# Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie.

(Von Herrn *Mertens* in Krakau.)

In *Legendres* Théorie des nombres (Troisième édition, quatrième partie §. VIII.) findet man die zwei merkwürdigen Formeln

$$\Sigma\frac{1}{q} = l(lG-0{,}08366)+C,$$

$$\Pi\left(1-\frac{1}{q}\right) = \frac{A}{lG-0{,}08366},$$

wo das Summen- und Productzeichen alle bis zu der gegebenen Grenze $G$ vorkommenden Primzahlen $q$ umfassen, $l$ das Zeichen des natürlichen Logarithmus ist und $C$, $A$ gewisse unbekannte numerische Constanten bezeichnen. Entfernt man die Zahl 0,08366, die ohnehin als auf empirischem Wege bestimmt von zweifelhaftem Werthe ist, so besagen die angeführten Gleichungen, dass für grosse Werthe von $G$ näherungsweise

$$\Sigma\frac{1}{q} = llG+C,$$

$$\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = C'lG$$

gesetzt werden darf.

In dieser Gestalt findet man die *Legendre*schen Formeln in einer Abhandlung von Herrn *Tschebischeff* *) wieder, in welcher auch ein Beweis derselben gegeben worden ist. Da indessen dieser Beweis nicht alle Zweifel beseitigt, so werde ich in den folgenden Zeilen versuchen, einen strengen Beweis der *Legendre*schen Formeln mitzutheilen und zugleich die bis jetzt, so viel ich weiss, unbekannten Constanten $C$, $C'$ zu bestimmen.

Ferner sollen noch die Werthe der Summen aller reciproken bis zu der gegebenen Grenze $G$ vorkommenden und bezüglich in einer der drei Formen $4m+1$, $4m+3$, $a+mk$ enthaltenen Primzahlen ermittelt werden, wo $a$ und $k$ gegebene Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor vorstellen.

---

*) Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, in *Liouvilles* Journal T. XVII. 1° série.

## 1.

Herr *Tschebischeff* hat in einer merkwürdigen Abhandlung *) für die Summe $\theta x$ der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen, welche $\leqq x$ sind, vermittelst der Gleichung

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned} l(1.2.3\ldots[x]) = {} & \theta x + \theta\sqrt{x} + \theta\sqrt[3]{x} + \cdots, \\ & + \theta\frac{x}{2} + \theta\sqrt{\frac{x}{2}} + \theta\sqrt[3]{\frac{x}{2}} + \cdots, \\ & + \theta\frac{x}{3} + \theta\sqrt{\frac{x}{3}} + \theta\sqrt[3]{\frac{x}{3}} + \cdots, \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

eine obere Grenze gefunden ($[x]$ soll hier wie überall im Folgenden die in $x$ enthaltene grösste ganze Zahl vorstellen). Da ich diese obere Grenze für das Folgende nicht mit der Genauigkeit brauche, mit welcher sie Herr *Tschebischeff* gegeben hat, so werde ich mir erlauben, die Gleichung (1.) zu benutzen, um zu beweisen, dass immer $\theta x < 2x$ ist.

Setzt man nämlich

$$\theta x + \theta\sqrt{x} + \theta\sqrt[3]{x} + \cdots = \chi x,$$

so ergiebt sich

$$l(1\cdot 2\cdot 3\cdots[x]) - 2l\left(1\cdot 2\cdots\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \chi x - \chi\frac{x}{2} + \chi\frac{x}{3} - \chi\frac{x}{4} + \cdots$$

und wegen

$$\chi\frac{x}{3} \geqq \chi\frac{x}{4},\quad \chi\frac{x}{5} \geqq \chi\frac{x}{6},\ \cdots$$

$$(2.)\qquad \chi x - \chi\frac{x}{2} < l(1\cdot 2\cdot 3\cdots[x]) - 2l\left(1\cdot 2\cdots\left[\frac{x}{2}\right]\right).$$

