

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1858

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0055

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0055](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0055)

**LOG Id:** LOG\_0008

**LOG Titel:** Über die Gaußische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## 5.

# Über die *Gaußsische* Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Montjoie.)

Das Folgende enthält eine neue Darstellung des bekannten, von *Gauß* (Comm. Gott. rec. 1814—15) erfundenen Verfahrens zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Im Anschluß hieran wird dasselbe in der Weise verallgemeinert, daß zu einer Anzahl beliebig gegebener Zwischenwerthe die übrigen nach den von *Gauß* aufgestellten Prinzipien ausgewählt werden. Diese neue Methode kann in verschiedenen Beziehungen von Nutzen sein, wie weiter unten nachgewiesen werden soll.

## 1.

Da die spätern Entwicklungen in stetigem Zusammenhange mit den Formeln für die mechanische Quadratur im Allgemeinen stehen, so kann eine kurze Herleitung der letztern nicht füglich umgangen werden. Sei

$$(1.) \quad f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

so fällt die Funktion

$$(2.) \quad \varphi(x) = f(x) \left\{ \frac{F(a_1)}{f'(a_1)(x - a_1)} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)(x - a_2)} + \dots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)(x - a_n)} \right\}$$

mit der Funktion  $F(x)$  für die Werthe  $x = a_1, a_2, \dots, a_n$  zusammen, und es ist  $\varphi(a_1) = F(a_1), \varphi(a_2) = F(a_2), \dots, \varphi(a_n) = F(a_n)$ . Aus (2.) folgt

$$(3.) \quad \int_{-1}^1 \varphi(x) \partial x \\ = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{x - a_1} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{x - a_2} + \dots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)} \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{x - a_n},$$

und dieser Ausdruck ist bis auf einen bestimmten Fehler gleich dem Integrale  $\int_{-1}^1 F(x) \partial x$ .

Um die in (3.) angedeuteten Integrationen auszuführen, ist im Allgemeinen folgender Weg einzuschlagen. Ist  $u$  eine beliebige, ausserhalb der

Gränzen  $-1$  und  $1$  liegende Größe, so hat man identisch

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{x-u} &= \int_{-1}^1 \frac{f(u) \partial x}{x-u} + \int_{-1}^1 \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \partial x \\ &= f(u) \lg \frac{u-1}{u+1} + \int_{-1}^1 \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \partial x. \end{aligned}$$

Da  $f(x)$  eine rationale ganze Funktion von  $x$  vom  $n^{\text{ten}}$  Grade ist, so ist  $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$  ebenfalls eine solche Funktion vom  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grade von  $x$  wie von  $u$ . Setzt man demnach

$$(4.) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \partial x = f_1(u),$$

so ist  $f_1(u)$  eine ganze Funktion  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grades, und

$$(5.) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{x-u} = f(u) \lg \frac{u-1}{u+1} + f_1(u).$$

Diese Formel bleibt offenbar selbst dann bestehen, wenn  $u$  zwischen die Grenzen  $-1$  und  $+1$  fällt, sobald nur die unter dem Integral linker Hand stehende Funktion  $\frac{f(x)}{x-u}$  innerhalb jener Gränzen überall endlich bleibt. Die Formel (5.) gilt daher, wenn  $u$  einer der Größen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  gleich gesetzt wird, unter allen Umständen, mögen diese Größen außerhalb oder innerhalb der erwähnten Gränzen liegen. Dadurch geht die Gleichung (3.) in folgende über:

$$(6.) \quad \int_{-1}^1 \varphi(x) \partial x = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} F(a_1) + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} F(a_2) + \dots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} F(a_n),$$

und man hat annähernd

$$(7.) \quad \int_{-1}^1 F(x) \partial x = \int_{-1}^1 \varphi(x) \partial x.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche folgt:

$$\frac{f_1(u)}{f(u)} = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} \cdot \frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} \cdot \frac{1}{u-a_2} + \dots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} \cdot \frac{1}{u-a_n},$$

so daß  $\frac{f_1(u)}{f(u)}$  der mittelst der Zwischenwerthe  $a_1, a_2, \dots, a_n$  berechnete angenäherte Werth des Integrals  $\int_{-1}^1 \frac{\partial x}{u-x}$  ist; und wenn man dies in (5.) anwendet

$$(8.) \quad \begin{aligned} &\int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{x-u} \\ &= f(u) \left\{ \lg \frac{u-1}{u+1} + \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} \cdot \frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} \cdot \frac{1}{u-a_2} + \dots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} \cdot \frac{1}{u-a_n} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man von jetzt an

$$(9.) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{u-x} = f_2(u),$$

so ist wegen (5.)

$$(10.) \quad f(u) \lg \frac{u+1}{u-1} = f_1(u) + f_2(u),$$

und wegen (8.)

$$(11.) \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial x}{u-x} - \left\{ \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} \cdot \frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} \cdot \frac{1}{u-a_2} + \dots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} \cdot \frac{1}{u-a_n} \right\} = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Es ist somit  $\frac{f_2(u)}{f(u)}$  der Unterschied zwischen dem wahren und dem angenäherten Werthe von  $\int_{-1}^1 \frac{\partial x}{u-x} = \lg \frac{u+1}{u-1}$ . Entwickelt man daher in (11.) die linke Seite nach absteigenden Potenzen von  $u$ , und setzt den Ueberschuß des wahren Werthes von  $\int_{-1}^1 x^m \partial x$  über den angenäherten Werth desselben, nämlich

$$(12.) \quad \int_{-1}^1 x^m \partial x - \left\{ \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} a_1^m + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} a_2^m + \dots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} a_n^m \right\} = k_m,$$

so erhält man:

$$(13.) \quad \frac{k_0}{u} + \frac{k_1}{u^2} + \frac{k_2}{u^3} + \dots = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Setzt man andererseits

$$(14.) \quad \int_{-1}^1 f(x) \partial x = A_1,$$

und allgemein

$$(15.) \quad \int_{-1}^1 f(x) x^s \partial x = A_{s+1},$$

ferner

$$\frac{1}{f(u)} = \frac{A'}{u^n} + \frac{A''}{u^{n+1}} + \frac{A'''}{u^{n+2}} + \dots,$$

so ist

$$(16.) \quad f_2(u) = \frac{A_1}{u} + \frac{A_2}{u^2} + \frac{A_3}{u^3} + \dots$$

und

$$(17.) \quad \frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{A_1 A'}{u^{n+1}} + \frac{A_2 A' + A_1 A''}{u^{n+2}} + \frac{A_3 A' + A_2 A'' + A_1 A'''}{u^{n+3}} + \dots,$$

mithin  $k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 0$ . Die Formel (7.) liefert also allemal den genauen Werth von  $\int_{-1}^1 F(x) \partial x$ , so oft  $F(x)$  eine ganze Funktion ist, welche

den  $(n-1)$ ten Grad nicht übersteigt. Man hat ferner

$$k_n = A_1 A', \quad k_{n+1} = A_2 A' + A_1 A'', \quad k_{n+2} = A_3 A' + A_2 A'' + A_1 A''', \quad \text{etc.}$$

