Ueber eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte.

(Von Herrn *Siebeck*.)

In seiner bekannten Abhandlung über die Brennpunkte der Curven n^{ter} Classe (Bd. 10 dieses Journals) ist *Plücker* zu einem Resultate gekommen, welches sich nach einigen Abänderungen kurz so ausdrücken lässt: „Ist bei Annahme eines rechtwinkligen Coordinatensystems $F(u,v,w)=0$ die Gleichung einer Curve n^{ter} Classe (wobei vorausgesetzt wird, dass die Punkt- und die Liniencoordinaten durch die Gleichung $xu+yv+w=0$ mit einander verbunden sind), so giebt die Gleichung $F(-1,-i,x+yi)=0$, wo $i=\sqrt{-1}$, die Brennpunkte der Curve.“ Es gewährt aber besondere Vortheile, wenn man hier, was wie es scheint noch nirgends geschehen ist, $F(-1,-i,x+yi)$ als Function *einer* Variabeln $z=x+yi$ d. h. als monogene Function betrachtet, *denn die Theorie der Brennpunkte algebraischer Curven fällt dadurch lediglich der Algebra binärer Formen anheim.* So ergiebt sich z. B. aus der Zerlegung von $F(-1,-i,z)$ in n Factoren, da mit der Gleichung

$$(x+yi-\alpha_1-\beta_1 i)(x+yi-\alpha_2-\beta_2 i)\dots(x+yi-\alpha_n-\beta_n i) = 0$$

zugleich die nachfolgende gilt

$$(x-yi-\alpha_1+\beta_1 i)(x-yi-\alpha_2+\beta_2 i)\dots(x-yi-\alpha_n+\beta_n i) = 0,$$

indem man einen beliebigen Factor der einen dieser beiden Gleichungen zugleich mit einem beliebigen Factor der andern $=0$ setzt (was auf n^2 verschiedene Arten geschehen kann), nicht allein, dass es, wie *Plücker* gezeigt hat, im Ganzen n^2 Brennpunkte giebt, sondern auch *dass unter diesen n reell* (mit den Coordinaten α_1, β_1, α_2, β_2 etc.) und $n(n-1)$ *imaginär* sind und dass von den letzteren je zwei einander so zugeordnet sind, dass sie in der Normalen liegen, welche man auf der Verbindungslinie zweier reeller Brennpunkte im Mittelpunkte errichten kann. Da somit die imaginären Brennpunkte durch die reellen vollständig bestimmt sind, so wollen wir in dem Nachfolgenden nur die reellen Brennpunkte betrachten.

Es ergiebt sich ferner auf diese Weise, dass $\frac{\partial F(-1,-i,z)}{\partial z}=0$ die Gleichung der $n-1$ Brennpunkte der 1^{ten} Polaren der unendlich entfernten

Geraden ist, ebenso $\frac{\partial^2 F(-1, -i, z)}{\partial z^2}$ die Gleichung für die $n-2$ Brennpunkte der zweiten Polare etc., $\frac{\partial^{n-1} F(-1, -i, z)}{\partial z^{n-1}} = 0$ die Gleichung für den Brennpunkt der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polare d. h. für den Mittelpunkt der Curve. Auch ersieht man sofort, dass zwischen diesen Brennpunktgruppen dieselbe Familienzusammengehörigkeit Statt findet, wie zwischen den Curven, zu denen sie gehören, dass insbesondere durch die erste Gruppe, nämlich die Brennpunkte der ursprünglichen Curve, alle folgenden Gruppen vollständig bestimmt sind und von dieser ersten Gruppe in einer lediglich durch monogene Functionen ausgedrückten Abhängigkeit stehen; dass der Mittelpunkt, welcher die letzte Gruppe bildet, der Schwerpunkt einer jeden von den übrigen Gruppen ist; ferner dass zwei Brennpunkte einer gegebenen Curve zusammenfallen, wenn die Discriminante von $F(-1, -i, z)$ verschwindet, etc.

