27.

C. G. J. Jacobi's Ableitung der in seinem Aufsatze: „Solution nouvelle d'un problème fondamental de Géodésie" enthaltenen Formeln.

(Mitgetheilt von Herrn *E. Luther*.)

In Vorstehendem habe ich einen Aufsatz *Jacobi's* mitgetheilt, welcher eine neue Lösung einer Fundamental-Aufgabe der Geodäsie und neue geodätische Formeln enthält. Aus den mir von Herrn Professor *Lejeune-Dirichlet* gütigst anvertrauten Manuscripten *Jacobi's* ist es mir gelungen des Verfassers Ableitung seiner Auflösung und seiner Formeln herzustellen. Dieselbe ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung.

Die schon von den bedeutendsten Geometern und Astronomen behandelte Aufgabe, von welcher *Jacobi* eine neue Lösung gegeben hat, ist folgende:

„Wenn die Länge eines geodätischen Bogens s, die Breite B' seines Anfangspunktes und das Azimuth T' dieses Punktes gegeben sind, die Breite B'' und das Azimuth T'' seines Endpunktes, so wie den Längenunterschied λ beider Punkte zu finden."

Die von *Legendre* (Analyse des triangles, tracés sur la surface d'un sphéroïde, Mémoires de l'Institut, premier semestre de 1806) aufgestellten transcendenten Formeln, welche die Auflösung dieser Aufgabe enthalten, sind bekannt. Indem *Jacobi* in diese Formeln statt der elliptischen Integrale die elliptischen Functionen einführte und auf diese die in den „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" enthaltenen Reihen-Entwickelungen anwendete, gelangte er in nachfolgender Weise zu seiner Auflösung dieser Aufgabe.

Wenn man die Abplattung der Erde mit $1-\sqrt{1-ee}$ bezeichnet, so dafs also nach *Bessel's* letzten Bestimmungen $\lg e = 8.9122052079$ ist, so erhält man aus der Breite B' die reducirte Breite l' durch die Formel:

$$\operatorname{tg} l' = \sqrt{1-ee}.\operatorname{tg} B'.$$

Stellt man sich nun einen sphärischen rechtwinkeligen Triangle POO' vor, dessen Hypotenuse $PO' = \frac{\pi}{2} - l'$ und in dem der spitze Winkel $PO'O = T'$ ist, so ist aus *Legendre's* Untersuchungen bekannt, dafs, wenn man auf dem gröfsten Kreis OO' einen zweiten Punkt O'' annimmt und durch denselben den gröfsten Kreis PO'' legt, das Complement dieses Bogens PO'' und der Winkel $PO''O$ respective als die reducirte Breite l'' eines andern Punktes der geodätischen Linie und als das Azimuth T'' dieser Linie in demselben Punkte angesehen werden können. Die Kenntnifs des Bogens $O'O''$ genügt daher, um durch Berechnung des sphärischen Triangels $PO'O''$ die Gröfsen l'' und T'' kennen zu lernen.

Die Gröfse $O'O''$ läfst sich aus dem gemessenen Bogen s der geodätischen Linie auf folgende Art bestimmen. Es sei $PO = \frac{\pi}{2} - l$ und $OO' = \varphi'$, so lassen sich l und φ' durch die Formeln

$$\cos l' \sin T' = \cos l$$

und

$$\operatorname{cotg} l' \cos T' = \operatorname{tg} \varphi'$$

berechnen. Setzt man nun $OO'' = \varphi''$, so ist der gesuchte Bogen

$$O'O'' = \varphi'' - \varphi',$$

welche Gröfse durch Auflösung der transcendenten Gleichung:

$$s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi . \sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 l \cos^2 \varphi}$$

(*Legendre* Exercices, tome I pag. 180) erhalten wird, die sich, wenn man

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-e^2}} = \operatorname{tg} B \quad \text{und} \quad e \sin B = k$$

setzt, auf die Form

$$\frac{\sin B}{\sin l} s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} d\varphi . \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

bringen läfst, wo k eine bekannte Gröfse und immer kleiner als e ist. In diese Gleichung, welche auch

$$\frac{\sin B}{\sin l} s = \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k^2 . \int_{\varphi'}^{\varphi''} \frac{\sin^2 \varphi . d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

geschrieben werden kann, führe man

$$\frac{\pi}{2K} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = x,$$

wo K das ganze elliptische Integral der ersten Gattung bezeichnet, als Variabele ein, und bezeichne

$$\frac{\pi}{2K}\int_0^{\varphi'}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ durch } x'$$

und

$$\frac{\pi}{2K}\int_0^{\varphi''}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ durch } x'',$$

so dafs also

$$\varphi' = \operatorname{am}\frac{2Kx'}{\pi} \quad\text{und}\quad \varphi'' = \operatorname{am}\frac{2Kx''}{\pi} \text{ ist.}$$

Dadurch erhält man:

$$\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}(x''-x') - k^2\frac{2K}{\pi}\int_{x'}^{x''}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}.dx$$

oder, wenn man die Fund. pag. 133 §. 47 gegebene Formel anwendet,

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{2K}{\pi}\dfrac{\sin B}{\sin l}s = \dfrac{2K}{\pi}.\dfrac{2E}{\pi}(x''-x') + 4\left\{\dfrac{q\sin 2x''}{1-q^2}+\dfrac{q^2\sin 4x''}{1-q^4}+\cdots\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -4\left\{\dfrac{q\sin 2x'}{1-q^2}+\dfrac{q^2\sin 4x'}{1-q^4}+\cdots\right\} \end{cases}$$

wo E das vollständige elliptische Integral der zweiten Gattung bezeichnet. Die Function q wird durch die Gleichung (Fund., pag. 104 Formel 14)

$$\lg k = \lg 4\sqrt{q} - 4q + 6q^2 - \tfrac{16}{3}q^3 + \cdots$$

definirt, aus welcher man

$$\lg q = \lg\frac{k^2}{16} + 8q - 12q^2 + \tfrac{32}{3}q^3 - \cdots$$

und ferner

$$\lg q = \lg\frac{k^2}{16} + \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{13}{64}k^4 + \tfrac{23}{192}k^6 + \cdots$$

erhält. Zur Berechnung des *Brigg*ischen Logarithmus von q hat man demnach die Gleichung:

$$\lg\operatorname{vulg} q = \lg\operatorname{vulg}\frac{e^2\sin^2 B}{16} + \tfrac{1}{2}Ae^2\sin^2 B + \tfrac{13}{64}Ae^4\sin^4 B + \tfrac{23}{192}Ae^6\sin^6 B,$$

wo A den Modul des *Brigg*ischen Systems bezeichnet, oder

$$\lg\operatorname{vulg} q = \lg\operatorname{vulg}(a\sin^2 B) + b\sin^2 B + c\sin^4 B,$$

wenn

$$\lg a = 6{,}620290, \quad \lg b = 7{,}16116, \quad \lg c = 4{,}594 \text{ ist.}$$

Vernachlässigt man in der Gleichung (1.) die dritten und höheren Potenzen von q und bezeichnet $x''-x'$ durch x und $\frac{1}{2}(x''+x')$ durch X, so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}x + 8q\sin x\cos 2X + 8q^2\sin 2x\cos 4X$$

und, wenn man berücksichtigt, dafs für einen gemessenen Bogen x eine kleine Gröfse sein wird,

$$(2.)\quad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = x\left\{\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X + 16q^2\cos 4X\right\}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 110 und 111:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 8\left\{\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \cdots\right\}$$
$$= 8\Sigma\varphi(p)\{q^p + 2q^{2p} + 4q^{4p} + 8q^{8p} + \cdots\}$$

und nach Fund. pag. 106 Formel 34:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\Sigma\varphi(p)\{q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + \cdots\},$$

wo p die ungeraden Zahlen und $\varphi(p)$ die Summe der Factoren von p bezeichnet. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich durch Subtraction:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8\Sigma\varphi(p)\{q^{2p} - q^{4p} - 5q^{8p} - \cdots\}$$
$$= 1 + 8q^2 - 8q^4 + 32q^6 - \cdots$$

und, wenn man nur die beiden *ersten* Glieder berücksichtigt, (in den 12 ersten Decimalstellen genau)