Kann man nun  $f(u)$  so bestimmen, dafs in der Entwicklung von  $f_2(u)$  die  $m$  ersten Glieder, also in der Entwicklung von  $f(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$  die Glieder, welche  $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^m}$  enthalten, von selbst wegfallen, so beginnt die Reihe für  $\frac{f_2(u)}{f(u)}$  mit dem Term  $\frac{k_{m+n}}{u^{m+n+1}}$ , und die Formel (7.) ist für alle ganzen Funktionen vom  $(m+n-1)$ ten oder einem niedrigeren Grade vollkommen streng. Gleichzeitig ist

$$k_{n+m} = A_{m+1} A', \quad k_{n+m+1} = A_{m+2} A' + A_{m+1} A'', \quad \text{etc.}$$

Es wird sich bald zeigen, dafs der höchste Grad von Genauigkeit, welcher mit der vorausgesetzten Form von  $f(x)$  erreicht werden kann, dem Falle entspricht, wo  $m = n$  ist. Es ist dies der nämliche Fall, den *Gauss* in der oben angeführten Abhandlung, und *Jacobi* in gegenwärtigem Journal behandelt haben.

## 2.

Das Folgende beruht auf diesem Lemma:

Unterwirft man eine ganze Funktion  $f(u)$  vom  $n$ ten Grade der Bedingung, dafs aus der absteigenden Entwicklung von  $f(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$  die Terme, welche  $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^n}$  enthalten, von selbst wegfallen, so giebt es stets eine Funktion, welche diesen Bedingungen genügt, und dieselbe ist bis auf einen constanten Faktor bestimmt. Verlangt man auferdem, dafs das Glied mit  $\frac{1}{u^{n+1}}$  verschwinde, so wird die Funktion  $f(u)$  identisch gleich Null, indem jener constante Faktor den bestimmten Werth Null erhält.

Dasselbe ergibt sich leicht mittelst der Formeln (10.) und (14.), denen zufolge allgemein der Coefficient von  $\frac{1}{u}$  in der absteigenden Entwicklung von  $F(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$  gleich  $\int_{-1}^1 F(x) \partial x$  ist, vorausgesetzt, dafs  $F(u)$  eine rationale ganze Funktion ist. Sei zunächst  $f(u)$  so bestimmt, dafs in (10.)  $f_2(u)$  die Form

$$f_2(u) = \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{u^{n+3}} + \dots$$

hat, und sei ferner  $f(u) = P + Qi$ , wo  $P$  und  $Q$  reelle ganze Funktionen von  $u$  sind; so multiplicire man die Gleichung (10.) mit  $P - Qi$ . Dann ist  $(P - Qi)f_1(u)$  wieder eine ganze Funktion von  $u$ , während die Entwicklung

von  $(P - Qi)f_2(u)$  mit dem Term  $\frac{1}{u^2}$  beginnt. Also ist der Faktor von  $\frac{1}{u}$  gleich Null. Da derselbe aber gleich

$$\int_{-1}^1 f(u)(P - Qi) \partial u = \int_{-1}^1 (P^2 + Q^2) \partial u$$

ist, und die Elemente dieses Integrals alle positiv sind, so muß, wenn das ganze Integral gleich Null sein soll, jedes einzelne Element verschwinden, also wie behauptet,  $f(u)$  identisch gleich Null sein.

Da somit die, in Bezug auf die unbekanntnen Coefficienten der Funktion  $f(u)$  linearen Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots \quad A_n = 0, \quad A_{n+1} = 0$$

von einander unabhängig sind, indem sich aus ihnen für jede der  $(n+1)$  unbekanntnen Gröfsen ein einziger Werth ergibt, so folgt, dafs man unter den  $(n+1)$  Coefficienten von  $f(u)$  wenigstens auf *eine* Art ein System von  $n$  derselben so auswählen kann, dafs die  $n$  Gleichungen

$$(A.) \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots \quad A_n = 0$$

in Bezug auf dieses System von Unbekanntnen von einander unabhängig sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßte man, wie leicht zu sehen ist, aus den Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad A_n = \alpha_n, \quad A_{n+1} = \alpha_{n+1}$$

sämmtliche Unbekanntnen eliminiren können, was nach dem eben bewiesenen nicht möglich ist.

Da endlich die Gleichungen (A.) linear sind, so bestimmen sie das Verhältnifs von  $n$  Coefficienten zum  $(n+1)$ ten auf eine einzige Weise, wodurch obiges Lemma in allen seinen Theilen bewiesen ist.

Differentiirt man nun die Gleichung (10.), und multiplicirt mit  $u^2 - 1$ , so folgt:

$$(18.) \quad (u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \lg \frac{u+1}{u-1} = 2f + (u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} + (u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u},$$

und eine nochmalige Differentiation giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \right) \lg \frac{u+1}{u-1} = 4 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right).$$

Diese beiden Gleichungen haben wieder die Form von (10.). Nimmt man aber jetzt an, dafs  $f_2(u)$  die Potenzen  $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^n}$  nicht enthält, dafs also

$$f_2 = \frac{A_{n+1}}{u^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \dots$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) = \frac{n(n+1)A_{n+1}}{u^{n+1}} + \dots,$$

so dafs die Funktion  $\frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) - n(n+1)f_2$ , nach negativen Potenzen von  $u$  entwickelt, die Potenzen  $\frac{1}{u}$ ,  $\frac{1}{u^2}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{1}{u^n}$ ,  $\frac{1}{u^{n+1}}$  nicht enthält. Multipliziert man daher die Gleichung (10.) mit  $n(n+1)$  und subtrahirt sie von der vorstehenden, so folgt

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \right) - n(n+1)f \right\} \lg \frac{u+1}{u-1} \\ &= 4 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) - n(n+1)f_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) - n(n+1)f_2 \right\}; \end{aligned}$$

und da der Faktor von  $\lg \frac{u+1}{u-1}$  den  $(n+1)^{\text{ten}}$  Grad nicht erreicht, so folgt vermöge des obigen Lemmas, dafs er identisch gleich Null sein mufs. Da ferner auf der rechten Seite die drei ersten Glieder nur positive Potenzen von  $u$  enthalten, während das Folgende sich nur aus negativen Potenzen von  $u$  zusammensetzt, und da diese beiden Theile für sich verschwinden müssen, so haben wir

$$(19.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \right) - n(n+1)f = 0,$$

$$(20.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) - n(n+1)f_2 = 0,$$

$$(21.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) - n(n+1)f_1 + 4 \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Nach den bekannten Untersuchungen über die Gleichung (19.) folgt hieraus

$$\begin{aligned} (22.) \quad f(u) &= P_n(u) = \frac{\partial^n (u^2 - 1)^n}{2^n \Gamma(n+1) \partial u^n} \\ &= \frac{1.3.5 \dots 2n-1}{1.2.3 \dots n} u^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1.3.5 \dots 2n-3}{1.2.3 \dots n-2} u^{n-2} + \dots, \end{aligned}$$

und wegen (9.)

