

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1857

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0053

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0053

LOG Id: LOG_0036

LOG Titel: Sur une formule de M. Cayley.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

32.

Sur une formule de M. *Cayley*.(Par M. *Brioschi* à Pavie.)

M. *Cayley* a donné récemment une relation très-remarquable entre les covariants de la forme biquadratique :

$$u = (a_0, a_1 \dots a_4) \widehat{(x, y)^4}.$$

En indiquant par v le Hessien de la forme u , par δ le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \end{vmatrix}$$

et en posant :

$$v = \overline{12}^2 H, \quad \delta = 8 \cdot \overline{12}^2 \Phi$$

la formule de M. *Cayley* est la suivante :

$$\Phi^2 = J_2 H u^2 - J_3 u^3 - 4 H^3;$$

J_2 , J_3 étant les invariants quadratique et cubique de la forme u . M. *Cayley* a démontré aussi comme on peut déduire de la résolution de l'équation :

$$(1.) \quad J_3 u^3 - J_2 H u^2 + 4 H^3 = 0$$

celle de l'équation $u = 0$. Or on peut observer que l'équation (1.) résulte de l'élimination des quantités a , b entre les deux équations :

$$\begin{aligned} au + bH &= 0 \\ 4a^3 - J_2 ab^2 - J_3 b^3 &= 0 \end{aligned}$$

de la seconde desquelles, ainsi que M. *Hesse* l'a démontré (T. XLII pag. 253 de ce Journal) on obtient des valeurs du rapport $a:b$ qui rendent l'expression $au + bH$ égale au produit des carrés de deux fonctions linéaires. L'équation $\Phi = 0$ est par conséquent l'équation du sixième degré considérée par M. *Hesse* (pag. 259), et dont les racines ont la propriété d'être quatre à quatre en rapport harmonique.

Le covariant Φ joue dans la théorie des formes biquadratiques un rôle analogue à celui que joue le Hessien dans la théorie des formes cubiques. On trouve, par exemple, que l'invariant quadratique de cette fonction est égal à

à du discriminant D de la forme u ; que, posant:

$$U = au + bH$$

et indiquant par V le Hessien de la forme U , de sorte que

$$V = Au + BH, \quad A = 12b(2aJ_2 + 3bJ_3), \quad B = 12(12a^2 - b^2J_2),$$

on a:

$$\begin{vmatrix} \frac{dV}{dx} & \frac{dV}{dy} \\ \frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} \end{vmatrix} = 8\Phi(aB - bA).$$

Par conséquent si l'on pose:

$$U = (\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_4)(x, y)^4$$

où:

$$\alpha_0 = \frac{dD}{da_4}, \quad 4\alpha_1 = -\frac{dD}{da_3}, \quad 6\alpha_2 = \frac{dD}{da_2}, \quad 4\alpha_3 = -\frac{dD}{da_1}, \quad \alpha_4 = \frac{dD}{da_0}$$

on aura:

$$a = 3J_2^2, \quad b = -54J_3, \quad aB - bA = \overline{12}^2 \cdot 27D(J_2^3 - 54J_3^2)$$

et en représentant par Ψ le covariant du sixième degré de la forme U on obtient:

$$\Psi = 27\Phi D(J_2^3 - 54J_3^2).$$

De cette dernière équation on déduit entre D et le discriminant Δ de la forme U , la relation déjà donnée par M. Schläfli:

$$\Delta = 729D^3(J_2^3 - 54J_3^2)$$

On trouve pour les formes cubiques à trois indéterminées une équation analogue à (1.). Soit u la forme cubique, v son Hessien; J_4 , J_6 les invariants du quatrième et du sixième degrés de la même forme. En posant: $v = 6^3 \cdot H$ et en éliminant les quantités a , b entre les deux équations:

$$au + bH = 0$$

$$27a^4 - 18J_4a^2b^2 - J_6ab^3 - J_4^2b^4 = 0$$

on obtient l'équation du douzième degré:

$$27H^4 - 18J_4H^2u^2 + J_6Hu^3 - J_4^2u^4 = 0$$

laquelle sera décomposable en douze facteurs linéaires, qui donneront les quatre systèmes de droites qui passent par les points d'infexion de la courbe $u = 0$.

Pavie, Janvier 1856.