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8q^2.$$

Substituirt man diese Formel in die Gleichung (2.), so erhält man:

$$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s = x\{1 + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X + 8q^2 + 16q^2\cos 4X\},$$

aus welcher mit derselben Annäherung folgt:

$$\lg\left(\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin B}{\sin l}s\right) = \lg x + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X - 8q^2.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung

$$\lg\frac{2K}{\pi} = 4q - 4q^2$$

(Fund. pag. 105 Formel 16), so erhält man:

$$(3.)\quad \lg\left(\frac{\sin B}{\sin l}s\right) = \lg x - 4q + 8q\cos 2X - \tfrac{4}{3}qx^2\cos 2X - 4q^2.$$

Da $\sin B = \frac{k}{e}$, so ist $\operatorname{tg}^2 B = \frac{k^2}{e^2-k^2}$, also $\operatorname{tg}^2 l = \frac{k^2(1-e^2)}{e^2-k^2}$ und folglich $\sin^2 l = \frac{k^2(1-e^2)}{e^2(1-k^2)}$. Mithin ist $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 l} = \frac{1-k^2}{1-e^2}$, woraus folgt:

$$\lg \frac{\sin B}{\sin l} = \lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \lg \sqrt{1-k^2}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 104 Formel 15:

$$\lg \sqrt{1-k^2} = -8q - \tfrac{32}{3} q^3$$

also

$$\lg \frac{\sin B}{\sin l} = \lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} - 8q - \tfrac{32}{3} q^3.$$

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (3.), indem man $\lg \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ durch ε bezeichnet, so erhält man:

$$\lg s = \lg x - \varepsilon + 4q + 8q \cos 2X - \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X - 4q^2$$

oder

$$(4.) \quad \lg x = \lg s + \varepsilon - 4q - 8q \cos 2X + \tfrac{4}{3} q x^2 \cos 2X + 4q^2.$$

Nach Fund. pag. 102 Formel 24 ist:

$$\varphi' = \operatorname{am} \frac{2Kx'}{\pi} = x' + \frac{2q \sin 2x'}{1+q^2} + \frac{2q^2 \sin 4x'}{2(1+q^4)} + \cdots$$

oder, wenn man die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt,

$$\varphi' = x' + 2q \sin 2x' + q^2 \sin 4x'.$$

Ebenso erhält man:

$$\varphi'' = x'' + 2q \sin 2x'' + q^2 \sin 4x''$$

und folglich:

$$\varphi'' - \varphi' = x'' - x' + 4q \sin(x''-x') \cos(x''+x') + 2q^2 \sin 2(x''-x') \cos 2(x''+x'),$$

oder mit der oben eingeführten Bezeichnung:

$$\varphi'' - \varphi' = x + 4q \sin x \cos 2X + 2q^2 \sin 2x \cos 4X.$$

Vernachläfsigt man in dieser Gleichung $\frac{1}{30} q x^5$ und $\frac{8}{3} q^2 x^3$ (q ist im ungünstigsten Falle $< \frac{1}{2500}$ und $x < \frac{1}{60}$), so wird aus derselben:

$$\varphi'' - \varphi' = x \{1 + 4q \cos 2X - \tfrac{2}{3} q x^2 \cos 2X + 4q^2 \cos 4X\}$$

und mit derselben Annäherung:

$$\lg(\varphi'' - \varphi') = \lg x + 4q \cos 2X - \tfrac{2}{3} q x^2 \cos 2X - 4q^2.$$

Substituirt man nun in diese Gleichung die Gleichung (4.), so erhält man:

$$\lg(\varphi''-\varphi') = \lg s+\varepsilon-4q-4q\cos 2X+\tfrac{2}{3}qx^2\cos 2X$$

oder

$$\lg(\varphi''-\varphi') = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2 X+\tfrac{2}{3}qx^2\cos 2X.$$

Zur Berechnung von $\varphi''-\varphi'$ aus dieser Gleichung ist es zulässig statt x und X Näherungswerthe zu setzen. Bezeichnet man $\varphi''-\varphi'$ durch φ und $\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi')$ durch Φ, so kann man

$$\varphi \text{ statt } x$$

und $\Phi-2q\sin 2\Phi$ statt X setzen.

Diese letzte Substitution erhält man aus den Gleichungen:

$$\varphi' = x'+2q\sin 2x'$$
$$\varphi'' = x''+2q\sin 2x'',$$

welche durch Umkehrung

$$x' = \varphi'-2q\sin 2\varphi'$$
$$x'' = \varphi''-2q\sin 2\varphi'',$$

also $X=\Phi-2q\sin 2\Phi\cos\varphi$ oder näherungsweise

$$X = \Phi-2q\sin 2\Phi$$

ergeben. Alsdann ist:

$$\cos X = \cos\Phi+2q\sin 2\Phi\sin\Phi$$
$$= \cos\Phi(1+4q\sin^2\Phi)$$

also

$$\cos^2 X = \cos^2\Phi(1+8q\sin^2\Phi)$$
$$= \cos^2\Phi+2q\sin^2 2\Phi$$

und folglich:

$$\lg\varphi = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2\Phi+\tfrac{2}{3}q\varphi^2\cos 2\Phi-16q^2\sin^2 2\Phi.$$

Um aus dieser Gleichung φ zu finden, berechnet man zuerst einen Näherungswerth φ^0 von φ durch die Gleichung:

$$\lg\varphi^0 = \lg s+\varepsilon-8q\cos^2\varphi'$$

und setzt $\varphi'+\frac{1}{2}\varphi^0$ statt Φ, und φ^0 statt φ. Alsdann wird

$$-8q\cos^2\Phi = -8q\cos^2\varphi'+2q\cos 2\varphi'.\varphi^{02}+4q\sin 2\varphi'.\varphi^0,$$
$$+\tfrac{2}{3}q\varphi^2\cos 2\Phi = +\tfrac{2}{3}q\cos 2\varphi'.\varphi^{02},$$
$$-16q^2\sin^2 2\Phi = -16q^2\sin^2 2\varphi'$$

und folglich:

$$\lg\varphi = \lg\varphi^0+4q\sin 2\varphi'.\varphi^0-16q^2\sin^2 2\varphi'+\tfrac{8}{3}q\cos 2\varphi'.\varphi^{02}.$$

Zur Berechnung des *Brigg*ischen Logarithmus von φ hat man demnach die Gleichungen:

$$\lg\text{vulg}\,\varphi^0 = \lg\text{vulg}\,s + A\varepsilon - 8Aq\cos^2\varphi'$$

$$\lg\text{vulg}\,\varphi = \lg\text{vulg}\,\varphi^0 + 4\frac{A}{r}q\sin 2\varphi'.\varphi^0 - 16Aq^2\sin^2 2\varphi' + \tfrac{8}{3}\frac{A}{r^2}q\cos 2\varphi'.\varphi^{02},$$

wo $r = 206264''8$ ist, oder die Gleichungen:

$$\lg\text{vulg}\,\varphi^0 = \lg\text{vulg}\,s + d - fq\cos^2\varphi'$$

$$\lg\text{vulg}\,\varphi = \lg\text{vulg}\,\varphi^0 + gq\sin 2\varphi'.\varphi^0 - hq^2\sin^2 2\varphi' + iq\cos 2\varphi'.\varphi^{02},$$

wo

$$d = 0{,}0014542, \qquad \lg f = 0{,}54087$$

$$\lg g = 4{,}92541, \qquad \lg h = 0{,}842, \qquad \lg i = 6{,}43-17$$

ist.