$$(23.) \quad f_2(u) = Q_n(u) = \int_{-1}^1 \frac{{}^1 P_n(x) \partial x}{u-x},$$

welche Bezeichnung von der gewöhnlichen nur wenig abweicht. Sodann folgt, dafs die Gleichung

$$(24.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2 - 1) \frac{\partial U}{\partial u} \right) = n(n+1)U - 4 \frac{\partial P_n(u)}{\partial u}$$

zu ihrem completen Integrale einen Ausdruck von der Form

$$(25.) \quad U = AP_n(u) + BQ_n(u) + R_n(u)$$

hat, wo  $R_n(u)$  eine rationale ganze Funktion vom  $(n-1)$ ten Grade, und nichts Anderes, als die bisher durch  $f_1(u)$  bezeichnete Funktion ist. Die Funktionen  $P, Q, R$  stehen in Folge der Gleichung (10.) in der Relation

$$(26.) \quad P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} = Q_n(u) + R_n(u),$$

oder auch

$$(27.) \quad Q_n(u) = P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} - R_n(u),$$

so dafs nur noch die Funktion  $R_n(u)$  zu bestimmen übrig bleibt. Zuvor will ich aber noch die Formeln

$$(28.) \quad (u^2-1)P'_n(u) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}(u) - P_{n-1}(u)),$$

$$(29.) \quad \begin{cases} (2n+1)uP_n(u) = (n+1)P_{n+1}(u) + nP_{n-1}(u), \\ (2n+1)uQ_n(u) = (n+1)Q_{n+1}(u) + nQ_{n-1}(u), \\ (2n+1)uR_n(u) = (n+1)R_{n+1}(u) + nR_{n-1}(u) \end{cases}$$

einschalten, welche sich auf verschiedene Art, unter anderm auch mittelst obigen Lemma's beweisen lassen. Setzt man z. B. in (18.)  $P_n(u)$  für  $f(u)$  ein, so beginnt die Entwicklung von  $(u^2-1)\frac{\partial f_2}{\partial u}$  mit dem Term  $-\frac{(n+1)A_{n+1}}{u^n}$ . Bedenkt man nun, dafs man setzen kann

$$(u^2-1)P'_n(u) = aP_{n+1}(u) + bP_{n-1}(u) + cP_{n-3}(u) + \dots,$$

so folgt aus unserm Lemma, dafs auf der rechten Seite alle Coefficienten, mit Ausnahme von  $a$  und  $b$ , verschwinden. Die Bestimmung der Constanten  $a$  und  $b$  hat keine Schwierigkeiten. — Zur Herleitung der Gleichungen (29.) hat man nur (26.) mit  $u$  zu multipliciren, und ganz ähnliche Betrachtungen anzustellen. Diese Gleichungen stimmen übrigens im Wesentlichen mit denen überein, deren sich *Gaußs* in den art. 17. und 18. seiner Abhandlung bedient.

Differentiirt man die Gleichung (28.), so folgt wegen (19.)

$$P'_{n+1}(u) - P'_{n-1}(u) = (2n+1)P_n(u),$$

also auch

$$P'_{n-1}(u) - P'_{n-3}(u) = (2n-3)P_{n-2}(u),$$

u. s. f., woraus durch Addition

$$(30.) \quad P'_{n+1}(u) = (2n+1)P_n(u) + (2n-3)P_{n-2}(u) + (2n-7)P_{n-4}(u) + \dots$$

folgt. Vermöge dieser Formel geht die Gleichung (24.) in folgende über:

$$(31.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( (u^2-1) \frac{\partial U}{\partial u} \right) - n(n+1)U \\ + 4 \{ (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \dots \} = 0.$$

Um nun zur Bestimmung von  $R_n(u)$  überzugehen, bemerke man, daß die Gleichung (26.) durch Aenderung des Vorzeichens von  $u$  und nachfolgende Multiplication mit  $(-1)^{n-1}$  folgende Gestalt annimmt:

$$P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} = (-1)^{n+1} Q_n(-u) + (-1)^{n-1} R_n(-u),$$

woraus durch Vergleichung mit (26.)  $R_n(-u) = (-1)^{n-1} R_n(u)$  folgt. Da somit  $R_n(u)$  nur die Potenzen  $u^{n-1}$ ,  $u^{n-3}$ ,  $u^{n-5}$  etc. enthalten kann, so hat es die Form

$$R_n(u) = a_1 P_{n-1}(u) + a_3 P_{n-3}(u) + a_5 P_{n-5}(u) + \dots$$

Setzt man dies in (31.) für  $U$  ein, so folgt:

$$\begin{aligned} 0 = a_1 [(n-1)n - n(n+1)] P_{n-1} &+ a_3 [(n-3)(n-2) - n(n+1)] P_{n-3} \\ &+ 4(2n-1) P_{n-1} &+ 4(2n-5) P_{n-3} \\ &+ a_5 [(n-5)(n-6) - n(n+1)] P_{n-5} &+ \dots \\ &+ 4(2n-9) P_{n-5} &+ \dots, \end{aligned}$$

und hieraus

$$a_1 = 2 \frac{2n-1}{1 \cdot n}, \quad a_3 = 2 \frac{2n-5}{3(n-1)}, \quad a_5 = 2 \frac{2n-9}{5(n-2)}, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die verlangten Funktionen  $f$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  vollständig bestimmt; es ist nämlich:

$$(32.) \left\{ \begin{aligned} f(u) = P_n(u) &= \frac{\partial^n (u^2-1)^n}{2^n \Gamma(n+1) \partial u^n}, \\ f_1(u) = R_n(u) &= 2 \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(u) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(u) + \dots \right\}, \\ f_2(u) = Q_n(u) &= P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} - R_n(u) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) \partial x}{u-x} \\ &= 2 \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2s+1 \cdot 2s+2 \dots 2s+n}{2s+1 \cdot 2s+3 \dots 2s+2n+1} \cdot \frac{1}{u^{n+2s+1}}. \end{aligned} \right.$$

Den allgemeinen Ausdruck der Funktion  $P_n(u)$  hat *Gauß* in seiner Abhandlung gegeben, doch rührt die elegante, obenstehende Form derselben von *Jacobi* her. Auch findet man bei *Gauß* den Ausdruck von  $Q_n(u)$  sowohl in Form einer hypergeometrischen Reihe, wie in seiner Reduction auf einen algebraischen und einen transcendenten Theil.