Um von dem Wesen dieser Methode einen deutlicheren Begriff zu geben, wollen wir sie zunächst auf die Kegelschnitte anwenden. Dieselbe Gleichung, welche in der Theorie der Grundgebilde die Bedingung angiebt, unter welcher vier in gerader Linie liegende Punkte harmonisch sind, ist bei Anwendung des Punktcalcüls mit complexen Zahlen der Ausdruck dafür, dass vier in einer Ebene liegende Punkte in einem Kreise liegen und harmonische Punkte dieses Kreises sind (sie enthält nämlich zwei Bestimmungen, wie jede Gleichung zwischen complexen Zahlen). Nun ist aber, wenn zwei binäre Formen zweiter Ordnung $az^2+2bz+c=0$ und $a'z^2+2b'z+c'=0$ gegeben sind, das Verschwinden der Invariante $ac'+a'c-2bb'$ die Bedingung dafür, dass die durch jene beiden Formen dargestellten Punktpaare harmonisch liegen. Dieselbe Invariante wird also, wenn wir unter a, b, c, z etc. *complexe* Zahlen verstehen, durch ihr Verschwinden anzeigen, dass die beiden Punktpaare harmonische Punkte eines Kreises sind. Für zwei Kegelschnitte $a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2+2a_{23}vw+2a_{13}uw+2a_{12}uv=0$ und $b_{11}u^2+b_{22}v^2+$ etc. $=0$ sind aber die Brennpunkte durch die Gleichungen

$$a_{33}z^2-2(a_{13}+a_{23}i)z+a_{11}-a_{22}+2a_{12}i = 0,$$
$$b_{33}z^2-2(b_{13}+b_{23}i)z+b_{11}-b_{22}+2b_{12}i = 0$$

bestimmt. Das Verschwinden der obigen Invariante giebt daher die beiden Gleichungen

$$a_{33}b_{11}+a_{11}b_{33}-2a_{13}b_{13} = a_{33}b_{22}+a_{22}b_{33}-2a_{23}b_{23},$$
$$a_{33}b_{12}+a_{12}b_{33}-a_{23}b_{13}-a_{13}b_{23} = 0.$$

Hält man dieses Resultat zusammen mit der bekannten Gleichung für denjenigen Kegelschnitt, von dessen Punkten aus nur harmonische Tangenten an die beiden gegebenen Kegelschnitte gezogen werden können, und welcher u. A. auch durch die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten derselben geht, so sieht man sogleich, dass dieser Kegelschnitt, wenn jene beiden Bedingungsgleichungen Statt finden, in einen Kreis übergehen muss. Wir erhalten somit den Satz: Sind die beiden Brennpunktspaare zweier Kegelschnitte harmonische Punkte eines Kreises, so liegen die acht Berührungspunkte der vier gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte ebenfalls in einem Kreise.

Zu noch interressanteren Resultaten führt der bekannte Satz, nach welchem drei binäre Formen 2^{ten} Grades f, φ, ψ drei in Involution stehende Punktpaare geben, wenn $\psi = \lambda f + \mu\psi$ (wo λ und μ constant) und die Doppelpunkte der Involution durch die *Hesse*sche Covariante zweier beliebiger dieser drei Formen dargestellt werden. Sind nämlich $f(u, v, w)$, $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$ drei beliebige Kegelschnitte, welche jedoch der Bedingung $\lambda f + \mu\varphi = \psi$ genügen und folglich dieselben vier Geraden berühren, so erhalten wir, da anderntheils $f(-1, -i, z) = 0$, $\varphi(-1, -i, z) = 0$, $\psi(-1, -i, z) = 0$ die Gleichungen für die Brennpunte derselben sind, sofort den Satz: *Ist ein System von Kegelschnitten einem und demselben Vierseit einbeschrieben, so stehen die Brennpunktpaare derselben in Kreisinvolution, d. h. es giebt in der Ebene ein festes Punktpaar, welches mit jedem Brennpunktpaare des Systems vier harmonische Punkte eines Kreises bildet.* Dieses feste Punktpaar besteht nämlich aus den Doppelpunkten der Kreisinvolution und lässt sich mit Hülfe der *Hesse*schen Covariante leicht bestimmen.