Da nun nach der *Stirling*schen Formel

$$l(1\cdot 2\cdot 3\cdots[x]) < x\,lx + \tfrac{1}{2}\,lx - x + l\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x},$$

$$2l\left(1\cdot 2\cdot 3\cdots\left[\frac{x}{2}\right]\right) > x\,lx - x\,l2 - lx - x + 2l\sqrt{2\pi} + l2 - \frac{2}{x-2}$$

ist, so folgt aus (2.), dass immer

$$\begin{aligned} \chi x - \chi\frac{x}{2} & < x\,l2 + \tfrac{3}{2}\,lx - l\sqrt{2\pi} - l2 + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{12x} \\ & < x - \left\{(1-l2)x - \frac{3\,lx}{2} + l\sqrt{2\pi} + l2 - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{12x}\right\} \\ & < x \end{aligned}$$

*) Mémoire sur les nombres premiers, *Liouvilles* Journal T. XVII. 1[e] série.

ist, wofern $x \geqq 4$. Ist $x < 4$, so verificirt man leicht direct diese letzte Ungleichung, und es ist mithin allgemein

$$\chi x - \chi \frac{x}{2} < x.$$

Wird hierin der Reihe nach $x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}$ u. s. w. statt $x$ gesetzt, bis man zu einem Gliede $\frac{x}{2^m}$ gelangt, welches $< 2$ ist, so giebt die Addition der Ungleichungen

$$\chi x - \chi \frac{x}{2} < x,$$

$$\chi \frac{x}{2} - \chi \frac{x}{4} < \frac{x}{2},$$

$$\chi \frac{x}{4} - \chi \frac{x}{8} < \frac{x}{4},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\chi x < x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

$$< 2x,$$

also um so mehr

$$(3.) \qquad \theta x < 2x.$$

2.

Die Primzahl $q$ geht in dem Producte $1.2.3\ldots n$ genau

$$\left[\frac{n}{q}\right] + \left[\frac{n}{q^2}\right] + \left[\frac{n}{q^3}\right] + \cdots$$

mal auf; man hat daher

$$l(1.2.3\ldots n) = \Sigma\left[\frac{n}{q}\right] lq + \Sigma\left[\frac{n}{q^2}\right] lq + \Sigma\left[\frac{n}{q^3}\right] lq + \cdots,$$

wo die Summen alle Primzahlen bis zur Grenze $n$ umfassen. Aus dieser Gleichung folgt, wenn

$$\left[\frac{n}{q}\right] = \frac{n}{q} - r_q$$

und für $l(1.2.3\ldots n)$ der aus der *Stirling*schen Formel sich ergebende Werth

$$n\,ln - n + \tfrac{1}{2} ln + l\sqrt{2\pi} + \frac{\lambda}{12n}$$

gesetzt wird,

$$(4.) \qquad ln - 1 + \frac{ln}{2n} + \frac{l\sqrt{2\pi}}{n} + \frac{\lambda}{12n^2} = \Sigma \frac{lq}{q} - \frac{1}{n}\Sigma r_q lq + \frac{1}{n}\Sigma\left[\frac{n}{q^2}\right] lq + \cdots;$$

$\lambda$ bedeutet, wie überall im Folgenden, eine Zahl, von der man nur zu wissen braucht, dass ihr absoluter Werth die Einheit nicht übersteigt.

Die Differenz $ln - \Sigma \frac{lq}{q}$ ist also der Gleichung (4.) zufolge (wofern $n \geqq 5$) zwischen den Grenzen

$$1 + \Sigma \frac{lq}{q^2} + \Sigma \frac{lq}{q^3} + \cdots$$

und

$$-\frac{1}{n} \Sigma lq$$

enthalten; da nun einerseits nach (3.)

$$\Sigma lq < 2n$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\Sigma \frac{lq}{q^2} + \Sigma \frac{lq}{q^3} + \cdots &< \sum_2^\infty \frac{lq}{q^2} + \sum_2^\infty \frac{lq}{q^3} + \cdots \\ &< \sum_2^\infty \frac{lq}{q^2} + \tfrac{1}{2} \sum_2^\infty \frac{lq}{q^2} + \cdots \\ &< \tfrac{3}{2} \frac{\sum_1^\infty \frac{ln}{n^2}}{\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}} < \frac{9}{\pi^2} < 1\end{aligned}$$

ist, so schliesst man, wie gross auch $n$ sei, ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$(5.) \qquad \Sigma \frac{lq}{q} - ln < 2.$$

3.