Ogleich auf diese Weise die Coefficienten in der Gleichung (6.) explicite dargestellt sind, so giebt es doch mit Rücksicht darauf, daß in den

Größen  $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$  dort für  $u$  nur solche Werthe zu substituiren sind, welche  $f(u)$  verschwinden machen, noch einfachere Darstellungsweisen für dieselben. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} ((u^2-1)P'_n(u)) &= n(n+1)P_n(u), \\ \frac{\partial}{\partial u} ((u^2-1)R'_n(u)) &= n(n+1)R_n(u) - 4P'_n(u) \end{aligned}$$

folgt durch Elimination von  $n(n+1)$ :

$$P_n \frac{\partial}{\partial u} ((u^2-1)R'_n) - R_n \frac{\partial}{\partial u} ((u^2-1)P'_n) + 4P_n P'_n = 0,$$

und hieraus durch theilweise Integration

$$(u^2-1)(P_n R'_n - R_n P'_n) + 2P_n^2 = a.$$

Für  $u=1$  ergibt sich hieraus  $a=2$ , also ist identisch

$$(33.) \quad \frac{u^2-1}{2} \{P_n(u)R'_n(u) - R_n(u)P'_n(u)\} + P_n^2(u) = 1,$$

mithin für alle Werthe von  $u$ , für welche  $P_n(u)=0$  ist:

$$(34.) \quad \frac{1-u^2}{2} P'_n(u) R_n(u) = 1.$$

Daraus folgt für die nämlichen Werthe von  $u$ :

$$(35.) \quad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{R_n(u)}{P'_n(u)} = \frac{1-u^2}{2} (R_n(u))^2 = \frac{2}{(1-u^2)(P'_n(u))^2}.$$

Die erste dieser Darstellungen ist von *Gaußs* gegeben; die zweite dagegen hat den Vorzug, dafs sie die Berechnung der Coefficienten  $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$  blofs von der Funktion  $P'_n(u)$  abhängig macht, deren numerischer Werth bei der Auflösung der Gleichung  $P_n(u)=0$  gleichzeitig mit der Wurzel  $u$  bestimmt wird.

Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Wurzeln der Gleichung  $P_n(u)=0$ , so ist

$$(36.) \quad P_n(u) = \frac{1.3.5\dots 2n-1}{1.2.3\dots n} (u-a_1)(u-a_2)\dots(u-a_n),$$

folglich nach der zweiten Darstellungsweise

$$(37.) \quad \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{2 \left( \frac{1.2.3\dots n}{1.3.5\dots 2n-1} \right)^2}{(1-a_1)(1+a_1)[(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)]^2},$$

so dafs sämtliche Coefficienten in einfache, leicht zu bildende Faktoren zerlegt sind. Ich bemerke noch folgende Formeln, welche sich unter der Vor-

aussetzung, daß  $P_n(u) = 0$  sei, aus (28.) und (29.) leicht ergeben:

$$(38.) \quad (1-u^2)P'_n(u) = nP_{n-1}(u) = -(n+1)P_{n+1}(u),$$

$$(39.) \quad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{2(1-u^2)}{(nP_{n-1}(u))^2} = \frac{2(1-u^2)}{((n+1)P_{n+1}(u))^2}.$$

Diese Ausdrücke treten durch Auflösung in lineare Faktoren in eine interessante Beziehung zum Produkte

$$\frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)} \cdot \frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)} \dots \frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}.$$

Dies vorangeschickt haben wir das Resultat, daß, wenn  $F(x)$  eine rationale ganze Funktion von  $x$  ist, welche den  $(2n-1)^{\text{ten}}$  Grad nicht überschreitet, man die streng richtige Gleichung hat

$$(40.) \quad \int_{-1}^1 F(x) \partial x = \frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)} F(a_1) + \frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)} F(a_2) + \dots + \frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)} F(a_n).$$

Läßt sich ferner  $F(x)$  in eine nach positiven ganzen Potenzen von  $x$  fortschreitende Reihe entwickeln, welche für alle zwischen  $-1$  und  $1$  liegenden Werthe von  $x$  so stark convergirt, daß man die Reihe, ohne ihren Werth merklich zu ändern, auf ihre  $2n$  ersten Glieder reduciren kann, so gilt die Formel (40.) wieder ohne merklichen Fehler. Dasselbe gilt, wenn man vermöge der besondern Beschaffenheit von  $F(x)$  alle auf das  $2n^{\text{te}}$  folgenden Glieder in den sogenannten Rest der Reihe vereinigen muß, wofern nur dieser Rest gegen  $F(x)$  vernachlässigt werden darf.

Um hiervon eine Anwendung zu geben, werde ich die Interpolationsformel (2.) für den Fall, wo die Größen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Wurzeln der Gleichung  $P_n(u) = 0$  sind, in eine andere Form bringen. Ich erinnere zu dem Zwecke an die bekannten Formeln

$$\int_{-1}^1 P_\mu(x) P_\nu(x) \partial x = 0, \quad \int_{-1}^1 P_\nu(x) P_\nu(x) \partial x = \frac{2}{2\nu+1},$$

von denen sich die erstere aus der Betrachtung des Produktes  $P_\mu(u) Q_{m+\nu}(u)$  unter Anwendung der Gleichung (14.) leicht ergibt. — Ist nun  $\mu + \nu < 2n$  und auch  $2\nu < 2n$ , so muß man mittelst der Formel (40.) den genauen Werth dieser Integrale erhalten, und es ist somit

$$(41.) \quad \sum P_\mu(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} = 0$$

$$(42.) \quad \sum P_\nu(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} = \frac{2}{2\nu+1},$$

wo die Summen sich auf die Werthe  $a = a_1, a_2, \dots, a_n$  beziehen. Will man

jetzt die Funktion  $F(x)$  durch eine Funktion  $f(x)$  vom  $(n-1)$ ten Grade ersetzen, welche mit ihr für die Werthe  $x = a_1, a_2, \dots, a_n$  übereinstimmen soll, so kann man setzen

$$f(x) = \beta P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(x),$$

und hat zur Bestimmung der Coefficienten  $\beta, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$  die Gleichungen

$$F(a_1) = \beta P_0(a_1) + \beta_1 P_1(a_1) + \beta_2 P_2(a_1) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_1)$$

$$F(a_2) = \beta P_0(a_2) + \beta_1 P_1(a_2) + \beta_2 P_2(a_2) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F(a_n) = \beta P_0(a_n) + \beta_1 P_1(a_n) + \beta_2 P_2(a_n) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_n).$$

Multiplicirt man diese der Reihe nach mit

$$P_\nu(a_1) \frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)}, \quad P_\nu(a_2) \frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)}, \quad \dots \quad P_\nu(a_n) \frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}$$

und addirt, so fallen wegen (41.) alle  $\beta$  weg, deren Index von  $\nu$  verschieden ist: da hingegen nach (42.) der Coefficient von  $\beta_\nu$  gleich  $\frac{2}{2\nu+1}$  ist, so folgt