Vorstehende Bemerkungen mögen genügen, um den Standpunkt anzudeuten, von welchem aus der Verfasser zu den nachstehenden Sätzen gelangt ist, deren Entwickelung, da sie in analytischer Beziehung nichts besonders Bemerkenswerthes darbieten würde, weggelassen worden ist.

I. Lehrsätze über die Curven der Brennpunkte eines Systems von Kegelschnitten, welche demselben Vierseit einbeschrieben sind.

1) *Fallen zwei conjugirte Punkte einer Curve dritter Ordnung in die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte, so lassen sich unendlich viele Vierseite von der Beschaffenheit construiren, dass jene Curve die Curve der Brennpunkte aller Kegelschnitte ist, welche einem beliebigen dieser Vier-*

seite einbeschrieben sind. Sind nämlich F_1 und F_2, G_1 und G_2 zwei beliebige Punktpaare der Curve, welche einander nach demjenigen der drei Beziehungssysteme conjugirt sind, nach welchem die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte einander entsprechen, so erhält man eines jener Vierseite, wenn man zwei beliebige Kegelschnitte construirt, welche resp. F_1 und F_2, G_1 und G_2 zu Brennpunkten haben, und die vier gemeinsamen Tangenten dieser Kegelschnitte zieht. Diese Tangenten bilden nämlich ein solches Vierseit und für jeden demselben Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitt liegen die beiden Brennpunkte auf der Curve und sind conjugirte Punkte desselben.

2) Da jede Curve dritter Ordnung so projicirt werden kann, dass zwei conjugirte Punkte in die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte fallen, so kann sie auch als Projection einer Brennpunktcurve betrachtet werden. Die rein projectivischen Eigenschaften der Brennpunktcurven sind also allgemeine Eigenschaften aller Curven dritter Ordnung.

3) Entsprechen einander zwei conjugirte Punkte einer Brenpunktcurve nach demselben System, nach welchem die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte conjugirt sind, so können sie immer als conjugirte Pole in Bezug auf drei feste gleichseitige Hyperbeln betrachtet werden; und umgekehrt: der Ort der gemeinsamen conjugirten Pole dreier gleichseitiger Hyperbeln ist immer eine Brennpunktcurve (folgt einfach daraus, dass die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte conjugirte Pole für alle gleichseitigen Hyperbeln sind).

4) Zieht man von einem Punkte einer Brennpunktcurve vier Tangenten an dieselbe und verbindet man die Berührungspunkte durch sechs gerade Linien, so stehen in dem so entstandenen vollständigen Viereck zwei gegenüberstehende Seiten auf einander normal, nämlich diejenigen, durch welche je zwei zusammengehörige Brennpunkte mit einander verbunden werden.

4) Die Curve der Brennpunkte eines Systems von Kegelschnitten, welche demselben Vierseit einbeschrieben sind, ist vollständig bestimmt durch die Gerade L, in welcher die Mittelpunkte der Kegelschnitte liegen und durch die beiden im Eingange erwähnten Doppelpunkte der Kreisinvolution J und J', und lässt sich aus diesen Elementen leicht construiren. Man nehme nämlich auf L einen beliebigen Punkt M an, halbire den Winkel JMJ' und trage auf der Halbirungslinie von M aus nach entgegengesetzten Richtungen Abschnitte MF und MF' auf, welche gleich der mittleren Proportionale der Strecken MJ und MJ' sind, so sind F und F' zwei conjugirte Punkte der Curve. Als

specieller Fall ist hier derjenige zu bemerken, in welchem L durch einen der Punkte J und J' geht. Die Brennpunktcurve hat dann einen Doppelpunkt, indem nämlich in J oder J' zwei conjugirte Punkte vereinigt sind; so dass sich also in dem System der Kegelschnitte ein Kreis befindet.