Bezeichnet man allgemein eine Grösse, welche mit der positiven Zahl $\varrho$ zugleich unendlich klein wird, mit $(\varrho)$, so ist bekanntlich nach *Euler* und *Dirichlet*

$$\begin{aligned}\prod_2^\infty \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{1+\varrho}}} &= 1 + \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{4^{1+\varrho}} + \cdots \\ &= \frac{1+(\varrho)}{\varrho}\end{aligned}$$

und daher, wenn man zu den Logarithmen übergeht und zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2} \sum_2^\infty \frac{1}{q^2} + \tfrac{1}{3} \sum_2^\infty \frac{1}{q^3} + \cdots = H$$

setzt,

$$\sum_2^\infty \frac{1}{q^{1+\varrho}} + \tfrac{1}{2} \sum_2^\infty \frac{1}{q^{2+2\varrho}} + \tfrac{1}{3} \sum_2^\infty \frac{1}{q^{3+3\varrho}} + \cdots = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) + (\varrho)$$

oder

$$(6.)\quad \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - H + (\varrho).$$

Es sei nun $fx$ die Summe derjenigen Glieder der Reihe

$$\frac{l2}{2},\quad \frac{l3}{3},\quad \frac{l5}{5},\quad \frac{l7}{7},\quad \frac{l11}{11},\quad \frac{l13}{13},\quad \dots$$

deren Nenner $\leqq x$ sind, $G$ eine gegebene ganzzahlige Grenze, und es werde allgemein, wenn $\mathfrak{A}(n)$ als Function des Stellenzeigers $n$ gegeben ist, unter $\sum\limits_a^b \mathfrak{A}(q)$ die Summe derjenigen Ausdrücke $\mathfrak{A}$ verstanden, welche den in dem Intervall von $a$ bis $b$ mit Einschluss beider Grenzen vorkommenden Primzahlen entsprechen.

Da die Differenz $\frac{fn - f(n-1)}{ln}$ den Werth 0 oder $\frac{1}{n}$ hat, je nachdem $n$ zusammengesetzt oder Primzahl ist, so hat man

$$\sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = \sum_{G+1}^{\infty}{}_n \frac{fn - f(n-1)}{n^\varrho\, ln}$$

$$= -\frac{fG}{(G+1)^\varrho\, l(G+1)} + \sum_{G+1}^{\infty}{}_n fn \left\{ \frac{1}{n^\varrho\, ln} - \frac{1}{(n+1)^\varrho\, l(n+1)} \right\}.$$

Ersetzt man $fn$ durch $ln + D_n$ und beachtet, dass

$$ln \left\{ \frac{1}{n^\varrho\, ln} - \frac{1}{(n+1)^\varrho\, l(n+1)} \right\} = \frac{1}{n^\varrho} - \frac{1}{(n+1)^\varrho} - \frac{l\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}{(n+1)^\varrho\, l(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n^\varrho} - \frac{1}{(n+1)^\varrho} + \frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}\, l(n+1)} + \frac{\lambda}{2n(n+1)^{1+\varrho}\, l(n+1)}$$

ist, so ergiebt sich

$$(7.)\quad \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}\, ln} + \mathfrak{R},$$

wo

$$\mathfrak{R} = \frac{l(G+1) - fG}{(G+1)^\varrho\, l(G+1)} - \frac{1}{(G+1)^{1+\varrho}\, l(G+1)} + \lambda \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)^{1+\varrho}\, l(n+1)}$$

$$+ \sum_{G+1}^{\infty} D_n \left\{ \frac{1}{n^\varrho\, ln} - \frac{1}{(n+1)^\varrho\, l(n+1)} \right\}.$$