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \sum F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)},$$

wo die Summe wie oben zu interpretiren ist. Die so bestimmte Funktion  $f(x)$  ist mit der durch die Gleichung (2.) definirten  $\varphi(x)$  identisch, da beides rationale ganze Funktionen  $(n-1)$ te Grades sind, welche für  $n$  Werthe von  $x$  mit einander übereinstimmen. Es ist also

$$(43.) \quad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \sum F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)}.$$

Ist  $F(x)$  eine ganze Funktion  $(n-1)$ ten Grades, so fällt diese Formel mit der bekannten Entwicklung zusammen. Setzt man z. B.  $F(x) = \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y}$ ,

so ist  $\varphi(x) = F(x)$ , ferner  $F(a_s) = \frac{P_n(y)}{y-a_s}$ , mithin

$$\begin{aligned} \beta_\nu &= \frac{2\nu+1}{2} P_n(y) \sum \frac{P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \\ &= \frac{2\nu+1}{2} \left\{ P_\nu(y) \sum \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \frac{P_n(y)}{y-a} - P_n(y) \sum \frac{P_\nu(y) - P_\nu(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdrücke ist die erste Summe gleich  $R_n(y)$ ; die andere kann, da  $\frac{P_\nu(y) - P_\nu(x)}{y-x}$  eine ganze Funktion von  $x$  ist, welche den  $2\nu$ ten Grad nicht erreicht, nach (40.) durch das Integral  $\int_{-1}^1 \frac{P_\nu(y) - P_\nu(x)}{y-x} \partial x = R_\nu(y)$  ersetzt

werden. Folglich ist

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} (P_\nu(y)R_n(y) - P_n(y)R_\nu(y))$$

und

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} = \sum_0^{n-1} \frac{2\nu+1}{2} \{P_\nu(y)R_n(y) - P_n(y)R_\nu(y)\} P_\nu(x).$$

Setzt man hier  $tx$  und  $ty$  statt  $x$  und  $y$ , so überzeugt man sich leicht, daß  $\beta_\nu$  höchstens vom  $(n-\nu-1)$ ten Grade sein kann.

Die erzeugende Funktion der Ausdrücke

$$\Pi_m = P_n(u)R_{n+m}(u) - P_{n+m}(u)R_n(u),$$

nämlich  $v = \sum_0^\infty \Pi_m x^m$ , genügt der Differentialgleichung

$$(1 - 2ux + x^2) \frac{\partial x^\nu v}{\partial x} + (x-u)x^\nu v = 2x^\nu,$$

wie man durch Substitution der Reihe für  $v$  mittelst (29.) leicht verifiziert; und es findet sich

$$v = \frac{2}{x^n \sqrt{(1-2ux+x^2)}} \int_0^x \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(1-2ux+x^2)}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\Pi_{m+1} = 2 \sum_0^m \frac{P_s(u)P_{m-s}(u)}{n+s+1},$$

also wenn  $\nu < n$ :

$$P_\nu R_n - P_n R_\nu = 2 \sum_0^{n-\nu-1} \frac{P_s P_{n-\nu-s-1}}{\nu+s+1},$$

wodurch die oben nachgewiesene Reduktion bewerkstelligt ist.

Eine interessantere, auch in der Folge nützliche Anwendung von (43.) ist folgende. Setzt man in dieser Formel

$$F(x) = \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)}{x-y},$$

so erhält man wieder  $\varphi(x) = F(x)$ , da letztere Funktion in Bezug auf  $x$  ganz und vom  $(n-1)$ ten Grade ist. Es ist aber

$$F(a_s) = \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(y)P_{n-1}(a_s)}{y-a_s},$$

folglich

$$\beta_\nu = \frac{n}{2} \cdot \frac{2\nu+1}{2} \sum \frac{P_n(y)}{y-a} \frac{P_\nu(a)P_{n-1}(a)R_n(a)}{P'_n(a)}.$$

Aus (38.) und (34.) folgt weiter

$$(1-a^2)P'_n(a) = nP_{n-1}(a), \quad (1-a^2)P'_n(a)R_n(a) = nP_{n-1}(a)R_n(a) = 2,$$

mithin

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \sum \frac{P_n(y) P_\nu(a)}{y-a P'_n(a)} = \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(y).$$

Es ist daher identisch

$$(44.) \quad \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(x) P_{n-1}(y) - P_n(y) P_{n-1}(x)}{x-y} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) P_\nu(y),$$

wie man auch durch Multiplication mit  $x-y$  und Anwendung von (29.) verificiren kann.

### 3.

Sei jetzt, um zu dem in 1. angedeuteten allgemeinen Falle überzugehen,  $f(u)$  eine Funktion vom  $(m+n)$ ten Grade, welche die Eigenschaft hat, dafs aus der Entwicklung von  $f(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$  die Terme  $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^m}$  wegfallen, und sei wie früher

$$(1.) \quad f_1(u) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \partial x;$$

seien ferner  $a_1, a_2, \dots, a_{n+m}$  die Wurzeln der Gleichung  $f(u)=0$ , so giebt der Ausdruck

$$(2.) \quad \Omega = \sum_{s=1}^{s=n+m} \frac{f_1(a_s)}{f'(a_s)} F(a_s)$$

im Allgemeinen einen genäherten Werth des Integrals  $\int_{-1}^1 F(x) \partial x$ , während er diesen Werth genau darstellt, so oft  $F(x)$  eine ganze Funktion ist, welche den  $(2m+n-1)$ ten Grad nicht übersteigt.

Zur Bestimmung der Funktion  $f(u)$  bietet sich zunächst ein Weg dar durch die Gleichungen 1. (14.), (15.), denen zufolge die erwähnte Eigenschaft von  $f(u)$  durch die Gleichungen

$$(3.) \quad \int_{-1}^1 f(x) \partial x = 0, \quad \int_{-1}^1 f(x) x \partial x = 0, \quad \dots \quad \int_{-1}^1 f(x) x^{m-1} \partial x = 0$$

bedingt wird.