Zur Bestimmung des Längenunterschiedes λ der beiden Endpunkte des Bogens s hat man die Gleichung:

$$\lambda = \cos l\int_{\varphi'}^{\varphi''}\frac{\sqrt{1-e^2+e^2\sin^2 l\cos^2\varphi}}{1-\sin^2 l\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

(*Legendre* Exercices pag. 180), welche sich mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$\frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-ee}} = \operatorname{tg} B$$

auf die Form:

$$(5.)\qquad \lambda = \frac{\operatorname{tg} l}{\sin B}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+\operatorname{tg}^2 l\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

bringen läfst. Aus den Gleichungen:

$$e\sin B = k$$

und

$$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} l}{\sqrt{1-ee}}$$

ergiebt sich

$$e^2 = \frac{k^2}{\sin^2 l + k^2\cos^2 l},$$

also

$$\sin B = \frac{k}{e} = \sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\sin B$ in die Gleichung (5.), so erhält man:

$$(6.)\qquad \lambda = \frac{\operatorname{cotg} l}{\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l}}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\operatorname{cotg}^2 l + \sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

In diese Gleichung führe man

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u$$

als neue Variable ein, so dafs also

$$(7.) \qquad \varphi = \operatorname{am} u$$

ist, und setze

$$\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{am}(a, k'),$$

wenn $k' = \sqrt{1-k^2}$ ist. Alsdann ist:

$$\operatorname{cotg} l = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a, k')$$

und da, wenn man $\sqrt{-1} = i$ setzt, nach Fund. pag. 34 Formel 1,

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{i}\sin\operatorname{am}(ia)$$

ist, so folgt:

$$(8.) \qquad \operatorname{cotg} l = \frac{1}{i}\sin\operatorname{am}(ia).$$

Ferner ist:

$$\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \sqrt{1-k'^2\cos^2 l} = \sqrt{1-k'^2\sin^2\operatorname{am}(a, k')},$$

welche Gröfse, wie gebräuchlich ist, mit $\Delta\operatorname{am}(a, k')$ bezeichnet wird, so dafs also

$$\sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \Delta\operatorname{am}(a, k').$$

Es ist aber nach Fund. pag. 34 Formel 2 und 4

$$\Delta\operatorname{am}(a, k') = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}$$

und folglich

$$(9.) \qquad \sqrt{\sin^2 l + k^2\cos^2 l} = \frac{\Delta\operatorname{am}(ia)}{\cos\operatorname{am}(ia)}.$$

Substituirt man die Gleichungen (7.), (8.) und (9.) in die Gleichung (6.), so erhält man:

$$(10.) \qquad \lambda = \frac{1}{i}\,\frac{\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}{\Delta\operatorname{am}(ia)} \int_{u}^{u''} \frac{\Delta^2\operatorname{am}(u).du}{\sin^2\operatorname{am}(u) - \sin^2\operatorname{am}(ia)},$$

wo

$$\int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} \text{ durch } u'$$

und

$$\int_0^{\varphi''} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}} \text{ durch } u''$$

bezeichnet ist. In die Gleichung (10.) lassen sich die elliptischen Functionen Θ und H, wie folgt, einführen. Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$\sin\operatorname{am}(u) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

$$\sin\operatorname{am}(ia) = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(ia)}{\Theta(ia)},$$

also

$$\Delta^2\operatorname{am}(u) = 1-k\frac{H^2(u)}{\Theta^2(u)}$$

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = 1-k\frac{H^2(ia)}{\Theta^2(ia)}.$$

Hieraus folgt:

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia)-\Delta^2\operatorname{am}(u) = k\frac{H^2(u)\,\Theta^2(ia)-H^2(ia)\,\Theta^2(u)}{\Theta^2(ia)\,\Theta^2(u)}$$

und, wenn man Fund. pag. 175 Formel 21 benutzt,

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia)-\Delta^2\operatorname{am}(u) = \frac{k\,\Theta^2(0)\,H(u+ia)\,H(u-ia)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(ia)}.$$

Es ist aber nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = k'\frac{\Theta^2(ia+K)}{\Theta^2(ia)}$$

oder, wenn man $\Theta(ia+K)$ durch $\Theta_{,}(ia)$ bezeichnet,

$$\Delta^2\operatorname{am}(ia) = k'\frac{\Theta_{,}^2(ia)}{\Theta^2(ia)}$$

und folglich:

$$1-\frac{\Delta^2\operatorname{am}(u)}{\Delta^2\operatorname{am}(ia)} = \frac{k}{k'}\frac{\Theta^2(0)}{\Theta^2(u)}\frac{H(u+ia)\,H(u-ia)}{\Theta_{,}^2(ia)}.$$

Nimmt man von beiden Seiten dieser Gleichung die Logarithmen und differenzirt alsdann in Bezug auf a, so erhält man:

$$\frac{-2ik^2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)\,\Delta^2\operatorname{am}(u)}{\Delta\operatorname{am}(ia)\,\{\Delta^2\operatorname{am}(ia)-\Delta^2\operatorname{am}(u)\}} = \frac{iH'(u+ia)}{H(u+ia)}-\frac{iH'(u-ia)}{H(u-ia)}-\frac{2i\Theta_{,}'(ia)}{\Theta_{,}(ia)},$$

oder

$$\frac{2\sin\operatorname{am}(ia)\cos\operatorname{am}(ia)}{i\Delta\operatorname{am}(ia)}\cdot\frac{\Delta^2\operatorname{am}(u)}{(\sin^2\operatorname{am}(u)-\sin^2\operatorname{am}(ia))}$$

$$= i\left\{\frac{H'(u+ia)}{H(u+ia)}-\frac{H'(u-ia)}{H(u-ia)}-\frac{2\Theta_{,}'(ia)}{\Theta_{,}(ia)}\right\},$$

wenn man $\frac{dH(u)}{du}$ durch $H'(u)$ und $\frac{d\Theta_{,}(u)}{du}$ durch $\Theta_{,}'(u)$ bezeichnet.

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (10.), so erhält man:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}i\int_{u'}^{u''}\frac{H'(u+ia)}{H(u+ia)}du-\tfrac{1}{2}i\int_{u'}^{u''}\frac{H'(u-ia)}{H(u-ia)}du-\frac{i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)}\int_{u'}^{u''}du$$

oder, wenn man die Integration ausführt und

$$\frac{i\Theta_1'(ia)}{\Theta_1(ia)} \text{ durch } \nu$$

bezeichnet.

$$(11.)\qquad \lambda = \tfrac{1}{2}i\lg\frac{H(ia+u'')}{H(ia-u'')}-\tfrac{1}{2}i\lg\frac{H(ia+u')}{H(ia-u')}-\nu(u''-u').$$

Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$\lg H(u) = \lg\{\sqrt{k}.\sin\mathrm{am}(u).\Theta(u)\}.$$

Da aber nach Fund. pag. 99 Formel 6

$$\lg(\sqrt{k}.\sin\mathrm{am}\,u) = \lg 2\sqrt[4]{q}+\lg\sin x+2\left\{\frac{q\cos 2x}{1+q}+\frac{q^2\cos 4x}{2(1+q^2)}+\cdots\right\}$$

und nach Fund. pag. 145

$$(12.)\qquad \lg\Theta(u) = \mathrm{Const}-2\left\{\frac{q\cos 2x}{1-q^2}+\frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)}+\cdots\right\},$$

wenn $u=\frac{2Kx}{\pi}$ gesetzt ist, so folgt:

$$\lg H(u) = \mathrm{Const}+\lg\sin x-2\left\{\frac{q^2\cos 2x}{1-q^2}+\frac{q^4\cos 4x}{2(1-q^4)}+\cdots\right\}.$$

