Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1857
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0036
LOG Titel: Sur une formule de M. Cayley.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

32.

Sur une formule de M. *Cayley.*

(Par M. *Brioschi* à Pavie.)

M. *Cayley* a donné récemment une relation très-remarquable entre les covariants de la forme biquadratique:

$$u = (a_0, a_1 \ldots a_4 \widehat{)(} x, y)^4.$$

En indiquant par v le Hessien de la forme u, par δ le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \end{vmatrix}$$

et en posant:

$$v = \overline{12}^2 H, \qquad \delta = 8.\overline{12}^2 \Phi$$

la formule de M. *Cayley* est la suivante:

$$\Phi^2 = J_2 H u^2 - J_3 u^3 - 4H^3;$$

J_2, J_3 étant les invariants quadratique et cubique de la forme u. M. *Cayley* a démontré aussi comme on peut déduire de la résolution de l'équation:

$$(1.) \qquad J_3 u^3 - J_2 H u^2 + 4H^3 = 0$$

celle de l'équation $u = 0$. Or on peut observer que l'équation (1.) résulte de l'élimination des quantités a, b entre les deux équations:

$$au + bH = 0$$

$$4a^3 - J_2 ab^2 - J_3 b^3 = 0$$

de la seconde desquelles, ainsi que M. *Hesse* l'a démontré (T. XLI pag. 253 de ce Journal) on obtient des valeurs du rapport $a:b$ qui rendent l'expression $au + bH$ égale au produit des carrés de deux fonctions linéaires. L'équation $\Phi = 0$ est par conséquent l'équation du sixième degré considerée par M. *Hesse* (pag. 259), et dont les racines ont la propriété d'être quatre à quatre en rapport harmonique.

Le covariant Φ joue dans la théorie des formes biquadratiques un rôle analogue à celui que joue le Hessien dans la théorie des formes cubiques. On trouve, par exemple, que l'invariant quadratique de cette fonction est égal à

$\frac{1}{6}$ du discriminant D de la forme u; que, posant:

$$U = au + bH$$

et indiquant par V le Hessien de la forme U, de sorte que

$$V = Au + BH, \quad A = 12b(2aJ_2 + 3bJ_3), \quad B = 12(12a^2 - b^2J_2),$$

on a:

$$\begin{vmatrix} \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} \\ \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} \end{vmatrix} = 8\Phi(aB - bA).$$

Par conséquent si l'on pose:

$$U = (\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_4 \widehat{)} (x, y)^4$$

où:

$$\alpha_0 = \frac{dD}{da_4}, \quad 4\alpha_1 = -\frac{dD}{da_3}, \quad 6\alpha_2 = \frac{dD}{da_2}, \quad 4\alpha_3 = -\frac{dD}{da_1}, \quad \alpha_4 = \frac{dD}{da_0}$$

on aura:

$$a = 3J_2^2, \qquad b = -54J_3, \qquad aB - bA = \overline{12}^2.27D(J_2^3 - 54J_3^2)$$

et en représentant par Ψ le covariant du sixième degré de la forme U on obtient:

$$\Psi = 27\Phi D(J_2^3 - 54J_3^2).$$

De cette dernière équation on déduit entre D et le discriminant Δ de la forme U, la relation déjà donnée par M. *Schläfli:*

$$\Delta = 729D^3(J_2^3 - 54J_3^2)$$

On trouve pour les formes cubiques à trois indéterminées une équation analogue à (1.). Soit u la forme cubique, v son Hessien; J_4, J_6 les invariants du quatrième et du sixième degrés de la même forme. En posant: $v = 6^3.H$ et en éliminant les quantités a, b entre les deux équations:

$$au + bH = 0$$

$$27a^4 - 18J_4a^2b^2 - J_6ab^3 - J_4^2b^4 = 0$$

on obtient l'équation du douzième degré:

$$27H^4 - 18J_4H^2u^2 + J_6Hu^3 - J_4^2u^4 = 0$$

laquelle sera décomposable en douze facteurs linéaires, qui donneront les quatre systèmes de droites qui passent par les points d'inflexion de la courbe $u = 0$.

Pavie, Janvier 1856.