Beiläufig werde bemerkt, dass

$$F = (x^2+y^2)(\alpha x+\beta y+2\gamma)+\alpha x-\beta y = 0$$

die Gleichung der Curve ist für ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x-Achse die Verbindungslinie von J und J' und dessen Mittelpunkt die Mitte von JJ' ist, wobei zugleich angenommen ist, dass die Abscissen von J und $J' = \pm 1$ und dass $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ die Gleichung von L ist. Ferner hat man

$$\tfrac{9}{2}\Delta F = 2(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2)F+(\alpha^2+\beta^2)\varphi,$$

wo

$$\varphi = \alpha x^3+3\beta x^2 y-3\alpha x y^2-\beta y^3-3\alpha x-3\beta y-2\gamma,$$

also ein in Bezug auf α, β, γ linearer Ausdruck ist. Für die Invarianten S und T hat man die einfachen Ausdrücke

$$S = \tfrac{4}{81}(4(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2)^2-3(\alpha^2+\beta^2)^2),$$

$$T = \tfrac{8}{729}(8(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2)^2-9(\alpha^2+\beta^2)^2)(\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2).$$

Auch ist

$$\Delta\varphi = 6(\alpha^2+\beta^2)F.$$

5) Das Product der Entfernungen des Centrums der Kreisinvolution (welches zugleich der Brennpunkt der dem Kegelschnittsystem zugehörigen Parabel ist) von zwei conjugirten Brennpunkten ist constant, nämlich gleich dem Quadrat der Entfernung der Punkte J und J' von diesem Centrum; auch bilden die Verbindungslinien dieses Centrums mit zwei conjugirten Punkten gleiche Winkel mit der Verbindungslinie der Punkte J und J'. Allgemeiner ist folgender Satz:

Sind F_1 und F_2, G_1 und G_2, H_1 und H_2 drei Paar conjugirter Brennpunkte, so ist nur

$$\frac{H_1F_1.H_1F_2}{H_2F_1.H_2F_2} = \frac{H_1G_1.H_1G_2}{H_2G_1.H_2G_2}$$

und ausserdem die Winkelsumme

$$G_1H_1F_1+G_2H_1F_2 = 0.$$

6) Die Enveloppe der Achsen eines Systems von Kegelschnitten, welche demselben Vierseit einbeschrieben sind, ist eine Curve dritter Classe, von

welcher zwei Brennpunkte mit den Doppelpunkten der mehrfach erwähnten Kreisinvolution zusammenfallen. Der dritte Brennpunkt ist derjenige unendlich entfernte Punkt, welcher in einer zur Geraden der Mittelpunkte normalen Richtung liegt. Je zwei nicht zu ein und demselben Kegelschnitt gehörige Achsen, welche auf einander normal stehen, sind conjugirte Tangenten der Curve und zwar bilden die Durchschnittspunkte derselben mit der Geraden der Kegelschnittmittelpunkte eine Involution. Die Gleichung der Curve ist $(u^2-w^2)(\alpha u+\beta v)+(u^2+v^2)(\gamma w-\alpha u)=0$.

II. Einige allgemeine Eigenschaften der Brennpunkte algebraischer Curven.

1) Es giebt in der Ebene einer Curve n^{ter} Classe immer n feste reelle Punkte von der Beschaffenheit, dass, wenn man einen beliebigen Punkt O der Ebene mit diesen Punkten verbindet, die Summe der Winkel, welche diese n Verbindungslinien mit einer beliebigen festen Richtung bilden, sich von der Summe der Winkel, welche die n von O aus an die Curve gelegten Tangenten mit derselben Richtung bilden, nur um ein ganzes Vielfaches von π unterscheidet. Jene n festen Punkte sind die reellen Brennpunkte der Curve n^{ter} Classe.

2) Denkt man sich von dem beliebigen Punkte O aus n Tangenten an die Curve gelegt, welche in beliebiger Ordnung genommen $L_1, L_2, \dots L_n$ heissen mögen und ausserdem n einander parallele Tangenten von beliebiger Richtung $P_1, P_2, \dots P_n$, und ist A_k der Durchschnittspunkt von L_k und P_k, so bleibt das Product $OA_1.OA_2\dots OA_n$ bei veränderter Richtung der parallelen Tangenten constant und zwar ist es gleich dem Product der Entfernungen des Punktes O von den n reellen Brennpunkten der Curve.

