Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0030
LOG Titel: Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

26.

Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie.

(Tirée des manuscrits inédits de *C. G. J. Jacobi* et communiquée par M. *E. Luther.*) *)

Le problème dont je vais traiter est le suivant:

Étant connues la longueur s d'un arc géodésique, la latitude B' de son origine et son angle azimuthal T' à ce point, déterminer la latitude B'' de l'autre extrémité de l'arc, son angle azimuthal T'' à ce second point et la différence en longitude de ces deux extrémités.

En appliquant à ce problème les séries dans lesquelles j'ai développé les fonctions elliptiques on en trouve une nouvelle solution très simple, que voici.

L'excentricité du méridien terrestre étant désigné par e, on calculera d'abord la latitude réduite l' de l'origine de la ligne géodésique au moyen de la formule

$$\operatorname{tg} l' = \sqrt{(1-e^2)}\operatorname{tg} B'.$$

On imaginera ensuite un triangle sphérique rectangle $PO'O$ dont l'hypoténuse soit $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et l'un des angles aigus $PO'O = T'$. On sait que, si l'on mène du point P à un point quelconque O'' du côté OO' de ce triangle, prolongé au besoin, un arc de grand cercle PO'', on aura toujours PO'' et $PO''O$ respectivement égaux au complément de la latitude réduite d'un certain point de la ligne géodésique et à l'angle azimuthal de cette ligne au même point. Supposons que le point O'' soit l'autre extrémité de l'arc s, la marche que suivra notre solution, sera la suivante.

1. On déterminera la correction $\Delta \lg s$ à ajouter au logarithme de l'arc géodésique s pour avoir le logarithme de l'arc de grand cercle $O'O''$;
2. On calculera dans le triangle sphérique $PO'O''$, dont on connait deux côtés $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ et $O'O''$ et l'angle compris $PO'O'' = \pi - T'$, le

---

*) Dieser Aufsatz *Jacobi's* sowie der darauf folgende des Herrn *E. Luther* sind bereits in den Astronomischen Nachrichten Bd. 41 pag. 210 und Bd. 42 pag. 338 abgedruckt worden.

troisième côté $PO'' = \frac{\pi}{2} - l''$, l'angle $PO''O' = T''$ et l'angle $O'PO''$, que je nommerai ω. On choisira pour ce calcul des formules propres à donner les valeurs de $\lg(l' - l'')$, $\lg(T' - T'')$, $\lg\omega$ exactes dans les septièmes décimales;

3. On cherchera la correction $\varDelta\omega$ à soustraire de ω pour avoir la différence en longitude que je nommerai λ;
4. On remontera de la différence des latitudes réduites $l' - l''$ à la différence des latitudes $B' - B''$.

Les calculs du No. 2 sont ceux qu'on employerait (avec des données différentes) dans l'hypothèse de la Terre sphérique. Ce sont les seuls calculs dans lesquels il faudrait pour quelques logarithmes employer des tables à 7 décimales. Tout le reste du calcul n'exige que l'emploi de tables à 5 décimales.

Je vais donner à présent les formules par lesquelles on calcule les corrections $\varDelta\lg s$ et $\varDelta\omega$, et dans lesquelles les logarithmes sont les logarithmes vulgaires.

1. Dans le triangle rectangle $PO'O$, dans lequel on connait

$$PO' = \frac{\pi}{2} - l', \qquad PO'O = T',$$

on calculera au moyen des formules

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi' &= \operatorname{cotg} l' \cos T' \\ \cos l &= \cos l' \sin T' \\ \operatorname{tg} l &= \frac{\operatorname{tg} l'}{\cos\varphi' \sin T'}, \end{aligned}$$

dont la dernière donne une vérification des deux autres, les quantités:

$$OO' = \varphi', \qquad PO = \frac{\pi}{2} - l,$$

et ensuite $\sin B$ au moyen de la valeur

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{(1-e^2)}}, \qquad \{\lg\sqrt{(1-e^2)} = 9{,}9985458\}$$

enfin

$$\lg q = \lg(a \sin^2 B) + b \sin^2 B + c \sin^4 B,$$

où

$$\lg a = 6{,}620290, \qquad \lg b = 7{,}16116, \qquad \lg c = 4{,}594.$$

2. En désignant par s l'arc mesuré divisé par le rayon de l'équateur terrestre et exprimé en secondes, on calculera

$$\lg\varphi^0 = \lg s + d - fq\cos^2\varphi'$$

$$\lg\varphi = \lg O'O'' = \lg\varphi^0 + gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 - hq^2\sin^2 2\varphi' + iq\cos 2\varphi'.\varphi^{0\,2}$$

où

$$d = 0{,}0014542, \qquad \lg f = 0{,}54087$$

$$\lg g = 4{,}92541, \qquad \lg h = 0{,}842, \qquad \lg i = 6{,}43$$

(i est exprimé en unités de la 7ième décimale).

C'est cette valeur de $\lg\varphi$ qu'il faudra connaitre pour effectuer le calcul du triangle sphèrique $PO'O''$, dans lequel φ est le côté $O'O''$. On voit que cette valeur s'obtient en ajoutant une correction à $\lg s$. L'angle φ est donné ici en secondes.

