Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0035
LOG Titel: Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations algébriques.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

31.

Sur une nouvelle propriété du résultant de deux équations algébriques.

(Par M. *Brioschi* à Pavie.)

1.

Soient:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$
$$\varphi(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

les deux équations. En posant:

$$p_{r+1}(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \cdots + a_r$$
$$q_{r+1}(x) = c_0x^r + c_1x^{r-1} + \cdots + c_r$$

on a:

$$(1.)\quad q_{r+1}(x)f(x) - p_{r+1}(x)\varphi(x) = m_{r+1} = \alpha_{1,r+1}x^{n-1} + \alpha_{2,r+1}x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n,r+1}$$

où:

$$\alpha_{s,r+1} = c_0a_{r+s} + c_1a_{r+s-1} + \cdots + c_{s-1}a_{r+1}$$
$$- (a_0c_{r+s} + a_1c_{r+s-1} + \cdots + a_{s-1}c_{r+1}).$$

Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ les racines de l'équation $f(x) = 0$; en substituant dans (1.) x_s au lieu de x, on obtient:

$$(2.)\quad -p_{r+1}(x_s)\varphi(x_s) = \alpha_{1,r+1}x_s^{n-1} + \alpha_{2,r+1}x_s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n,r+1}$$

équation qui divisée par $f'(x_s)$, et multipliée par $1, x_s, \cdots x_s^{n-1}$ nous donne les suivantes:

$$(3.)\quad \begin{cases} -[a_0S_r + a_1S_{r-1} + \cdots + a_rS_0] = \alpha_{1,r+1}\lambda_0 \\ -[a_0S_{r+1} + a_1S_r + \cdots + a_rS_1] = \alpha_{1,r+1}\lambda_1 + \alpha_{2,r+1}\lambda_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -[a_0S_{r+n-1} + a_1S_{r+n-2} + \cdots + a_rS_{n-1}] \\ \qquad = \alpha_{1,r+1}\lambda_{n-1} + \alpha_{2,r+1}\lambda_{n-2} + \cdots + \alpha_{n,r+1}\lambda_0 \end{cases}$$

où l'on a posé:

$$S_r = \Sigma_s{}_1^n \frac{x_s^r\varphi(x_s)}{f'(x_s)}, \qquad \lambda_r = \Sigma_s{}_1^n \frac{x_s^{n+r-1}}{f'(x_s)}.$$

J'observe que:

$$a_0\lambda_i + a_1\lambda_{i-1} + \cdots + a_i\lambda_0 = 0, \qquad a_0\lambda_0 = 1$$

par conséquent si l'on fait:

$$h_{s+1,r+1} = \alpha_{1,r+1}\lambda_s + \alpha_{2,r+1}\lambda_{s-1} + \cdots + \alpha_{s+1,r+1}\lambda_0$$

on aura:

$$(4.)\qquad a_0 h_{m,r} + a_1 h_{m-1,r} + \cdots + a_{m-1} h_{1,r} = \alpha_{m,r}.$$

2.

Soit V le résultant des deux équations $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$; on a:

$$V = a_0^n \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)$$

et:

$$\frac{dV}{dx_s} = \frac{V}{\varphi(x_s)}\varphi'(x_s).$$

Or:

$$\frac{dV}{dx_s} = \frac{dV}{da_1}\frac{da_1}{dx_s} + \frac{dV}{da_2}\frac{da_2}{dx_s} + \cdots + \frac{dV}{da_n}\frac{da_n}{dx_s}$$

d'où l'on déduit:

$$\sum_1^n{}_s \frac{x_s^i\varphi(x_s)}{f'(x_s)}\frac{dV}{dx_s} = \sum_1^n{}_r \frac{dV}{da_r}\sum_1^n{}_s \frac{x_s^i\varphi(x_s)}{f'(x_s)}\frac{da_r}{dx_s}$$

et en observant que:

$$a_{r-1}S_i + a_{r-2}S_{i+1} + \cdots + a_0 S_{i+r-1} = -h_{i+1,r}$$

on aura:

$$V\sum_1^n{}_s \frac{x_s^i\varphi'(x_s)}{f'(x_s)} = \sum_1^n{}_r h_{i+1,r}\frac{dV}{da_r}.$$

On peut transformer cette équation, en posant $i=0,1,\ldots m-1$, et en ajoutant les équations qui en résultent, multipliées par $a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots a_0$. En effet on obtient:

$$V(a_{m-1}M_0 + a_{m-2}M_1 + \cdots + a_0 M_{m-1}) = \sum_1^n{}_r \alpha_{m,r}\frac{dV}{da_r}$$

où:

$$M_i = \sum_1^n{}_s \frac{x_s^i\varphi'(x_s)}{f'(x_s)};$$

et puisque l'on a par une formule connue:

$$a_0 M_{m-1} + a_1 M_{m-2} + \cdots + a_{m-1}M_0 = (n-m+1)c_{m-1}$$

on a enfin:

$$\sum_1^n{}_r \alpha_{m,r}\frac{dV}{da_r} = (n-m+1)c_{m-1}V.$$

Si dans cette équation l'on fait $m=1, 2, 3, \ldots n$, on obtient n équations qu'on peut nommer les équations caractéristiques du résultant. En supposant $\varphi(x) = f'(x)$ on obtient les équations analogues pour le discriminant de $f(x) = 0$; les trois premières desquelles contiennent la propriété du discriminant d'être un invariant de la forme du $n^{\text{ième}}$ degré à deux indéterminées.

