Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0034
LOG Titel: Note sur l'équation x2-Dy2=...4, D ... 5 (mod. 8).
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

30.

Note sur l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5$ (mod. 8).

(Par M. *A. Cayley.*)

On sait que pour un déterminant positif $D \equiv 5$ (mod. 8) le nombre des formes quadratiques proprement primitives est égal au nombre des formes improprement primitives, quand il existe une solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$, mais que le nombre des formes proprement primitives est égal à trois fois le nombre des formes improprement primitives, quand il n'existe pas de solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$.

Les tables de ***Degen*** font voir immédiatement, pour les nombres $D \equiv 5$ (mod. 8) qui ne sont pas plus grands que 997, s'il existe ou non une solution en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$. A savoir si le nombre 4 se trouve dans la série des dénominateurs des quotients complets (la seconde ligne dans les tables), il existe une solution de l'équation; si non, il n'en existe pas. De plus, si la place où se trouve le nombre 4 est d'ordre pair il existe une solution tant de l'équation $x^2 - Dy^2 = +4$ que de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$, mais si cette place est d'ordre impair il existe seulement une solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$. On trouve la plus petite solution de ces équations au moyen de la série des quotients (la première ligne des tables), en s'arrêtant au nombre qui précède le nombre placé au dessus du nombre 4, et en calculant la fraction continue déterminée par cette suite; par ex. pour le nombre 61 on trouve dans les tables

61	7, 1, 4, 3, 1 (2, 2)
	1, 12, 3, 4, 9 (5, 5)
	226153980
	1766319049

Cela fait voir qu'il existe une solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$, solution que l'on obtient au moyen de la fraction continue $7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}} = \frac{39}{5}$ en faisant $x = 39$, $y = 5$. La plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$ se déduit très facilement de la plus petite solution de l'équation $\tau^2 - Dv^2 = -4$ au moyen de la formule $x + y\sqrt{D} = \frac{1}{2}(\tau + v\sqrt{D})^2$ ce qui donne $x = \tau^2 + 2$, $y = \tau v$.

On obtient pareillement la plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$ au moyen de la formule $(x + y\sqrt{D}) = \frac{1}{8}(\tau + v\sqrt{D})^3$ ce qui donne

$$x = \tfrac{1}{2}(\tau^3 + 3\tau), \qquad y = \tfrac{1}{2}(\tau^2 + 1)v.$$

De même la plus petite solution de l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ se déduit de la plus petite solution de l'équation $T^2 - DU^2 = 4$ au moyen de la formule $x + y\sqrt{D} = \frac{1}{8}(T + U\sqrt{D})^3$ ce qui donne $x = \frac{1}{2}(T^3 - 3T)$, $y = \frac{1}{2}(T^2 - 1)U$.

Je fais observer à cette occasion que suivant une remarque de ***Göpel*** (voyez „Notiz über ***A. Göpel***" t. XXXV p. 315 de ce Journal) si dans l'équation $\left(\frac{x + \sqrt{y}}{p}\right)^n = P + \sqrt{Q}$, où x, y, p, n, P, Q sont des entiers, le dénominateur p est plus grand que l'unité et que x, y, p n'ont pas de dénominateur commun, on aura nécessairement $p = 2$, $n = 3$ ou égal à un multiple de 3, x impair et y de la forme $8n + 5$.

J'ai calculé au moyen des tables de ***Degen*** la table suivante des plus petites solutions en nombres impairs de l'équation $x^2 - Dy^2 = -4$ ou, si cette équation n'en admet pas, de l'équation $x^2 - Dy^2 = 4$, en d'autres termes, une table des plus petites solutions impaires de l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod{8}$.

Londres, 2 Stone Buildings, 10ième Mars 1855.

Table des plus petites solutions impaires de l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod{8}$.

D	$\pm$	x	y	D	$\pm$	x	y	D	$\pm$	x	y
5	—	1	1	341	+	277	15	677		imposs.	
13	—	3	1	349		imposs.		685	—	759	29
21	+	5	1	357	+	19	1	693	+	79	3
29	—	5	1	365	—	19	1	701		imposs.	
37		imposs.		373		imposs.		709		imposs.	
45	+	7	1	381		imposs.		717	+	241	9
53	—	7	1	389		imposs.		725	+	27	1
61	—	39	5	397	—	3447	173	733	—	27	1
69	+	25	3	405		imposs.		741	+	245	9
77	+	9	1	413	+	61	3	749	+	12945	473
85	—	9	1	421	—	444939	21685	757		imposs.	
93	+	29	3	429	+	145	7	765	+	83	3
101		imposs.		437	+	21	1	773	—	139	5
109	—	261	25	445	—	21	1	781		imposs.	
117	+	11	1	453	+	149	7	789	+	31825	1133
125	—	11	1	461	—	365	17	797	—	367	13
133	+	173	15	469	+	65	3	805	+	1447	51
141		imposs.		477	+	2599	119	813		imposs.	
149	—	61	5	485		imposs.		821	—	16189	565
157	—	213	17	493	—	111	5	829		imposs.	
165	+	13	1	501	+	28225	1261	837	+	29	1
173	—	13	1	509	—	925	41	845	—	29	1
181	—	1305	97	517	+	10573	465	853	—	27483	941
189		imposs.		525	+	23	1	861	+	1027	35
197		imposs.		533	—	23	1	869	+	49377	1675
205	+	43	3	541	—	1396425	60037	877		imposs.	
213	+	73	5	549	+	1523	65	885		imposs.	
221	+	15	1	557		imposs.		893	+	2301	77
229	—	15	1	565	—	309	13	901		imposs.	
237	+	77	5	573		imposs.		909		imposs.	
245	+	47	3	581	+	6725	279	917	+	1181	31
253	+	1177	74	589	+	4359377	179625	925		imposs.	
261	+	727	45	597	+	7949	399	933		imposs.	
269		imposs.		605	+	123	5	941	—	1135	37
277	—	2613	157	613	—	98763	3989	949	+	32685	1061
285	+	17	1	621	+	25	1	957	+	31	1
293	—	17	1	629	—	25	1	965	—	31	1
301	+	22745	1311	637	+	14159	561	973		imposs.	
309	+	5045	287	645	+	203	8	981	+	68123	2175
317	—	89	5	653	—	1661	65	989	+	103245	3283
325		imposs.		661	—	1789539	69605	997		imposs.	
333		imposs.		669	+	305285	11803				