Führt man diese Entwickelung in die Gleichung (11.) ein, indem man $u'=\frac{2Kx'}{\pi}$, $u''=\frac{2Kx''}{\pi}$ und $a=\frac{2K\alpha}{\pi}$ setzt und diejenigen Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt, so wird:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}i\lg\frac{\sin(i\alpha+x'')\sin(i\alpha-x')}{\sin(i\alpha-x'')\sin(i\alpha+x')}-\frac{2K\nu}{\pi}(x''-x')$$

$$+\frac{1}{i}q^2\{\cos 2(i\alpha+x'')+\cos 2(i\alpha-x')-\cos 2(i\alpha-x'')-\cos 2(i\alpha+x')\}$$

oder, wenn man, wie schon oben geschehen ist, $x''-x'=x$ und $\frac{1}{2}(x''+x')=X$ setzt,

$$(13.)\qquad \lambda = \mathrm{arctg}\frac{i\,\mathrm{tg}\,x''}{\mathrm{tg}\,i\alpha}-\mathrm{arctg}\frac{i\,\mathrm{tg}\,x'}{\mathrm{tg}\,i\alpha}-\frac{2K\nu}{\pi}x-\frac{4}{i}q^2\sin 2i\alpha\sin x\cos 2X.$$

Da $\Theta_1(ia)=\Theta(ia+K)=\Theta\left\{\frac{2K}{\pi}\left(i\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ ist, so erhält man, wenn man in die Gleichung (12.), $i\alpha+\frac{\pi}{2}$ statt x setzt,

$$\lg\Theta_1(ia) = \mathrm{Const}+2\left\{\frac{q\cos 2i\alpha}{1-q^2}-\frac{q^2\cos 4i\alpha}{2(1-q^4)}+\cdots\right\}$$

und durch Differenziation dieser Gleichung in Bezug auf α, mit Berücksichtigung der Gleichung $\frac{d \lg \Theta_1(i\alpha)}{d\alpha} = \frac{2Ki}{\pi}\frac{\Theta_1'(i\alpha)}{\Theta_1(i\alpha)} = \frac{2K\nu}{\pi}$,

$$\frac{2K\nu}{\pi} = -4i\left\{\frac{q\sin 2i\alpha}{1-q^2} - \frac{q^2\sin 4i\alpha}{1-q^4} + \cdots\right\}$$

oder, wenn man die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt,

$$\frac{2K\nu}{\pi} = 4q\frac{\sin 2i\alpha}{i} - 4q^2\frac{\sin 4i\alpha}{i}.$$

Diese Formel, in die Gleichung (13.) substituirt, ergiebt

$$(14.)\quad \lambda = \operatorname{arctg}\frac{i\operatorname{tg}x''}{\operatorname{tg}i\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{i\operatorname{tg}x'}{\operatorname{tg}i\alpha} - 4q\frac{\sin 2i\alpha}{i}x$$
$$+4q^2\frac{\sin 4i\alpha}{i}x - 4q^2\frac{\sin 2i\alpha}{i}\sin x\cos 2X.$$

Führt man statt der Gröfse α einen Winkel A ein, welcher durch die Gleichung:

$$\alpha = \lg\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A$$

definirt wird, so ist:

$$\cos i\alpha = \frac{1}{\sin A}, \quad \frac{\sin i\alpha}{i} = \operatorname{cotg}A, \quad \frac{\operatorname{tg}i\alpha}{i} = \cos A,$$
$$\frac{\sin 2i\alpha}{i} = \frac{2\cos A}{\sin^2 A}, \quad \cos 2i\alpha = \frac{1+\cos^2 A}{\sin^2 A}.$$

Substituirt man diese verschiedenen Ausdrücke in die Gleichung (14.) und setzt in das letzte Glied, welches q^2 enthält, x statt $\sin x$, so wird:

$$(15.)\quad \lambda = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x''}{\cos A} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x'}{\cos A} - 8q\frac{\cos A}{\sin^2 A}x$$
$$+8q^2\frac{\cos A}{\sin^2 A}x\left\{\frac{2(1+\cos^2 A)}{\sin^2 A} - \cos 2X\right\}.$$

Um den Werth des Winkels A zu finden, hat man die Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{am}(a, k'),$$

also $\frac{\pi}{2} - l = \operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k') - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\operatorname{am}(a,k') + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\operatorname{am}(a,k') - \cdots$

Da aber nach Fund: pag. 34 Formel 1

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k') = \frac{\sin\operatorname{am}(ia)}{i},$$

so ist:

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{\sin\operatorname{am}(ia)}{i} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3\operatorname{am}(ia)}{i} + \frac{1}{5}\frac{\sin^5\operatorname{am}(ia)}{i} + \cdots$$

also

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\sin\operatorname{am}(ia)}{1-\sin\operatorname{am}(ia)}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kia}{\pi}}{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kia}{\pi}}.$$

Benutzt man zur Entwickelung dieser Gleichung Fund. pag. 99 Formel 9, so erhält man:

$$\frac{\pi}{2} - l = \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\sin ia}{1-\sin ia} + \frac{4}{i}\left\{\frac{q\sin ia}{1-q} - \frac{q^3\sin 3ia}{3(1-q^3)} + \cdots\right\}$$

oder, wenn die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} - l &= \frac{1}{2i}\lg\frac{1+\sin ia}{1-\sin ia} + \frac{4}{i}\frac{q}{1-q}\sin ia\\ &= \frac{1}{2i}\lg\frac{1+i\operatorname{cotg}A}{1-i\operatorname{cotg}A} + \frac{4q}{1-q}\operatorname{cotg}A\\ &= \frac{\pi}{2} - A + \frac{4q}{1-q}\operatorname{cotg}A\end{aligned}$$

und folglich:

$$l = A - \frac{4q}{1-q}\operatorname{cotg}A.$$

Nun kann man aber statt dieser Formel, um λ mit genügender Schärfe zu berechnen, setzen:

$$l = A - 4q\operatorname{cotg}A,$$

oder

$$(16.)\qquad A = l + 4q\operatorname{cotg}l.$$

Eine andere bemerkenswerthe Formel zur Berechnung von A findet man aus der schon oben aufgestellten Gleichung:

$$\begin{aligned}e^2 &= \frac{k^2}{\sin^2 l + k^2\cos^2 l}\\ &= \frac{k^2}{1-k'^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-l\right)}\\ &= \frac{k^2}{1-k'^2\sin^2\operatorname{am}(a,k')}\\ &= \frac{k^2}{\Delta^2\operatorname{am}(a,k')},\end{aligned}$$

also

$$1-e^2 = \frac{1-k'^2\sin^2\mathrm{am}(a,k')-k^2}{\varDelta^2\mathrm{am}(a,k')} = \frac{k'^2\cos^2\mathrm{am}(a,k')}{\varDelta^2\mathrm{am}(a,k')},$$

oder nach Fund. pag. 34 Formel 4:

$$1-e^2 = \frac{k'^2}{\varDelta^2\mathrm{am}(ia)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\lg(1-e^2) = \lg\frac{\varDelta\mathrm{am}(ia)}{k'}$$

oder, wenn man die Entwickelungen Fund. pag. 99 Formel 8 und pag. 104 Formel 15 benutzt,

$$\varepsilon = \frac{4q\cos 2ia}{1-q^2}+\frac{3q^3\cos 6ia}{3(1-q^6)}+\cdots+4q+\tfrac{16}{3}q^3+\cdots$$

Vernachlässigt man endlich die Glieder, welche die dritte und höhere Potenzen von q enthalten, so bekommt man die Gleichung:

$$\varepsilon = 4q\cos 2ia+4q = 8q\cos^2 ia$$

oder

$$(17.)\qquad \varepsilon = \frac{8q}{\sin^2\mathrm{A}},$$

welche die zur Berechnung von A in den neun ersten Decimalstellen genaue Formel:

$$\sin\mathrm{A} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2q}}$$

ergiebt.

