$$\begin{array}{cccccc}
\Gamma & \pi-\Gamma_1 & \pi-\Gamma_2 & g & \pi-g_1 & \pi-g_2 \\
\pi-\Gamma & \Gamma_1 & \pi-\Gamma_2 & \pi-g & g_1 & \pi-g_2 \\
\pi-\Gamma & \pi-\Gamma_1 & \Gamma_2 & \pi-g & \pi-g_1 & g_2.
\end{array}$$

Man hat sodann aus (27. 28.), nach bekannten Formeln:

$$(41.)\quad \begin{cases} \cos\operatorname{am}\beta_i = \dfrac{\sin\frac{\Gamma_h}{2}\sin\frac{\Gamma_k}{2}-\sin\frac{\Gamma_i}{2}}{\sin\frac{\Gamma_h}{2}\sin\frac{\Gamma_k}{2}+\sin\frac{\Gamma_i}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{s}{2}-g_i\right) \\[2ex] \Delta\operatorname{am}\beta_i = \dfrac{\cos\frac{\Gamma_h}{2}\cos\frac{\Gamma_k}{2}}{\sin\frac{\Gamma_h}{2}\sin\frac{\Gamma_k}{2}+\sin\frac{\Gamma_i}{2}} = \dfrac{\cos\frac{s}{2}}{\cos\left(\frac{s}{2}-g_i\right)} \end{cases}$$

$$2s = g_1+g_2+g$$

und

$$k^2 = \sin^2\frac{s}{2} \qquad k_1^2 = \cos^2\frac{s}{2},$$

so dafs der Modul durch den Umfang des construirten sphärischen Dreiecks unmittelbar gegeben ist.

Man kann sich nun durch die Analogie bestimmen lassen, drei Winkel α, α_1, α_2 zu suchen, welche die Bedingungen erfüllen:

$$(42.)\quad \begin{cases} \cos\operatorname{am}(\beta_h+\beta_k) = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\alpha_i \\[2ex] \Delta\operatorname{am}(\beta_h+\beta_k) = \dfrac{\cos\frac{s}{2}}{\cos\alpha_i}. \end{cases}$$

Dann sieht man aus dem oben angeführten Additionstheorem, dafs die α den Gleichungen genügen:

$$(43.)\quad 1 = \frac{\cos\alpha_i\cos\left(\frac{s}{2}-g_h\right)\cos\left(\frac{s}{2}-g_k\right)}{\cos\frac{s}{2}} - \frac{\sin\alpha_i\sin\left(\frac{s}{2}-g_h\right)\sin\left(\frac{s}{2}-g_k\right)}{\sin\frac{s}{2}}$$

und diejenigen Wurzeln dieser Gleichungen, welche nicht die Gleichungen (43.) erfüllen, genügen den folgenden:

$$(44.)\quad \begin{cases} \cos\operatorname{am}(\beta_h-\beta_k) = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\alpha'_i \\ \Delta\operatorname{am}(\beta_h-\beta_k) = \dfrac{\cos\frac{s}{2}}{\cos\alpha'_i}. \end{cases}$$

Bemerken wir nun die identischen Gleichungen

$$\cos^2\operatorname{am}\frac{u}{2} = \frac{k_1^2}{k^2}\cdot\frac{1-\Delta\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u-\cos\operatorname{am}u}$$

$$\Delta^2\operatorname{am}\frac{u}{2} = k_1^2\cdot\frac{1-\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u-\cos\operatorname{am}u},$$

welche man unter Anderm aus dem erwähnten Additionstheorem ohne Weiteres findet, so haben wir aus (41. 42. etc.)

$$\Delta^2\operatorname{am}\frac{\beta_i}{2} = \cos\frac{s}{2}\,\frac{\cos\frac{s-g_i}{2}}{\cos\frac{g_i}{2}}$$

$$\cos^2\operatorname{am}\frac{\beta_i}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{g_i}{2}$$

$$\sin^2\operatorname{am}\frac{\beta_i}{2} = \frac{\sin\frac{s-g_i}{2}}{\sin\frac{s}{2}\cos\frac{g_i}{2}}$$

und eben dieselben Formeln für $\frac{\beta_h+\beta_k}{2}$ und $\frac{\beta_h-\beta_k}{2}$, wo denn $\frac{s}{2}-\alpha_i$ und $\frac{s}{2}-\alpha'_i$ an die Stelle von g_i tritt.

Und indem man nun die Gleichungen Fundamenta p. 33 (10—12.) anwendet, wird

$$\Delta\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2}\;\Delta\operatorname{am}\frac{-\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2} = \cos\frac{s}{2}\,\frac{\cos\dfrac{g_i+\alpha_i-\frac{s}{2}}{2}}{\cos\dfrac{g_i-\alpha_i+\frac{s}{2}}{2}}$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2}\cos\operatorname{am}\frac{-\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{g_i-\alpha_i-\frac{s}{2}}{2}$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2}\cos\mathrm{am}\frac{-\beta_i+\beta_h+\beta_k}{2}=\frac{\sin\dfrac{g_i+\alpha_i-\frac{s}{2}}{2}}{\sin\frac{s}{2}\cos\dfrac{g_i-\alpha'_i-\frac{s}{2}}{2}}$$

$$\varDelta\,\mathrm{am}\frac{\beta_i+\beta_h-\beta_k}{2}\;\varDelta\,\mathrm{am}\frac{\beta_i-\beta_h+\beta_k}{2}=\cos\frac{s}{2}\,\frac{\cos\dfrac{g_i+\alpha'_i-\frac{s}{2}}{2}}{\cos\dfrac{g_i-\alpha'_i-\frac{s}{2}}{2}}$$

$$\cos\mathrm{am}\frac{\beta_i+\beta_h-\beta_k}{2}\cos\mathrm{am}\frac{\beta_i-\beta_h+\beta_k}{2}=\mathrm{ctg}\frac{s}{2}\,\mathrm{tg}\frac{g-\alpha'_i-\frac{s}{2}}{2}$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{\beta_i+\beta_h-\beta_k}{2}\cos\mathrm{am}\frac{\beta_i-\beta_h+\beta_k}{2}=-\frac{\sin\dfrac{g_i+\alpha'_i-\frac{s}{2}}{2}}{\sin\frac{s}{2}\cos\dfrac{g_i-\alpha'_i-\frac{s}{2}}{2}}.$$

Diese Formeln, zusammen mit (43.) bilden die Verallgemeinerung der von Herrn Prof. *Schellbach* a. a. O. gegebenen, und sind genau mit denselben identisch. Auch sind dieselben natürlich für den oben ganz allgemein behandelten Fall gültig, wenn nur die *I' g* aus den Gleichungen (40 *a.* 40 *b.*) bestimmt werden; und sie dienen so gewissermafsen zur Umgehung der elliptischen Funktionen.

Berlin den 9. Dezember 1855.