Für $\mathfrak{R}$ ist es leicht eine obere Grenze anzugeben, wenn man sich erinnert, dass nach (5.) der Zahlenwerth von $D_n$ nie die Zahl 2 übersteigen kann. Es ist nämlich bis $\varrho = 0$ hin

$$\frac{l(G+1)-fG}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}-\frac{1}{(G+1)^{1+\varrho}l(G+1)} = -\frac{D_G}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}+\frac{l\left(1+\frac{1}{G}\right)-\frac{1}{G+1}}{(G+1)^{\varrho}l(G+1)}$$
$$<\frac{2}{l(G+1)}+\frac{1}{G^2 l(G+1)},$$

$$\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)^{1+\varrho}l(n+1)}<\tfrac{1}{2}\sum_{G+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n\,ln}-\frac{1}{(n+1)l(n+1)}\right\}$$
$$<\frac{1}{2(G+1)l(G+1)},$$

$$\sum_{G+1}^{\infty}D_n\left\{\frac{1}{n^{\varrho}\,ln}-\frac{1}{(n+1)^{\varrho}l(n+1)}\right\}<2\sum_{G+1}^{\infty}\left\{\frac{1}{ln}-\frac{1}{l(n+1)}\right\}$$
$$<\frac{2}{l(G+1)}$$

und somit

$$(8.)\qquad \mathfrak{R}<\frac{4}{l(G+1)}+\frac{1}{G\,l(G+1)}.$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist ferner

$$\frac{1}{\varrho n^{\varrho}}-\frac{1}{\varrho(n+1)^{\varrho}} = \frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)}{2}\frac{1}{(n+1)^{2+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)(2+\varrho)}{2.3}\frac{1}{(n+1)^{3+\varrho}}+\cdots$$

und, wenn von $n=G$ bis $n=\infty$ summirt wird,

$$(9.)\qquad \sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{G^{-\varrho}}{\varrho}-\mathfrak{R}',$$

$$(10.)\qquad \mathfrak{R}' = \frac{1+\varrho}{2}\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+\varrho}}+\frac{(1+\varrho)(2+\varrho)}{2.3}\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{3+\varrho}}+\cdots.$$

Durch Integration der Gleichung (9.) von $\varrho=\varrho$ bis $\varrho=1$ ergiebt sich

$$\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}\,ln}-\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^2\,ln} = \int_{\varrho}^{1}\frac{G^{-\varrho}}{\varrho}d\varrho-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho$$
$$=\int_{\varrho lG}^{\infty}\frac{dx}{e^x-1}-\int_{\varrho lG}^{\infty}\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right\}dx-\int_{1}^{\infty}\frac{G^{-x}}{x}dx-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho$$
$$=-l(1-G^{-\varrho})-\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right\}dx$$
$$-\int_{1}^{\infty}G^{-x}\frac{dx}{x}-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho+(\varrho)$$

oder endlich

$$(11.)\qquad \sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varrho}\,ln} = l\left(\frac{1}{\varrho}\right)-llG-\mathfrak{C}-\int_{1}^{\infty}G^{-x}\frac{dx}{x}+\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{n^2\,ln}-\int_{\varrho}^{1}\mathfrak{R}'\,d\varrho+(\varrho),$$

wo $\mathfrak{E}$ die *Euler*sche Constante

$$0{,}5772156649\ldots$$

vorstellt. Es ist nun aber nach (10.)

$$\int_\varrho^1 \Re'\,d\varrho < \int_0^1 \left\{ \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\varrho}} + \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^{3+\varrho}} + \cdots \right\} d\varrho$$

$$< \sum_{G+1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2\,ln} - \frac{1}{n^3\,ln} \right) + \sum_{G+1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^3\,ln} - \frac{1}{n^4\,ln} \right) + \cdots$$

$$< \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,ln};$$

ferner

$$\int_1^\infty \frac{G^{-x}\,dx}{x} < \frac{1}{G\,lG}$$

und

$$\sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,ln} < \sum_{G+1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n-1)\,l(n-1)} - \frac{1}{n\,ln} \right)$$

$$< \frac{1}{G\,lG}.$$

Die Gleichung (11.) kann hiernach auch in der Gestalt

$$\sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varrho}\,ln} = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - llG - \mathfrak{E} + \frac{\lambda}{G\,lG} + (\varrho)$$

geschrieben werden und giebt mit (7.) und (8.) verbunden

$$(12.)\qquad \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\varrho}} = l\left(\frac{1}{\varrho}\right) - llG - \mathfrak{E} + \delta + (\varrho),$$

wo $\delta$ nie die Grenzen $\pm\left\{\frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{G\,lG}\right\}$ übersteigen kann.