Macht man von dieser Formel Gebrauch, so erhält man aus Gleichung (15.) für λ die Gleichung:

$$(18.)\qquad \lambda = \mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}\,x''}{\cos\mathrm{A}}-\mathrm{arc\,tg}\frac{\mathrm{tg}\,x'}{\cos\mathrm{A}}-\varepsilon\cos\mathrm{A}\,x\{1-\tfrac{1}{2}\varepsilon+2q+q\cos 2X\}.$$

Durch Berechnung des Dreiecks $PO'O''$ nach einer zweckmäfsigen Methode (*Gaufs*, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, Göttingen 1844, pag. 32) wird man gleichzeitig mit $l'-l''$ und $T'-T''$ den Winkel $O'PO''=\omega$ erhalten. Die Correction, welche von dem Winkel ω zu subtrahiren ist, um λ zu geben, sei $\varDelta\omega$. Die Bestimmung dieser Correction $\varDelta\omega$ erhält man auf folgendem Wege. — Es sei

$$O'PO = \omega' \quad\text{und}\quad O''PO = \omega''.$$

Alsdann ist:

$$\mathrm{cotg}\,\omega' = \frac{\cos l}{\mathrm{tg}\,\varphi'} = \frac{\sin\mathrm{am}(a,k')}{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(u')}$$

und nach Fund. pag. 34 Formel 1

$$\operatorname{cotg}\omega' = \frac{i\sin\operatorname{am}(a,k')}{\sin\operatorname{am}(iu',k')},$$

folglich

$$\frac{\pi}{2}-\omega' = \frac{1}{2i}\lg\frac{\sin\operatorname{am}(iu',k')-\sin\operatorname{am}(a,k')}{\sin\operatorname{am}(iu',k')+\sin\operatorname{am}(a,k')}$$

oder

$$\frac{\pi}{2}-\omega' = \frac{1}{2i}\lg\frac{\sin\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a)+\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}-\sin\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a)-\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}}{\sin\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a)+\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}+\sin\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a)-\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}}.$$

Wendet man auf diese Gleichung die Subtractions- und Additions-Formel (Fund. pag. 32 Formel 4 und 1) an, so wird:

$$\frac{\pi}{2}-\omega' = \frac{1}{2i}\lg\frac{\sin\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}\cos\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a),k'\}\varDelta\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a),k'\}}{\sin\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a),k'\}\cos\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}\varDelta\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}}$$

$$= \frac{1}{2i}\lg\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}\ \varDelta\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a),k'\}}{\operatorname{tg}\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'+a),k'\}\ \varDelta\operatorname{am}\{\tfrac{1}{2}(iu'-a),k'\}}$$

oder, nach Fund. pag. 34 Formel 3 und 4,

$$\frac{\pi}{2}-\omega' = \frac{1}{2i}\lg\frac{\sin\operatorname{am}\tfrac{1}{2}(u'+ia)\cos\operatorname{am}\tfrac{1}{2}(u'+ia)}{\varDelta\operatorname{am}\tfrac{1}{2}(u'+ia)} - \frac{1}{2i}\lg\frac{\sin\operatorname{am}\tfrac{1}{2}(u'-ia)\cos\operatorname{am}\tfrac{1}{2}(u'-ia)}{\varDelta\operatorname{am}\tfrac{1}{2}(u'-ia)}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Fund. pag. 99 Formel 6, 7 und 8, so wird:

$$(19.)\quad \frac{\pi}{2}-\omega' = \frac{1}{2i}\lg\frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)}+\frac{q^2\cos2(x'+i\alpha)}{i(1+q^2)}+\frac{q^4\cos4(x'+i\alpha)}{2i(1+q^4)}+\cdots$$
$$-\frac{q^2\cos2(x'-i\alpha)}{i(1+q^2)}-\frac{q^4\cos4(x'-i\alpha)}{2i(1+q^4)}-\cdots$$

Diese Entwickelung erhält man auf kürzerem Wege durch Anwendung der *Legendre*'schen Transformation der zweiten Ordnung, indem man den Ausdruck $\frac{1}{2i}\lg\sin\operatorname{am}(u'+ia)-\frac{1}{2i}\lg\sin\operatorname{am}(u'-ia)$, nach Fund. pag. 99 Formel 6, in die Reihe

$$\frac{1}{2i}\lg\frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)}+\frac{q\cos2(x'+i\alpha)}{i(1+q)}+\frac{q^2\cos4(x'+i\alpha)}{2i(1+q^2)}+\cdots$$
$$-\frac{q\cos2(x'-i\alpha)}{i(1+q)}-\frac{q^2\cos4(x'-i\alpha)}{2i(1+q^2)}-\cdots$$

entwickelt und alsdann q^2 statt q setzt.

Vernachlässigt man in der Gleichung (19.):

$$\frac{\pi}{2}-\omega' = \frac{1}{2i}\lg\frac{\sin(x'+i\alpha)}{\sin(x'-i\alpha)}-\frac{2}{i}\left\{\frac{q^2}{1+q^2}\sin2i\alpha\sin2x'+\frac{q^4}{2(1+q^4)}\sin4i\alpha\sin4x'+\cdots\right\}$$

die Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen von q enthalten, so wird:

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} i\alpha}{i \operatorname{tg} x'} - \frac{4q^2}{1+q^2}\frac{\cos A}{\sin^2 A}\sin 2x'$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos A}{\operatorname{tg} x'} - \frac{4q^2}{\sin^2 A}\cos A \sin 2x'$$

oder wenn man die Gleichung (17.) benutzt,

$$\frac{\pi}{2} - \omega' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} - \tfrac{1}{2}\varepsilon q \cos A \sin 2x'.$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{\pi}{2} - \omega'' = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \tfrac{1}{2}\varepsilon q \cos A \sin 2x''$$

und folglich

$$\omega'' - \omega' = \omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} + \tfrac{1}{2}\varepsilon q \cos A(\sin 2x'' - \sin 2x').$$

Da $\sin 2x'' - \sin 2x' = 2\sin x \cos 2X$, also näherungsweise

$$\sin 2x'' - \sin 2x' = 2x \cos 2X$$

ist, so wird

$$\omega = \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x''}{\cos A} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg} x'}{\cos A} + \varepsilon q x \cos A \cos 2X.$$

Substituirt man diese Gleichung in die Gleichung (18.), so erhält man

$$\varDelta\omega = \varepsilon x \cos A\{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + 2q + 2q\cos 2X\}$$

oder

$$\varDelta\omega = \varepsilon x \cos A\{1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon + 4q\cos^2 X\}$$

oder endlich, wenn man, wie bisher, $\varepsilon^2 q$ in den Gliedern, die s oder x enthalten, vernachlässigt,

$$\varDelta\omega = (\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)x \cos A(1 + 4q\cos^2 X).$$

Nach Gleichung (16.) ist:

$$A = l + 4q \operatorname{cotg} l$$

also

$$\cos A = \cos(l + 4q\operatorname{cotg} l)$$

$$= (1 - 4q)\cos l$$

und folglich wird die gesuchte Correction:

$$\varDelta\omega = (\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)x \cos l(1 - 4q\sin^2 X)$$

und

$$\lg \varDelta\omega = \lg\{(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2)x\cos l\} - 4q\sin^2 X.$$