3. La valeur de $\lg\Delta\omega$ se compose de quantités connues déjà par les calculs précédents. En effet nommant C et D les quantités déjà calculées,

$$C = fq\cos^2\varphi', \qquad D = gq\sin 2\varphi'.\varphi^0$$

on aura

$$\lg\Delta\omega = \lg(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D.$$

Ayant trouvé par cette formule $\Delta\omega$ en secondes, on a la différence en longitude,

$$\lambda = \omega - \Delta\omega.$$

4. Connaissant par le calcul du triangle $PO'O''$ la différence des latitudes réduites $l' - l'' = PO'' - PO'$, on aura la différence des latitudes sur la Terre,

$$B' - B'' = l' - l'' + k\sin(l' - l'')\cos(l' + l'') + n\sin 2(l' - l'')\cos 2(l' + l''),$$

où

$$\lg k = 2{,}83926, \qquad \lg n = 9{,}7620.$$

Le problème dont je viens de donner une solution nouvelle a été dans ces derniers temps l'objet de soins particuliers de la part de M. *Gauss*, qui en a traité dans différents mémoires et en a donné plusieurs solutions. Mon illustre ami, M. *Hansen*, a calculé par les formules précédentes l'exemple qui sert à M. *Gauss* pour éclaircir la dernière de ses solutions (Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, zweite Abhandlung, Göttingen 1847 p. 33). Je mettrai ici avec détail la partie de ce calcul qui se rapporte aux corrections dues à l'ellipticité du sphéroide terrestre.

Exemple.

$$\lg s = 3{,}5349945 \qquad B' = 51^0\,48'\,1''9294 \qquad T' = 5^0\,42'21''7699$$
$$\lg\operatorname{tg} B' = 0{,}1040765 \quad \lg\cos T' = 9{,}9978428 \quad \lg\sin T' = 8{,}9974946$$
$$l' = 51^0\,42'\,26''16 \qquad \varphi' = 38^0\,9'\,19''$$
$$\lg\cos\varphi' = 8{,}89562 \qquad \lg\sin 2\varphi' = 9{,}98748 \qquad \lg\cos 2\varphi' = 9{,}37$$
$$\lg\operatorname{tg} l = 1{,}20950 \qquad \lg\cos l = 8{,}78968$$
$$\lg\operatorname{tg} B = 1{,}21095 \qquad \lg\sin B = 9{,}99918$$

$$\begin{array}{rl} \lg(a\sin^2 B) = & 6{,}61865 \\ b\sin^2 B = & 0{,}001444 \\ c\sin^4 B = & 4 \\ \hline \lg q = & 6{,}62010 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lg s = & 3{,}5349945 \\ d = & 0{,}0014542 \\ -fq\cos^2\varphi' = & -0{,}0008958 = -C \\ \hline \lg\varphi^0 = & 3{,}5355529 \\ gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 = & 0{,}00001171 = D \\ -hq^2\sin^2 2\varphi' = & -0{,}00000114 \\ iq\cos 2\varphi'.\varphi^{02} = & 3 \\ \hline \lg\varphi = \lg O'O'' = & 3{,}5355635 \end{array}$$

Le calcul du triangle $PO'O''$ donne:

$$T' - T'' = 7'\ 0''5884 \qquad \omega = 8'\,59''4065$$
$$l' - l'' = 56'\,55''4716 \qquad l' + l'' = 102^0\,27'\,57''$$

$$\begin{array}{rl} \lg(\varphi\cos l) = & 2{,}32524 \\ & 7{,}52410 \\ -\frac{1}{2}C = & -0{,}000448 \\ \frac{1}{2}D = & 6 \\ \hline \lg\varDelta\omega = & 9{,}84890 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} l' - l'' = & 56'55''4716 \\ k\sin(l'-l'')\cos(l'+l'') = - & 2''4685 \\ n\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l'') = - & 174 \\ \hline B' - B'' = & 56'52''9857 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \varDelta\omega = & 0''7062 \\ \lambda = \omega - \varDelta\omega = & 8'58''7003 \\ T'' = T' - (T' - T'') = & 5^0 35'21''1815 \\ B'' = B' - (B' - B'') = & 50^0 51'\ 8''9437. \end{array}$$

M. *Gauss* trouve:

$$\begin{array}{rl} \lambda = & 8'58''7002 \\ T'' = & 5^0 35'21''1815 \\ B'' = & 50^0 51'\ 8''9444. \end{array}$$

* * *

Supposons qu'en partant des mêmes données B', T', s on ait calculé les valeurs de B'', T'', λ dans l'hypothèse de la Terre purement sphérique et nommons ces valeurs B''_0, T''_0, λ_0. Il sera curieux et utile de connaitre des formules approximatives simples qui puissent servir à estimer la grandeur des quantités

$$B''-B''_0, \qquad T''-T''_0, \qquad \lambda-\lambda_0$$

ou l'influence que l'ellipticité du sphéroide terrestre exerce sur la détermination de B'', T'', λ. Ces formules sont:

$$B''-B''_0 = -\tfrac{1}{4}\sin 2B'.e^2$$

$$T''-T''_0 = -\tfrac{1}{2}\frac{\sin^3 B'}{\cos B'}\sin T'.e^2 s$$

$$\lambda-\lambda_0 = -\tfrac{1}{2}\frac{2\cos^2 B'-\sin^2 B'}{\cos B'}\sin T'.e^2 s.$$

La dernière de ces quantités s'évanouit pour une latitude d'environ $54^0 44'$.