3.

Par conséquent si l'on représente par V le discriminant de la forme du $n^{\text{ième}}$ degré:

$$f(x, y) = p_0 a_0 x^n + p_1 a_1 x^{n-1} y + \cdots + p_n a_n y^n$$

dans laquelle:

$$p_m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

on aura:

$$\sum_1^n {}_r \frac{1}{p_r} \alpha_{m,r} \frac{dV}{da_r} = (n-m+1)(n-m+2) p_{m-2} a_{m-2} V$$

où:

$$\alpha_{m,r} = \sum_1^{m-1} {}_s (r+m-2s) p_{s-1} p_{r+m-s-1} a_{s-1} a_{r+m-s-1} - (n-r+1) p_{m-1} p_{r-1} a_{m-1} a_{r-1}.$$

Si dans l'équation supérieure on fait $m = 1$ on a:

$$\sum_1^n {}_r \frac{1}{p_r} \alpha_{1,r} \frac{dV}{da_r} = -a_0 \sum_1^n {}_r r a_{r-1} \frac{dV}{da_r} = 0$$

et pareillement les autres $n-1$ équations peuvent être déduites de la suivante:

$$\sum_1^n {}_r \frac{1}{p_r} A_{m,r} \frac{dV}{da_r} = (n-m+1)(n-m+2) p_{m-2} a_{m-2} V,$$

où:

$$A_{m,r} = \alpha_{m,r} + (n-r+1) p_{m-1} p_{r-1} a_{m-1} a_{r-1},$$

en posant $m = 2, 3 \ldots n$.

Au moyen de ces équations on peut exprimer le discriminant d'une forme quelconque à deux indéterminées en fonction de ses invariants. Par exemple pour la forme du quatrième degré:

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \widehat{\,)}(x, y)^4$$

si l'on pose:

$$J_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2$$

$$J_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3$$

et:

$$V = J_2^3 + h J_3^2$$

les trois premières équations sont satisfaites, et la quatrième nous donne:

$$\sum_1^4{}_r \frac{1}{p_r} A_{4,r} \frac{dV}{da_r} = 12 a_2 V.$$

Mais en observant que:

$$\sum_1^4{}_r \frac{1}{p_r} A_{4,r} \frac{dJ_2}{da_r} = 12 J_3 + 4 a_2 J_2, \qquad \sum_1^4{}_r \frac{1}{p_r} A_{4,r} \frac{dJ_3}{da_r} = \tfrac{2}{3} J_2^2 + 6 a_2 J_3$$

on a:

$$3 J_2^2 (12 J_3 + 4 a_2 J_2) + 2 h J_3 (\tfrac{2}{3} J_2^2 + 6 a_2 J_3) = 12 a_2 V$$

de laquelle:

$$h = -27$$

ce que l'on sait déjà.

4.

Les relations données par les formules (3.) nous sont utiles pour transformer quelques expressions formées avec les quantités S_r en autres formées avec les quantités $\alpha_{r,s}$. Nous considérons ici les expressions de la forme suivante:

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{r-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{r-2} & S_{r-1} & \dots & S_{2r-3} \\ 1 & x & \dots & x^{r-1} \end{vmatrix}$$

lesquelles se présentent dans l'application du théorème de *Sturm* à la recherche du nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$; comme l'ont déjà demontré MM. *Sylvester* et *Joachimsthal*, et moi-même dans une note publiée dans les Annales de M. *Tortolini* (Juillet 1854).

Pour effectuer cette transformation j'observe que:

$$-h_{s+1,r+1} = a_0 S_{r+s} + a_1 S_{r+s-1} + \dots + a_r S_s.$$

Au moyen de cette formule et d'une propriété très-connue des déterminants nous obtenons une première transformation:

$$\Delta_r = (-1)^{r-1} \frac{1}{a_0^r} \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,r} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r-1,1} & h_{r-1,2} & \dots & h_{r-1,r} \\ p_1(x) & p_2(x) & \dots & p_r(x) \end{vmatrix}$$

et à cause de l'équation (4.) on a:

$$\varDelta_r = (-1)^{r-1}\frac{1}{a_0^{2r-1}}\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,r} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r-1,1} & \alpha_{r-1,2} & \dots & \alpha_{r-1,r} \\ p_1(x) & p_2(x) & \dots & p_r(x) \end{vmatrix}.$$

Les quantités $\varDelta_r$ sont, à un facteur près, les dénominateurs des réduites de la fraction continue dans laquelle on peut développer $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$; par conséquent les trois quantités $\varDelta_r$, $\varDelta_{r-1}$, $\varDelta_{r-2}$ seront liées par une équation, comme il a été démontré autrement par M. *Joachimsthal.*

Il est évident d'après les considérations supérieures qu'on aura:

$$V = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \dots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

résultat donné par M. *Jacobi* dans son mémoire „De eliminatione variabilis etc. —" (vol. XV de ce Journal).

Pavie, Janvier 1856.