Da diese Gleichungen nach dem in art. 2 Eingangs Bemerkten von einander unabhängig sind, so lassen sich aus ihnen  $m$  Coefficienten von  $f(u)$  durch die übrigen  $(n+1)$  ausdrücken. Geht man also auf die Wurzeln von  $f(u)$  zurück, so sind durch die Gleichungen (3.)  $m$  dieser Wurzeln durch die übrigen  $n$  auf eine einzige Weise bestimmt; letztere dagegen bleiben vollkommen willkürlich. Genau gesprochen besteht also die vorliegende Aufgabe darin, dafs man diejenige Funktion  $f(u)$  vom  $(n+m)$ ten Grade bestimmen



wo  $\Pi(x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots$  ist. Ist  $i_1, i_2, \dots, i_m$  irgend eine Permutation der Zahlen 1, 2, ... m, so ist dies auch gleich

$$y \int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) \Pi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) x_{i_1}^0 x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^{m-1} \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Bringt man aber in  $\Pi$  die Indices wieder in die frühere Ordnung, so erhält  $x_{i_1}^0, x_{i_2}^1, \dots, x_{i_m}^{m-1}$  dasselbe Vorzeichen, welches es in der Determinante

$$\Sigma \pm x_1^0 x_2^1 \dots x_m^{m-1} = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

hat. Folglich ist auch

$$(8.) \quad I(m+1) \cdot f(x) = y \int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) [\Pi(x_1, x_2, \dots, x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck der Funktion  $f(x)$ , und es steht seiner Anwendung nichts im Wege, als die zahlreichen und unbequemen Integrationen, welche er involvirt. Ich werde daher für einige besondere Fälle seine entwickelte Form hersetzen. Es ist für

$$(9.) \quad \left\{ \begin{array}{l} m=0 \quad f(x) = y \\ m=1 \quad f(x) = y \{x Y_0 - Y_1\} \\ m=2 \quad f(x) = y \{x^2 [Y_1^2 - Y_0 Y_2] - x [Y_1 Y_2 - Y_0 Y_3] + [Y_2^2 - Y_1 Y_3]\} \\ m=3 \quad f(x) = y \{x^3 [Y_2^2 - Y_1 Y_2 Y_3 + Y_3^2 Y_0 - Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1^2 Y_4 - Y_0 Y_2 Y_4] \\ \quad - x^2 [Y_2^2 Y_3 - Y_1 Y_3^2 + Y_0 Y_3 Y_4 - Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1^2 Y_5 - Y_0 Y_2 Y_5] \\ \quad + x [Y_0 Y_4^2 - Y_0 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_2 Y_5 - Y_1 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_3^2 - Y_2^2 Y_4] \\ \quad - [Y_3^3 - Y_2 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_4^2 - Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_5 - Y_1 Y_3 Y_5]\} \\ \quad \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{array} \right.$$

Für gewisse Anwendungen ist es nöthig, die Gleichung (2.) in eine andere Form zu bringen. Sei

$$y = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = A(x),$$

$$f(x) = y B(x) = y A_m(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m),$$

so das die Größen  $b_1, b_2, \dots, b_m$  mit den früher durch  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+m}$  bezeichneten zusammenfallen. Sei ferner

$$(10.) \quad \varphi(x) = \Sigma \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)}{x - a},$$

$$(11.) \quad \psi(x) = \Sigma \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)B(x)}{(x-a)B(a)} + \Sigma \frac{F(b)}{B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{(x-b)A(b)},$$

so ist die rechte Seite von (2.) nichts anderes als das von  $x = -1$  bis

$x = 1$  genommene Integral von  $\psi(x)$ . Man kann aber diese Funktion auch in die Form

$$(12.) \quad \psi(x) = \varphi(x) + \sum \frac{F(b) - \varphi(b)}{A(b)B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{x-b}$$

bringen, indem beide Ausdrücke für  $x = a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m$  mit  $F(x)$  übereinstimmen, und somit als Funktionen des  $(n + m - 1)$ ten Grades identisch sein müssen. Dies festgestellt, erhalten wir statt der Gleichung (2.) folgende:

$$(13.) \quad \Omega = \sum \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a) + \sum \frac{F(b) - \varphi(b)}{A(b)B'(b)} \int_{-1}^1 \frac{A(x)B(x)}{x-b} \partial x,$$

welche für die Anwendung gegenwärtiger Methode einen neuen Gesichtspunkt darbietet. Betrachtet man nämlich

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) \partial x = \sum \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a)$$

als erste Annäherung an den Werth von  $\int_{-1}^1 F(x) \partial x$ , so stellt sich der Ausdruck

$$A = \sum \frac{F(b) - \varphi(b)}{A(b)B'(b)} \int_{-1}^1 \frac{A(x)B(x)}{x-b} \partial x$$

als die Correction dar, welche man an jener anzubringen hat, um einen genauern Werth zu erhalten.

So aufgefasst kommt also unsere Methode darauf hinaus, die Wurzeln  $b_1, b_2, \dots, b_m$  so auszuwählen, dafs die mittelst derselben berechnete Correction  $A$  eine höhere Genauigkeit erreicht, als sich im Allgemeinen mittelst irgend welcher anderer  $m$  Wurzeln würde erzielen lassen.

Ist  $k_s^{(m)}$  der bei der Integration von  $x^s$  begangene Fehler, so hat man nach art. 1  $k_0^{(m)} = k_1^{(m)} = \dots = k_{2m+n-1}^{(m)} = 0$ ,

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{1}{f(u)} \sum_0^{\infty} \frac{1}{u^{m+s+1}} \int_{-1}^1 x^{m+s} f(x) \partial x,$$

also

$$k_{2m+n}^{(m)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{m+1} f_2(u)}{f(u)} = \frac{1}{A_m} \int_{-1}^1 x^m f(x) \partial x.$$

Aus (7.) folgt aber weiter, dafs

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 x^m f(x) \partial x \\ &= \int_{-1}^{1(m+1)} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{m+1} \Pi(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1} \end{aligned}$$

der Coefficient der höchsten Potenz von  $x$  in

$$y \int_{-1}^{1(m+1)} y_1 y_2 \dots y_{m+1} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{m+1}) \\ \Pi(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1},$$

also nach der Bezeichnung der Formel (5.) gleich  $A_{m+1}$  ist. Folglich hat man allgemein

$$k_{2m+n}^{(m)} = \frac{A_{m+1}}{A_m},$$

also z. B.

$$k_n^{(0)} = Y_0, \quad k'_{n+2} = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}{Y_0}, \quad k''_{n+4} = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 & Y_0 \\ Y_3 & Y_2 & Y_1 \\ Y_4 & Y_3 & Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}, \quad \text{etc.}$$

#### 4.

Obleich die Entwicklungen des vorigen art. für alle in der Praxis vorkommenden Fälle ausreichen dürften, so werde ich doch eine zweite Herleitung derselben nicht übergehen, da die gesuchten Ausdrücke auf einem andern Wege eine vollkommnere Gestalt annehmen.