Subtrahirt man (12.) von (6.) und denkt sich hierauf $\varrho$ unendlich klein, so erhält man die erste *Legendre*sche Formel

$$(13.)\qquad \sum_2^G \frac{1}{q} = llG + \mathfrak{E} - H + \delta,$$

$$\delta < \frac{4}{l(G+1)} + \frac{2}{G\,lG}.$$

Die zweite Formel *Legendres* ergiebt sich, wenn man erwägt, dass

$$l \prod_2^G \frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \sum_2^G \frac{1}{q} + \tfrac{1}{2} \sum_2^G \frac{1}{q^2} + \tfrac{1}{3} \sum_2^G \frac{1}{q^3}$$

$$= \sum_2^G \frac{1}{q} + H - \tfrac{1}{2} \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^2} - \tfrac{1}{3} \sum_{G+1}^{\infty} \frac{1}{q^3} - \cdots$$

und dass

$$\tfrac{1}{2}\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{q^2}+\tfrac{1}{3}\sum_{G+1}^{\infty}\frac{1}{q^3}+\cdots<\frac{1}{2G}$$

ist. Mit Hülfe von (13.) wird dann

$$(14.)\qquad l\prod_2^G\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = llG+\mathfrak{E}+\delta'$$

$$(15.)\qquad \prod_2^G\frac{1}{1-\frac{1}{q}} = e^{\mathfrak{E}+\delta'}lG$$

$$\delta'<\frac{4}{l(G+1)}+\frac{2}{GlG}+\frac{1}{2G}.$$

## 4.

Die Constante $H$ lässt sich, wie folgt, berechnen. Wird allgemein

$$\frac{1}{k}\sum_2^{\infty}\frac{1}{q^k} = x_k,\quad \sum_2^{\infty}\frac{1}{n^k} = S_k$$

gesetzt, so ist

$$H = x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+\cdots$$

$$(16.)\qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}lS_2 = x_2 \qquad +x_4 \qquad +x_6 \qquad +x_8+\cdots \\ \tfrac{1}{3}lS_3 = \qquad x_3 \qquad\qquad +x_6 \qquad\qquad +\cdots \\ \tfrac{1}{4}lS_4 = \qquad\qquad x_4 \qquad\qquad\qquad +x_8+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Um aus diesen unendlich vielen Gleichungen $x_2$, $x_3$, $x_4$, ... zu eliminiren, sei $\mu(n)$ ein Multiplicator, welcher

1⁰ den Werth 1 hat, wenn $n=1$ oder aus einer geraden Anzahl verschiedener Primzahlen zusammengesetzt ist,

2⁰ den Werth $-1$ hat, wenn $n$ aus einer ungeraden Anzahl verschiedener Primfactoren zusammengesetzt ist,

3⁰ verschwindet, wenn $n$ gleiche Primfactoren besitzt.

Bezeichnen dann $1$, $d$, $d'$, ... alle Theiler der Zahl $n$, so lässt sich aus der Definition der Zahlen $\mu(1)$, $\mu(2)$, ... leicht beweisen, dass

$$\mu(1)+\mu(d)+\mu(d')+\cdots = 0$$

ist für jede Zahl $n$ ausser der Einheit. Multiplicirt man also die Gleichungen (16.) der Reihe nach mit $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3)$ u. s. w. und addirt hierauf dieselben, so fallen $x_2$, $x_3$, $x_4$, ... alle heraus und man erhält

$$H-\tfrac{1}{2}lS_2-\tfrac{1}{3}lS_3-\tfrac{1}{5}lS_5+\tfrac{1}{6}lS_6-\tfrac{1}{7}lS_7+\tfrac{1}{10}lS_{10}-\cdots = 0$$

oder

$$H = \tfrac{1}{2}lS_2+\tfrac{1}{3}lS_3+\tfrac{1}{5}lS_5-\tfrac{1}{6}lS_6+\tfrac{1}{7}lS_7-\tfrac{1}{10}lS_{10}+\cdots.$$

Hinsichtlich der Convergenz können bei der Eliminirung von $x_2$, $x_3$, $\cdots$ keine Bedenken entstehen, da diese Zahlen wie die Glieder der geometrischen Reihe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... abnehmen.