Setzt man in diese Gleichung näherungsweise

$$\begin{aligned} x &= \varphi - 2q(\sin 2\varphi'' - \sin 2\varphi') \\ &= \varphi - 4q\varphi\cos 2\Phi \\ &= \varphi(1 - 4q\cos 2\Phi) \end{aligned}$$

also

$$\lg x = \lg\varphi - 4q\cos 2\Phi$$

und

$$X = \Phi,$$

so wird:

$$\begin{aligned} \lg\Delta\omega &= \lg(\varphi\cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - 4q\cos 2\Phi - 4q\sin^2\Phi \\ &= \lg(\varphi\cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - 4q\cos^2\Phi \end{aligned}$$

und, wenn man $\Phi = \varphi' + \frac{1}{2}\varphi^0$ setzt,

$$\lg\Delta\omega = \lg(\varphi\cos l) + \lg(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \tfrac{1}{2}(8q\cos^2\varphi') + \tfrac{1}{2}(4q\varphi^0\sin 2\varphi'). \tag{20.}$$

Zur Berechnung des *Brigg*ischen Logarithmus von $\Delta\omega$ hat man demnach die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\lg\operatorname{vulg}\Delta\omega \\ &= \lg\operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + \lg\operatorname{vulg}(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2) - \tfrac{1}{2}(8Aq\cos^2\varphi') + \tfrac{1}{2}\left(4\frac{A}{r}q\sin 2\varphi' . \varphi^0\right) \end{aligned}$$

oder mit einer schon oben gebrauchten Bezeichnung

$$\lg\operatorname{vulg}\Delta\omega = \lg\operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}fq\cos^2\varphi' + \tfrac{1}{2}gq\sin^2\varphi' . \varphi^0$$

oder endlich, wenn man

$$fq\cos^2\varphi' = C \quad \text{und} \quad gq\sin^2\varphi'\varphi^0 = D$$

setzt,

$$\lg\operatorname{vulg}\Delta\omega = \lg\operatorname{vulg}(\varphi\cos l) + 7{,}52410 - \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}D.$$

Es ist jetzt noch die Formel abzuleiten, durch welche man aus der reducirten Breite l'' die Breite B'' oder aus der Gröfse $l' - l''$ die Gröfse $B' - B''$ erhält.

Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} l'}{\sqrt{1 - ee}}$$

ergiebt sich die bekannte Gleichung:

$$B' - l' = \frac{1 - \sqrt{1 - ee}}{1 + \sqrt{1 - ee}}\sin 2l' + \tfrac{1}{2}\left\{\frac{1 - \sqrt{1 - ee}}{1 + \sqrt{1 - ee}}\right\}^2 \sin 4l' + \tfrac{1}{3}\left\{\frac{1 - \sqrt{1 - ee}}{1 + \sqrt{1 - ee}}\right\}^3 \sin 6l' + \cdots$$

Entwickelt man $\frac{1 - \sqrt{1 - ee}}{1 + \sqrt{1 - ee}}$ in eine Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4.6}e^4+\frac{3\,5}{4.6.8}e^6+\frac{3.5.7}{4.6.8.10}e^8+\cdots$$

und, wenn man $\frac{1}{2}\varepsilon = -\frac{1}{2}\lg\sqrt{1-e^2}$ in eine Reihe entwickelt,

$$\tfrac{1}{4}e^2+\tfrac{1}{8}e^4+\tfrac{1}{12}e^6+\tfrac{1}{16}e^8+\cdots$$

Beide Reihen weichen erst in Gliedern, welche die sechste und höhere Potenzen von e enthalten, von einander ab. Ihr Unterschied ist nämlich

$$\tfrac{1}{192}e^6+\tfrac{1}{128}e^8+\cdots$$

Es kann daher

$$\frac{1-\sqrt{1-ee}}{1+\sqrt{1-ee}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

gesetzt werden, und man erhält:

$$(21.)\qquad B'-l' = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2l'+\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin 4l'+\tfrac{1}{24}\varepsilon^3\sin 6l'+\cdots$$

Ebenso wird:

$$(22.)\qquad B''-l'' = \tfrac{1}{2}\varepsilon\sin 2l''+\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin 4l''+\tfrac{1}{24}\varepsilon^3\sin 6l''+\cdots$$

Subtrahirt man die untere Gleichung von der obern, so wird:

$$B'-B'' = l'-l''+\varepsilon\sin(l'-l'')\cos(l'+l'')+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l'')+\cdots$$

oder, in Secunden ausgedrückt,

$$B'-B'' = l'-l''+k\sin(l'-l'')\cos(l'+l'')+n\sin 2(l'-l'')\cos 2(l'+l''),$$

wo $\lg k = \lg r\varepsilon = 2{,}83926$ und $\lg n = \lg\frac{1}{4}r\varepsilon^2 = 9{,}7620$ ist.

* * *

Einfache Formeln, um den Einflufs der Ellipticität des Erdmeridians auf die berechneten Winkel T'', B'', λ annähernd schätzen zu können, erhält man durch die folgenden Betrachtungen.

Man stelle sich einen sphärischen Triangel vor, der die Seiten s und $\frac{\pi}{2}-B'$, und den von ihnen eingeschlossenen Winkel $180^0-T'$ habe. Die dritte Seite sei $\frac{\pi}{2}-B''_0$, und die den Seiten s und $\frac{\pi}{2}-B'$ gegenüberliegenden Winkel seien respective λ_0 und T''_0. Diese Winkel $\frac{\pi}{2}-B''_0$, λ_0 und T''_0 würden die Werthe von $\frac{\pi}{2}-B''$, λ und T'' sein, wenn die Erde eine Kugel wäre. Setzt man

$$B'' = B''_0+\Delta B''_0,\qquad T'' = T''_0+\Delta T''_0,\qquad \lambda = \lambda_0+\Delta\lambda_0,$$

so sind $\Delta B''_0$, $\Delta T''_0$, $\Delta\lambda_0$ die Correctionen, welche den Werthen B''_0, T''_0, λ_0

wegen der Ellipticität der Erde hinzuzufügen sind. Setzt man ferner:

$$\varphi = s + \delta s \qquad l' = B' + \delta B'$$
$$\omega = \lambda_0 + \delta\lambda_0 \qquad l'' = B''_0 + \delta B''_0,$$

so sind $\delta\lambda_0$, $\delta B''_0$ und $\varDelta T''$ die Correctionen, welche von ω, l'' und T'' zu subtrahiren sind, wenn man die beiden Seiten φ und $\frac{\pi}{2} - l'$ des sphärischen Hülfstriangels in s und $\frac{\pi}{2} - B'$ übergehen, den Winkel $180^0 - T'$ aber ungeändert läfst, und es werden:

$$\varDelta\lambda_0 = \delta\lambda_0 - (\omega - \lambda)$$
$$\varDelta B''_0 = \delta B''_0 - (l'' - B'')$$

sein.