Ist  $f(x)$  eine ganze Funktion vom  $(n+m)^{\text{ten}}$  Grade, so kann man stets setzen

$$f(x) = AP_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_{n+m-1} P_1(x) + A_{n+m} P_0(x).$$

Sollen nun aus der Entwicklung von  $f(x) \lg \frac{x+1}{x-1}$  die Terme  $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^m}$  ausfallen, so sieht man aus den früher entwickelten Eigenschaften der Funktionen  $P$ , dafs  $f(x)$  die Funktionen  $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$  nicht enthalten darf, und es ist daher der allgemeinste Ausdruck der Funktion  $(n+m)^{\text{ten}}$  Grades, welche jener Bedingung genügt, dieser:

$$f(x) = AP_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_n P_m(x).$$

Diese Funktion soll ferner für  $x = a_1, a_2, \dots, a_n$  verschwinden. Wenn man daher von einem willkürlichen constanten Faktor absieht, so erhält man

$$(1.) \quad f(x) = \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{n+m-1}(a_1) P_{n+m-2}(a_2) \dots P_m(a_n),$$

und es handelt sich darum, diese Determinante durch das Produkt

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

wirklich zu dividiren. Für  $n=1$  gelingt dies mittelst der Formel (44.)

art. 2. Setzt man nämlich dort  $m+1$  statt  $n$  und  $a_1$  statt  $y$ , so ergibt sich

$$(2.) \quad \frac{P_{m+1}(x)P_m(a_1) - P_m(x)P_{m+1}(a_1)}{x - a_1} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{m+1} \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) P_\nu(a_1).$$

Ich werde jetzt einen Hilfssatz beibringen, durch welchen man von vorstehender Formel zur Division der Gleichung (1.) durch den Ausdruck

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

gelangen kann.

Bezeichnet man die in (1.) rechts stehende Determinante durch  $\Delta$ , so bilde man die Funktion

$$(3.) \quad U = \frac{P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}}{(x - a_2)(x - a_3) \dots (x - a_n)} + \frac{P_{n+m-1}(a_2) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)}}{(x - a_3) \dots (x - a_n)(x - a_1)} + \dots$$

$$+ \frac{P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1})},$$

also

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) U$$

$$= (x - a_1) P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + (x - a_2) P_{n+m-1}(a_2) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)} + \dots$$

$$+ (x - a_n) P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}.$$

Nun ist nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten

$$P_{n+m-1}(x) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \dots + P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)} = 0,$$

mithin vorstehendes gleich

$$- \left\{ x P_{n+m-1}(x) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + a_1 P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \dots \right\}.$$

Transformirt man hier die Faktoren der Partialdeterminanten mittelst der Formel (29. art. 2)

$$u P_{n+m-1}(u) = \frac{n+m}{2n+2m-1} P_{n+m}(u) + \frac{n+m-1}{2n+2m-1} P_{n+m-2}(u),$$

so zerstören sich alle Glieder, welche Faktoren von der Form

$$\frac{n+m-1}{2n+2m-1} P_{n+m-2}(u)$$

erhalten, und dieser Ausdruck ergibt sich gleich

$$- \frac{n+m}{2n+2m-1} \left\{ P_{n+m}(x) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \dots \right\} = - \frac{n+m}{2n+2m-1} \Delta.$$

Daraus folgt die Formel

$$(4.) \quad \frac{\mathcal{A}}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = -\frac{2n+2m-1}{n+m} U.$$

Da die partiellen Determinanten  $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial P_{n+m}(a_s)}$  von derselben Art wie  $\mathcal{A}$  selber, aber eine Ordnung niedriger sind, so reducirt sich durch (4.) die Herstellung des Quotienten zur Linken auf die von  $n$  andern Quotienten derselben Gattung, in denen Zähler und Nenner um eine Ordnung niedriger sind.

Mittelst der Formeln (2.) und (4.) erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_1) P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)} \\ &= \frac{2m+3}{m+2} \left\{ P_{m+1}(a_1) \frac{\Sigma \pm P_{m+1}(x) P_m(a_2)}{x-a_2} - P_{m+1}(a_2) \frac{\Sigma \pm P_{m+1}(x) P_m(a_1)}{x-a_1} \right\} \\ &= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3}{m+1 \cdot m+2} \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+1}(a_1) P_\nu(a_2). \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\Sigma \pm P_{m+3}(x) P_{m+2}(a_1) P_{m+1}(a_2) P_m(a_3)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} \\ &= \frac{2m+5}{m+3} \left\{ P_{m+2}(a_1) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_2) P_m(a_3)}{(x-a_2)(x-a_3)} + P_{m+2}(a_2) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_3) P_m(a_1)}{(x-a_3)(x-a_1)} \right. \\ & \quad \left. + P_{m+2}(a_3) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_1) P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)} \right\} \\ &= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \cdot 2m+5}{m+1 \cdot m+2 \cdot m+3} \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+2}(a_1) P_{m+1}(a_2) P_\nu(a_3). \end{aligned}$$

Man kann auf diese Weise fortfahren, und es hat nicht die geringste Schwierigkeit, durch Induktion folgende allgemeine Formel nachzuweisen:

$$\begin{aligned} (5.) \quad f(x) &= \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n) \times \\ &= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \dots 2m+2n-1}{m+1 \cdot m+2 \dots m+n} (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \\ & \quad \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \dots P_{m+1}(a_{n-1}) P_\nu(a_n). \end{aligned}$$

Es ergibt sich ferner unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung

$$(6.) \quad \begin{cases} f_1(x) = \Sigma \pm R_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n), \\ f_2(x) = \Sigma \pm Q_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n), \end{cases}$$

welche Determinanten durch Permutation der an den Funktionalzeichen befindlichen Indices zu bilden sind.

Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) P_{m+n-2}(a_2) \dots P_m(a_n) = \mathfrak{A}_m,$$

so erhält man für den bei der Integration von  $x^{2m+n}$  begangenen Fehler  $k_{2m+n}^{(m)}$ , welcher mit dem in art. 3 bestimmten identisch sein muß, in folgender Weise einen neuen Ausdruck. Da nämlich nach art. 1

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f_2(u)}{f(u)}$$

ist, so folgt, dafs  $k_{2m+n}^{(m)}$  die Gränze ist, welcher sich

$$u^{2m+n+1} \frac{Q_m(u) \frac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{P_{m+n}(u) \frac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

mit wachsendem  $u$  nähert. Man erhält

$$\begin{aligned} (7.) \quad k_{2m+n}^{(m)} &= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1.2\dots m}{1.3\dots 2m-1} \cdot \frac{1.2\dots m+n}{1.3\dots 2m+2n-1} \cdot \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{\frac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}} \\ &= (-1)^n \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1.2\dots m}{1.3\dots 2m-1} \cdot \frac{1.2\dots m+n}{1.3\dots 2m+2n-1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Coefficienten von  $x^s$  in  $P_s(x)$ , nämlich  $\frac{1.3\dots 2s-1}{1.2\dots s}$  durch  $\gamma_s$ , und setzt vorstehenden Ausdruck dem in art. 3 gefundenen gleich, so folgt:

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{2(-1)^n}{(2m+1)\gamma_m\gamma_{m+n}} \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m},$$

mithin

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{(-1)^{mn} 2^m}{1.2\dots 2m-1} \cdot \frac{1}{\gamma_0\gamma_1\dots\gamma_{m-1}\gamma_n\gamma_{n+1}\dots\gamma_{m+n-1}} \cdot \frac{\mathfrak{A}_m}{\mathfrak{A}_0}.$$