3) Sind in einer Ebene n beliebige Punkte $P_1, P_2, \dots P_n$ gegeben, so giebt es immer eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe, welche die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien jener Punkte berührt und zwar so, dass die Berührungspunkte sämmtlich in die Mittelpunkte der Linien fallen. Die $n-1$ reellen Brennpunkte dieser Curve fallen zusammen mit den Brennpunkten der ersten Polaren der unendlich entfernten Geraden in Bezug auf eine beliebige Curve n^{ter} Classe, welche die Punkte $P_1\dots P_n$ zu Brennpunkten hat. Ist z. B. $n=3$, so giebt dies den Satz: Es giebt immer eine Ellipse, welche die Seiten eines gegebenen Dreiecks $P_1P_2P_3$ in ihrer Mitte berührt und die Brennpunkte dieser Ellipse fallen zusammen mit den Brennpunkten des von den sechs Asymptoten

einer beliebigen Curve dritter Classe, welche P_1, P_2, P_3 zu Brennpunkten hat, berührten Kegelschnitts.

4) Bringt man die Gleichung der Brennpunkte $F(-1, -i, z) = 0$ einer Curve n^{ter} Classe auf die Form

$$z^n - nP_1 z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} P_2 z^{n-2} - \cdots + (-1)^n P_n = 0,$$

und setzt man $P_k = p_k(\cos\pi_k + i\sin\pi_k)$, so ersieht man sofort Folgendes:

a) Es ist p_n das Product der Entfernungen des Anfangspunktes der Coordinaten von den n Brennpunkten der Curve; p_{n-1} hat dieselbe Bedeutung für die erste Polare der unendlich entfernten Geraden, p_{n-2} dieselbe Bedeutung für die zweite Polare etc.

b) π_n ist die Summe der Winkel, welche die n Verbindungslinien des Anfangspunktes der Coordinaten mit den n reellen Brennpunkten mit der X-Achse bilden, π_{n-1} hat dieselbe Bedeutung für die erste Polare der unendlich entfernten Geraden etc.

Aus dieser Bemerkung in Verbindung mit den vorhergehenden Sätzen lässt sich, indem man den Coordinatenanfangspunkt (Nullpunkt) der Ebene in den Mittelpunkt einer Curve dritter Classe und die Brennpunkte der conischen Polaren der unendlich entfernten Geraden nach ± 1 verlegt, in Folge der identischen Gleichung

$$z^3 - 3z - 2\cos 3m = (z - 2\cos m)\left(z - 2\cos\left(m + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(z - 2\cos\left(m - \frac{2\pi}{2}\right)\right)$$

und wenn man berücksichtigt, dass $\cos(x + \alpha i)$ für ein reelles veränderliches x Ausdruck einer Ellipse ist, folgende *Construction der Brennpunkte einer beliebigen Curve dritter Classe* herleiten:

Sei O der Mittelpunkt der Curve dritter Classe, I und I' die Brennpunkte des von den sechs Asymptoten der Curve berührten Kegelschnitts, so lege man an die Curve drei beliebige parallele Tangenten P_1, P_2, P_3 und ziehe ausserdem von O aus die Tangenten L_1, L_2, L_3; sei nun A_k der Durchschnittspunkt von L_k und P_k, und α_k der Winkel, welchen OA_k mit OI bildet, so beschreibe man mit einem Radius, welcher gleich $\sqrt[3]{\frac{OA_1.OA_2.OA_3}{2}}$ ist, einen Kreis um O und theile die Peripherie desselben in drei gleiche Theile, so jedoch, dass, wenn C_1, C_2, C_3 die betreffenden Theilpunkte sind, für einen derselben die Winkelgleichung

$$IOC_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3}$$

Statt findet. Hierauf bestimme man die Punkte D_1, D_2, D_3 so, dass D_k zu I, I' und C_k vierter harmonischer Kreispunkt ist, ziehe die Linien C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, deren Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 heissen mögen. Verlängert man dann die Strecken OM_1, OM_2, OM_3 um sich selbst über M_1, M_2, M_3 hinaus, wodurch man zu den Punkten F_1, F_2, F_3 gelangt, so sind letztere die Brennpunkte der Curve dritter Classe. Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Linien OF_1, OF_2, OF_3 den Flächeninhalt der Ellipse, welche durch F_1, F_2, F_3 geht und O zum Mittelpunkte hat, in drei gleiche Theile theilen.

Liegnitz, 1864.