Mit Hülfe der Werthe der Reihen $S_2$, $S_3$, $S_4$, ... welche *Legendre* in seinem Traité des intégrales eulériennes gegeben hat, findet man

$$(17.)\quad \begin{cases} H = 0{,}31571845205 \\ \mathfrak{C}-H = \lim\left\{\sum\limits_2^G \frac{1}{q} - llG\right\}_{G=\infty} = 0{,}2614972128. \end{cases}$$

5.

Denkt man sich in allen Gliedern der Reihe

$$(18.)\qquad -\frac{l3}{3}+\frac{l5}{5}-\frac{l7}{7}+\frac{l9}{9}-\frac{l11}{11}+\frac{l13}{13}-\cdots,$$

deren Nenner nicht grösser als die gegebene ganzzahlige Grenze $G$ sind, den Logarithmus in die Logarithmen der Primfactoren des betreffenden Nenners zerlegt und hierauf alle Ausdrücke, welche den Logarithmus desselben Primfactors enthalten, in ein Glied zusammengezogen, so wird allgemein der Logarithmus der ungeraden Primzahl $q$ mit dem Factor

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}\left\{1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{f_1}\right\} \\ &\quad+\frac{1}{q^2}\left\{1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{f_2}\right\} \\ &+\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^3}\left\{1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{f_3}\right\} \\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

behaftet erscheinen, wo

$$qf_1 \leqq G < q(f_1+2),\quad q^2f_2 \leqq G < q^2(f_2+2)\quad \text{u. s. w.}$$

Beachtet man nun, dass

$$\begin{aligned} 1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{f_1} &= \frac{\pi}{4}\pm\frac{\lambda}{f_1+2} \\ 1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{f_2} &\leqq 1 \\ 1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{f_3} &\leqq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und dass $\frac{1}{f_1+2} < \frac{q}{G}$ ist, so kann man

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\cdots\pm\frac{1}{f_1} = \frac{\pi}{4}+\frac{\lambda q}{G}$$

setzen und dem Coefficienten von $lq$ in dem vorher definirten Gliede die Gestalt

$$(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{\pi}{4}\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{G}+\lambda'\left\{\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\right\}$$

geben, wo $\lambda'$ ebenso wie $\lambda$ die Einheit nicht übersteigt. Es wird hienach

$$\sum_{1}^{2h+1\leqq G}(-1)^h\frac{l(2h+1)}{2h+1} = \frac{\pi}{4}\sum_{3}^{G}\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}lq}{q}+\frac{\lambda}{G}\sum_{3}^{G}lq+\lambda'\sum\left\{\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\right\}$$

oder

$$(19.)\qquad \sum_{3}^{G}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{lq}{q} = \frac{4}{\pi}\sum_{1}^{2h+1\leqq G}(-1)^h\frac{l(2h+1)}{2h+1}+\mathfrak{R}$$

sein, wo ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\mathfrak{R} < \frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{G}\sum_{3}^{G}lq+\sum_{3}^{G}\frac{lq}{q^2}+\sum_{3}^{G}\frac{lq}{q^3}\cdots\right\}$$

$$< \frac{4}{\pi}\left\{2+\sum_{3}^{\infty}\frac{lq}{q(q-1)}\right\} < \frac{12}{\pi}$$

ist. Da nun die Reihe (18.) convergent ist, so zeigt die Gleichung (19.), dass der Zahlenwerth der Summe $\sum_{3}^{G}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{lq}{q}$ nie eine gewisse angebbare Constante $C$ überschreiten kann, wie gross auch $G$ sei.