Aus der Gleichung zur Berechnung von φ erhält man näherungsweise:

$$\lg\varphi = \lg s + \varepsilon - 8q\cos^2 X$$

also

$$\varphi = s(1 + \varepsilon - 8q\cos^2 X)$$
$$\delta s = s(\varepsilon - 8q\cos^2 X).$$

Setzt man in diese Gleichung die Näherungswerthe:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}e^2$$
$$8q = \tfrac{1}{2}k^2 = \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 B \text{ oder } = \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 l$$
$$\text{und } \cos^2 X = \cos^2\tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') \text{ oder } = \cos^2\varphi',$$

so erhält man:

$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s(1 - \sin^2 l\cos^2\varphi')$$
$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 l'$$

oder

$$\delta s = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 B'.$$

Aus der Gleichung (21.) erhält man die Näherungsformel:

$$\delta B' = -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B'.$$

Die Gleichung (20.) giebt:

$$\omega - \lambda = \varepsilon\varphi\cos l \quad \text{oder} \quad \omega - \lambda = \tfrac{1}{2}e^2 s\cos B'\sin T'$$

und endlich die Gleichung (22.):

$$l'' - B'' = -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B'.$$

Die bekannten Differentialformeln für einen sphärischen Triangel, dessen Seiten durch α, β, γ und dessen Winkel durch A, B, Γ bezeichnet, und in welchem die Seiten β und γ variabel, der eingeschlossene Winkel A aber constant gesetzt werden, sind:

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \cos\Gamma d\beta + \cos B d\gamma \\
dB &= \frac{\sin\Gamma}{\sin\alpha} d\beta - \frac{\sin B}{\operatorname{tg}\alpha} d\gamma \\
d\Gamma &= -\frac{\sin\Gamma}{\operatorname{tg}\alpha} d\beta + \frac{\sin B}{\sin\alpha} d\gamma.
\end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
\alpha = \frac{\pi}{2} - l'' & \beta = \frac{\pi}{2} - l' & \gamma = \varphi \\
A = \pi - T' & B = T'' & \Gamma = \omega \\
d\alpha = \delta B_0'' & d\beta = dB' & d\gamma = -\delta s \\
dA = 0 & dB = -\Delta T_0'' & d\Gamma = -\delta\lambda_0,
\end{array}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
\delta B_0'' &= \cos\omega\delta B' - \cos T''\delta s \\
\Delta T_0'' &= -\frac{\sin\omega}{\cos l''}\delta B' - \frac{\sin T''}{\operatorname{cotg} l''}\delta s \\
\delta\lambda_0 &= \frac{\sin\omega}{\operatorname{cotg} l''}\delta B' + \frac{\sin T''}{\cos l''}\delta s.
\end{aligned}$$

Vernachlässigt man in diesen Gleichungen die Glieder von der Ordnung s^2 in den Coefficienten von $\delta B'$ und von der Ordnung s in den Coefficienten von δs, so kann man statt T'' und l'' respective T' und B', und ferner

$$\sin\omega = \frac{\sin T'}{\cos B'} s$$

und $\cos\omega = 1$ setzen. Dadurch erhält man:

$$\begin{aligned}
\delta B_0'' &= \delta B' - \cos T'\delta s \\
\Delta T_0'' &= -\frac{\sin T'}{\cos^2 B'} s\delta B' - \frac{\sin T'}{\operatorname{cotg} B'}\delta s \\
\delta\lambda_0 &= \frac{\sin T'\sin B'}{\cos^2 B'} s\delta B' + \frac{\sin T'}{\cos B'}\delta s
\end{aligned}$$

und, wenn man für $\delta B'$ und δs die oben gefundenen Werthe setzt,

$$\begin{aligned}
\delta B_0'' &= -\tfrac{1}{4}e^2\sin 2B' - \tfrac{1}{2}e^2 s\cos^2 B'\cos T' \\
\Delta T_0'' &= \tfrac{1}{2}e^2 s\frac{\sin^3 B'}{\cos B'}\sin T' \\
\delta\lambda_0 &= \tfrac{1}{2}e^2 s\frac{\cos^2 B' - \sin^2 B'}{\cos B'}\sin T'
\end{aligned}$$

und folglich:

$$\Delta B''_0 = -\tfrac{1}{2}e^2 s \cos^2 B' \cos T''$$

$$\Delta T''_0 = \tfrac{1}{2}e^2 s \frac{\sin^3 B'}{\cos B'} \sin T''$$

$$\Delta \lambda_0 = -\tfrac{1}{2}e^2 s \frac{\sin^2 B'}{\cos B'} \sin T''.$$

Diese den Einflufs der Ellipticität der Erde auf die Gröfsen B'', T'', λ richtig ergebenden Näherungs-Formeln weichen von den *Jacobi*schen pag. 339 dieses Bandes gegebenen ab, welche Abweichung wohl in kleinen Rechnungsfehlern ihren Grund hat.

* *
*

Um schliefslich die sämmtlichen Gröfsen, welche bei der geodätischen Linie in Betracht kommen, durch die elliptischen Functionen Θ, H, $\Theta_{,}$ und $H_{,}$ auszudrücken, wenn

$$\Theta_{,}(u) = \Theta(K-u) \text{ und } H_{,}(u) = H(K-u)$$

ist, werden statt der beiden Constanten, der Excentricität e und der Breite B des Punktes, in welchem die geodätische Linie auf dem Meridian senkrecht steht, der Modul k der elliptischen Functionen (oder sein Complement k') und das Argument a als Constante mittelst der Gleichungen:

$$e = \frac{k}{\Delta \operatorname{am}(a, k')}, \quad \cos B = k' \sin \operatorname{am}(a, k')$$

eingeführt.

Alsdann ist nach Fund. pag. 34 Formel 5:

$$e = k \sin \operatorname{coam}(ia, k) = k \sin \operatorname{am}(K - ia, k),$$

also nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$e = \sqrt{k}.\frac{H_{,}(ia)}{\Theta_{,}(ia)}$$

und folglich

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{\Theta_{,}^2(ia) - kH_{,}^2(ia)}}{\Theta_{,}(ia)}$$

also nach Fund. pag. 173 Formel 1:

$$\sqrt{1-e^2} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta(ia)}{\Theta_{,}(ia)}.$$

Ferner ist:

$$\sin B = \Delta \operatorname{am}(a, k') = \frac{\Delta \operatorname{am}(ia)}{\cos \operatorname{am}(ia)} = \sqrt{k}\frac{\Theta_{,}(ia)}{H_{,}(ia)}$$

$$\cos B = k' \sin \operatorname{am}(a, k') = \frac{k'}{i} \operatorname{tg} \operatorname{am}(ia) = \frac{\sqrt{k'}}{i} \frac{H(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \frac{i\Theta_1(ia)}{H(ia)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} l = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B = \sqrt{k} \frac{i\Theta(ia)}{H(ia)}$$

$$\text{also} \quad \sin l = \frac{\sqrt{k}.i\Theta(ia)}{\sqrt{H^2(ia) - k\Theta^2(ia)}} = \sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)}$$

$$\text{und} \quad \cos l = \frac{1}{\sqrt{k'}} \frac{H(ia)}{iH_1(ia)}.$$

Nach den Formeln fürs rechtwinklige sphärische Dreieck ist:

$$\sin l' = \sin l \cos \varphi'$$

$$\operatorname{tg} T' = \frac{\operatorname{cotg} l}{\sin \varphi'}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{\cos l}.$$