* * *

En finissant je réunirai les formules par lesquelles on exprime toutes les quantités relatives à une même ligne géodésique au moyen des fonctions elliptiques Θ et H, auxquelles on a joint les fonctions

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u), \qquad H_1(u) = H(K-u).$$

Au lieu des deux constantes qui entrent dans la détermination d'une ligne géodésique, de l'excentricité e et de la latitude B du point où la ligne touche le parallèle, on introduit le module k des fonctions elliptiques (ou son complément k') et un argument constant a, au moyen des formules

$$e = \frac{k}{\Delta \operatorname{am}(a, k')}, \qquad \cos B = k' \sin\operatorname{am}(a, k')$$

ou

$$e = \sqrt{k}\cdot\frac{H_1(ia)}{\Theta_1(ia)}, \qquad \sqrt{(1-e^2)} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(ia)}$$

$$\sin B = \sqrt{k}\cdot\frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \cos B = \sqrt{k'}\cdot\frac{H(ia)}{iH_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\frac{i\Theta_1(ia)}{H(ia)},$$

i étant $=\sqrt{-1}$. On aura encore pour la latitude réduite l du point où la ligne touche le parallèle

$$\cos l = \sin\operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{\sqrt{k'}}\frac{H(ia)}{iH_1(ia)}$$

$$\sin l = \sqrt{\frac{k}{k'}}\frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}, \qquad \operatorname{tg} l = \sqrt{k}\cdot\frac{i\Theta(ia)}{H(ia)}.$$

Mettant pour un point quelconque de la ligne géodésique

$$\varphi' = \operatorname{am}(u),$$

et supposant

$$N = \sqrt{\{H(u+ia).H(u-ia)\}},$$

il viendra

$$\sin T' = \frac{H(ia)}{i\Theta(o)}\cdot\frac{\Theta(u)}{N}, \quad \cos T' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta(o)}\cdot\frac{H(u)}{N}, \quad \operatorname{tg} T' = \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)}\cdot\frac{\Theta(u)}{H(u)}$$

$$\sin l' = \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}, \quad \cos l' = \frac{\Theta_1(o)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{tg} l' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}$$

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)}{H_1(ia)}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta_1(u)}, \quad \cos B' = \frac{\Theta(o)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta_1(u)}, \quad \operatorname{tg} B' = \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}.$$

Pour exprimer toutes les quantités relatives au triangle sphérique rectangle POO' par les fonctions Θ, H, Θ_1, H_1, mettons

$$O'PO = \omega',$$

on aura

$$\sin\omega' = \frac{H_1(ia)}{H_1(o)}\cdot\frac{H(u)}{N}, \quad \cos\omega' = \frac{H(ia)}{iH_1(o)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}, \quad \operatorname{tg}\omega' = \frac{iH_1(ia).H(u)}{H(ia).H_1(u)}.$$

Supposons qu'on eût construit le triangle POO', en prenant pour $\frac{\pi}{2} - PO'$ la vraie latitude B' au lieu de la latitude réduite l'. Nommant l_0, φ'_0, ω'_0 les valeurs que dans ce cas prendraient les quantités l, φ', ω', on aura

$$\cos l_0 = \frac{H(ia).\Theta(u)}{iH_1(ia).\Theta_1(u)}, \quad \operatorname{tg}\varphi'_0 = \frac{\Theta(ia).H(u)}{\Theta_1(ia).H_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\omega'_0 = \frac{i\Theta(ia)H_1(ia)}{\Theta_1(ia)H(ia)}\cdot\frac{H(u)\Theta_1(u)}{\Theta(u)H_1(u)}.$$

Cette dernière formule peut être simplifiée en introduisant un module transformé.

Enfin, nommant λ' la longitude du point auquel répond la valeur $\varphi' = \operatorname{am}(u)$, cette longitude étant rapportée au méridien qui passe par le point où la ligne géodésique touche le parallèle, on aura, en supposant

$$\nu = \frac{d\lg\Theta_1(ia)}{da},$$

les formules rémarquables

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)H_1(u)}{H_1(ia)\Theta_1(u)}$$

$$\cos B'\sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(o)\cdot\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\Theta_1(u)}$$

$$\cos B'\cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(o)\cdot\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\Theta_1(u)}$$

et de plus

$$\sin l' = \frac{\Theta(ia)H_1(u)}{H_1(ia)\,\Theta(u)}$$

$$\cos l' \sin(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(o)\cdot\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_1(ia)\,\Theta(u)}$$

$$\cos l' \cos(\lambda' + \nu u) = \frac{\Theta_1(o)\cdot\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_1(ia)\,\Theta(u)}.$$

Berlin, 1849 Nov. 7.