Es ist ferner  $A_0 = 1$ , und wie sich leicht findet

$$\mathfrak{A}_0 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \gamma_0\gamma_1\dots\gamma_{n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

folglich

$$(8.) \quad \mathfrak{A}_m = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)} \cdot 1.2\dots m}{2^m} \gamma_0\gamma_1\dots\gamma_m \cdot \gamma_0\gamma_1\dots\gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n) A_m.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke für  $\mathfrak{A}_m$  und  $1.2\dots m A_m$  ein, indem man letztern aus art. 3 (8.) entnimmt, so folgt

$$\begin{aligned} &\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n) \\ &= \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0\gamma_1\dots\gamma_m \cdot \gamma_0\gamma_1\dots\gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\quad \int_{-1}^{1(m)} \gamma_1\gamma_2\dots\gamma_m [\Pi(x_1, x_2, \dots, x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m. \end{aligned}$$

Dehnt man diese Formel auf  $n+1$  Argumente  $x, a_1, \dots, a_n$  aus, so ergibt sich

$$(9.) \quad \Sigma \pm P_{n+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n) \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_m \cdot \gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_{m+n} \Pi(a_1, \dots, a_n, x) \\ \int_{-1}^{1(m)} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_m) [\Pi(x_1, \dots, x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m,$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den Formeln des gegenwärtigen und des vorigen art. dargelegt ist.

Ich werde jetzt noch einen dritten Ausdruck für  $f(x)$  herleiten, der ebenfalls eigenthümlicher Natur ist. Integriert man die Gleichung (1.)  $m$ mal hinter einander nach  $x$  von  $-1$  bis  $x$ , ebenso  $m$ mal nach  $a_1, a_2, \dots, a_n$  von  $-1$  bis  $a_1, -1$  bis  $a_2, \dots, -1$  bis  $a_n$ , und wendet dann in jedem Term der Determinante den **Jacobischen Satz**

$$\int_{-1}^{x(m)} P_n(x) \partial x^m = (x^2-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} \frac{\partial^m P_n(x)}{\partial x^m}$$

an, so erhält man

$$\int_{-1}^{x, a_1, \dots, a_n(m(n+1))} f(x) (\partial x \partial a_1 \dots \partial a_n)^m \\ = \Sigma \pm \int_{-1}^{x(m)} P_{n+m}(x) \partial x^m \int_{-1}^{a_1(m)} P_{n+m-1}(a_1) \partial a_1^m \dots \int_{-1}^{a_n(m)} P_m(a_n) \partial a_n^m \\ = \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)\dots\Gamma(n+1)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(2m+2)\dots\Gamma(2m+n)} [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \\ \Sigma \pm P_{n+m}^{(m)}(x) P_{n+m-1}^{(m)}(a_1) \dots P_m^{(m)}(a_n).$$

In dieser Determinante kann man aber zufolge eines bekannten Satzes alle Elemente auf ihren ersten Term reduciren. Schreibt man darauf die gemeinsamen Faktoren aller Elemente derselben Vertikalreihen heraus, so ergibt sich vorstehendes

$$= c [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Sigma \pm x^n a_1^{n-1} \dots a_n^0 \\ = c [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, x),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$c = \frac{1}{[2^m \Gamma(m+1)]^{n+1}} \cdot \frac{(2m)_0 (2m+2)_1 (2m+4)_2 \dots (2m+2n)_n}{m_0 (m+1)_1 (m+2)_2 \dots (m+n)_n},$$

und  $\mu_\nu$  wie üblich den Coefficienten von  $x^\nu$  in der Entwicklung von  $(1+x)^\mu$  bezeichnet. Es ist demnach auch

$$(10.) \quad \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n) \\ = c \frac{\partial^{m(n+1)}}{(\partial x \partial a_1 \dots \partial a_n)^m} \{ [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, x) \},$$

oder wenn man

$$(11.) \frac{\partial^{mn}}{(\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_n)^m} \{ [(a_1^2 - 1)(a_2^2 - 1) \dots (a_n^2 - 1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, x) \} = V$$

setzt:

$$(12.) \quad \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n) = c \frac{\partial^m (x^2 - 1)^m V}{\partial x^m}.$$

Ist nun der Ausdruck  $V$  reell oder so beschaffen, daß er durch Multiplication mit einer constanten GröÙe reell gemacht werden kann, so schließt man aus dieser Gleichung nach bekannten Methoden, daß zum Mindesten  $m$  Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  reell und zwischen den Gränzen  $-1$  und  $+1$  gelegen sein müssen. Sind also z. B. die gegebenen  $n$  Wurzeln  $a_1, a_2, \dots, a_n$  reell und auÙerhalb jener Gränzen belegen, so müssen die übrigen  $m$  Wurzeln echte Brüche sein. — Sind ferner alle Wurzeln der Gleichung  $V = 0$  reell, so sind es auch alle Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$ , und die Anzahl der auÙerhalb der Gränzen  $-1$  und  $1$  liegenden Wurzeln ist in beiden dieselbe.

Hieraus ist es ersichtlich, daß man gegenwärtiges Verfahren zur angenäherten Integration von  $F(x)$  mit großem Vortheil z. B. dann wird anwenden können, wenn sich  $F(x)$  für  $n$  bestimmte, auÙerhalb des Integrationsintervalls, und für beliebig viele innerhalb desselben willkürlich vertheilte Werthe von  $x$  annähernd oder genau ermitteln läßt \*).

---

\*) Während die vorstehende Abhandlung des Herrn *Christoffel* bereits dem Druck übergeben war, kam der Redaktion dieser Zeitschrift eine von Herrn *C. Gustav Bauer* in München verfaßte und als Habilitationsschrift besonders herausgegebene Abhandlung „Von den Integralen gewisser Differentialgleichungen, welche in der Theorie der Anziehung vorkommen“ durch die Güte des Herrn Verfassers zu. Von den *Laplaceschen* Kugelfunktionen ausgehend beschäftigt sich dieselbe mit den nämlichen Funktionen  $P, Q, R$ , welche in der *Christoffelschen* Arbeit eine so wesentliche Rolle spielen, und in einem Anhang enthält sie die Anwendung jener Funktionen auf die *Gaußsche* mechanische Quadratur. Bei so naher Berührung des Gegenstandes der Untersuchung konnte es nicht fehlen, daß die beiden gelehrten Herrn Verfasser, trotz der Verschiedenheit ihrer Ausgangspunkte und Methoden, doch in einigen ihrer Ergebnisse zusammentrafen. Zu diesen gehört die schöne in Gleichung (32.)<sub>2</sub> pag. 68 enthaltene Entwicklung der Funktionen  $R$ , welche indessen Herr *Christoffel* bereits in seiner 1856 hier erschienenen Inaugural-Dissertation „De motu permanenti electricitatis“ pag. 53 veröffentlicht hat.