Setzt man in diese Gleichungen $\varphi' = \operatorname{am}(u)$, so wird:

$$\sin l' = \sqrt{\frac{k}{k'}} \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} \cos \operatorname{am}(u) = \frac{\Theta(ia)}{H_1(ia)} \cdot \frac{H_1(u)}{\Theta(u)}$$

$$\operatorname{tg} T' = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)} \frac{1}{\sin \operatorname{am}(u)} = \frac{H(ia)}{i\Theta(ia)} \frac{\Theta(u)}{H(u)}$$

$$\operatorname{tg} \omega' = \sqrt{k'} \frac{iH_1(ia)}{H(ia)} \operatorname{tg} \operatorname{am}(u) = \frac{iH_1(ia)}{H(ia)} \frac{H(u)}{H_1(u)}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$(23.) \quad \begin{cases} \cos l' = \dfrac{\sqrt{H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H_1^2(u)}}{H_1(ia)\Theta(u)} \\[2ex] \operatorname{tg} l' = \dfrac{\Theta(ia)H_1(u)}{\sqrt{H_1^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H_1^2(u)}} \\[2ex] \sin T' = \dfrac{H(ia)\Theta(u)}{\sqrt{H^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H^2(u)}} \\[2ex] \cos T' = \dfrac{i\Theta(ia)H(u)}{\sqrt{H^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H^2(u)}} \\[2ex] \sin \omega' = \dfrac{iH_1(ia)H(u)}{\sqrt{H^2(ia)H_1^2(u) - H_1^2(ia)H^2(u)}} \\[2ex] \cos \omega' = \dfrac{H(ia)H_1(u)}{\sqrt{H^2(ia)H_1^2(u) - H_1^2(ia)H^2(u)}}. \end{cases}$$

Nach Fund. pag. 173 Formel 1 ist:

$$H_{\prime}^{2}(u) = \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(u) - H^2(u)\}.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
H_{\prime}^{2}(ia)\Theta^2(u) &= \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)\Theta^2(u) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}\\
\Theta^2(ia)H_{\prime}^{2}(u) &= \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H^2(u)\}\\
H^2(ia)H_{\prime}^{2}(u) &= \frac{1}{k'}\{kH^2(ia)\Theta^2(u) - H^2(ia)H^2(u)\}\\
H_{\prime}^{2}(ia)H^2(u) &= \frac{1}{k'}\{k\Theta^2(ia)H^2(u) - H^2(ia)H^2(u)\},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
H_{\prime}^{2}(ia)\Theta^2(u) - \Theta^2(ia)H_{\prime}^{2}(u) &= \frac{1}{k'}\{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}\\
H^2(ia)H_{\prime}^{2}(u) - H_{\prime}^{2}(ia)H^2(u) &= -\frac{k}{k'}\{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)\}.
\end{aligned}$$

Substituirt man diese Formeln in die Gleichungen (23.), so wird:

$$(24.)\quad \begin{cases}
\cos l' = \dfrac{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}{\sqrt{k'}.H_{\prime}(ia)\Theta(u)}\\[2ex]
\operatorname{tg} l' = \dfrac{\sqrt{k'}.\Theta(ia)H_{\prime}(u)}{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}\\[2ex]
\sin T' = \dfrac{H(ia)\Theta(u)}{i\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}\\[2ex]
\cos T' = \dfrac{\Theta(ia)H(u)}{\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}\\[2ex]
\sin\omega' = \dfrac{\sqrt{k}H_{\prime}(ia)H(u)}{\sqrt{k'}\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}\\[2ex]
\cos\omega' = \dfrac{\sqrt{k}H(ia)H_{\prime}(u)}{i\sqrt{k'}\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - H^2(ia)\Theta^2(u)}}.
\end{cases}$$

Da nun nach Fund. pag. 175 Formel 21

$$H^2(u)\Theta^2(ia) - \Theta^2(u)H^2(ia) = \Theta^2(0)H(u+ia)H(u-ia),$$

so ist, wenn man $\sqrt{H(u+ia)H(u-ia)} = N$ setzt,

$$\sqrt{H^2(u)\Theta^2(ia) - \Theta^2(u)H^2(ia)} = \Theta(0)N.$$

Ferner ist nach Fund. pag. 173 Formel 2:

$$\frac{\Theta(0)}{\sqrt{k'}} = \Theta_{\prime}(0)$$

$$\text{und } \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\Theta(0) = H_{\prime}(0).$$

Substituirt man diese Formeln in die Gleichungen (24.), so wird:

$$\cos l' = \frac{\Theta_1(0)}{H_1(ia)}\cdot\frac{N}{\Theta(u)};\qquad \operatorname{tg} l' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta_1(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}$$

$$\sin T' = \frac{H(ia)}{i\Theta(0)}\cdot\frac{\Theta(u)}{N};\qquad \cos T' = \frac{\Theta(ia)}{\Theta(0)}\cdot\frac{H(u)}{N}$$

$$\sin\omega' = \frac{H_1(ia)}{H_1(0)}\cdot\frac{H(u)}{N};\qquad \cos\omega' = \frac{H(ia)}{iH_1(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N}.$$

Setzt man in die Gleichung

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} l'}{\sqrt{1-e^2}}$$

für $\operatorname{tg} l'$ und $\sqrt{1-e^2}$ die gefundenen Ausdrücke, so erhält man:

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\Theta_1(ia)}{\Theta(0)}\cdot\frac{H_1(u)}{N},$$

also

$$\sin B' = \frac{\Theta_1(ia)H_1(u)}{\sqrt{\Theta^2(0)N^2+\Theta_1^2(ia)H_1^2(u)}} = \frac{\Theta_1(ia)H_1(u)}{H_1(ia)\Theta_1(u)}$$

und

$$\cos B' = \frac{\Theta(0)N}{H_1(ia)\Theta_1(u)}.$$

Denkt man sich den Triangel POO' so construirt, dafs $\frac{\pi}{2}-PO'$ nicht gleich der reducirten Breite l', sondern gleich der wahren Breite B' ist, und bezeichnet man durch l_0, φ_0', ω_0' die Werthe, welche unter dieser Voraussetzung die Gröfsen l, φ', ω' annehmen, so wird

$$\cos l_0 = \cos B'\sin T' = \frac{H(ia)\Theta(0)}{iH_1(ia)\Theta_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0' = \operatorname{cotg} B'\cos T' = \frac{\Theta(ia)H(u)}{\Theta_1(ia)H_1(u)}$$

$$\operatorname{tg}\omega_0' = \frac{\operatorname{cotg} T'}{\sin B'} = \frac{i\Theta(ia)H_1(ia)}{\Theta(ia)H(ia)}\cdot\frac{H(u)\Theta_1(u)}{\Theta(u)H_1(u)}.$$

Bezeichnet man endlich mit λ' die Länge des Punktes, welchem der Werth $\varphi' = \operatorname{am}(u)$ entspricht, wenn diese Länge von dem Meridian an gezählt wird, auf welchem die geodätische Linie senkrecht steht, so erhält man aus Formel (11.), indem $u'' = u$ und $u' = 0$ gesetzt wird,

$$\lambda' + \nu u = \tfrac{1}{2} i \lg\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)} = i\lg\sqrt{\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}},$$

wo $\nu = \dfrac{d\lg\Theta_1(ia)}{da}$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt:

$$e^{(\lambda'+\nu u)i} = \sqrt{\frac{H(ia-u)}{H(ia+u)}}, \qquad e^{-(\lambda'+\nu u)i} = \sqrt{\frac{H(ia+u)}{H(ia-u)}},$$

also

$$\sin(\lambda'+\nu u) = \frac{1}{2}\,\frac{H(u+ia)+H(u-ia)}{N}$$

und

$$\cos(\lambda'+\nu u) = \frac{1}{2i}\,\frac{H(u+ia)-H(u-ia)}{N}.$$

Mithin ist:

$$\cos B' \sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_{\prime}(ia)\,\Theta_{\prime}(u)}$$

$$\cos B' \cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_{\prime}(ia)\,\Theta_{\prime}(u)}$$

$$\cos l' \sin(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta_{\prime}(0)\{H(u+ia)+H(u-ia)\}}{2H_{\prime}(ia)\,\Theta(u)}$$

$$\cos l' \cos(\lambda'+\nu u) = \frac{\Theta_{\prime}(0)\{H(u+ia)-H(u-ia)\}}{2iH_{\prime}(ia)\,\Theta(u)}.$$

Königsberg, den 15. Juli 1855.