## 6.

Mit Hülfe dieses Satzes ist es leicht die Convergenz der Reihe

$$(20.)\qquad -\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{17}-\tfrac{1}{19}-\tfrac{1}{23}+\tfrac{1}{29}-\cdots,$$

deren Glieder aus den reciproken Werthen der aufeinanderfolgenden ungeraden mit dem Zeichen $(-1)^{\frac{q-1}{2}}$ behafteten Primzahlen $q$ bestehen, zu beweisen. Man hat nämlich, wenn

$$\sum_{3}^{x}(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{lq}{q} = \varphi x$$

gesetzt wird,

$$\frac{\varphi n-\varphi(n-1)}{ln} = \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}\ \text{oder} = 0,$$

je nachdem $n$ eine ungerade Primzahl ist oder nicht, und daher

$$\sum_{G+1}^{G'} \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} = \sum_{G+1}^{G'} \frac{\varphi n - \varphi(n-1)}{ln}$$

$$= -\frac{\varphi G}{l(G+1)} + \frac{\varphi G'}{l(G'+1)} + \sum_{G+1}^{G'} \varphi n \left\{\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}\right\}.$$

Da $\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}$ positiv ist, so ist ohne Rücksicht auf das Zeichen

$$\sum_{G+1}^{G'} \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} < \frac{C}{l(G+1)} + \frac{C}{l(G'+1)} + C \sum_{G+1}^{G'} \left\{\frac{1}{ln} - \frac{1}{l(n+1)}\right\}$$

$$< \frac{2C}{l(G+1)},$$

wie weit auch $G'$ über $G$ angenommen werden möge. Die Convergenz der Reihe (20.) ist also dargethan, weil $G$ immer so gross gewählt werden kann, dass $\frac{2C}{l(G+1)}$ von vorgeschriebener Kleinheit wird.

Wird der Werth der unendlichen Reihe $\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}$ mit $A$ bezeichnet, so hat man

$$\sum_3^G \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} = A + \frac{\lambda 2C}{l(G+1)}$$

und nach (13.)

$$\sum_3^G \frac{1}{q} = llG + \mathfrak{C} - H - \tfrac{1}{2} + \delta,$$

woraus durch Addition und Subtraction

$$\text{(21.)} \quad \sum_3^G \frac{1}{f} = \tfrac{1}{2} llG + \frac{\mathfrak{C} - H + A - \frac{1}{2}}{2} + \varepsilon,$$

$$\text{(22.)} \quad \sum_3^G \frac{1}{f'} = \tfrac{1}{2} llG + \frac{\mathfrak{C} - H - A - \frac{1}{2}}{2} + \varepsilon'$$

entspringt; $f$ vertritt alle bis zur Grenze $G$ vorkommenden Primzahlen von der Form $4m+1$, $f'$ die Primzahlen von der Form $4m+3$; $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ können nie die Grenze $\frac{2+C}{l(G+1)} + \frac{1}{GlG}$ übersteigen.

## 7.

Nach *Euler* ist bekanntlich

$$\prod_3^\infty \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}}} = 1 - \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{5^{1+\varrho}} - \frac{1}{7^{1+\varrho}} + \frac{1}{9^{1+\varrho}} - \cdots,$$

$$(23.)\quad \sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}} + \tfrac{1}{2}\sum_3^\infty \frac{1}{q^{2+2\varrho}} + \tfrac{1}{3}\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{3+3\varrho}} + \cdots = l\Big(1 - \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{5^{1+\varrho}} - \cdots\Big).$$

Mit unbegrenzt abnehmendem $\varrho$ strebt die Summe der Reihe $\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}}$ der Grenze $\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}$ zu, weil, ganz wie oben bewiesen wird, dass

$$\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}} = \sum_3^G \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{1+\varrho}} + \frac{\lambda 2C}{l(G+1)}$$

gesetzt werden kann; die rechte Seite von (23.) nähert sich hingegen der Grenze

$$l(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots) = l\Big(\frac{\pi}{4}\Big).$$

Man hat daher

$$\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q} + \tfrac{1}{2}\sum_3^\infty \frac{1}{q^2} + \tfrac{1}{3}\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^3} + \cdots = l\Big(\frac{\pi}{4}\Big),$$

und hieraus

$$\prod_3^\infty \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q}} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Diese Gleichung findet man zwar schon bei *Euler* (Introductio in analysin infinitorum Cap. XV. §. 285); allein sie war so lange problematisch, als die Convergenz des unendlichen Productes unbewiesen blieb.

Setzt man

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \frac{1}{9^{2k+1}} - \cdots = T_{2k+1},$$

$$1 + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}} + \frac{1}{9^{2k}} + \cdots = T_{2k},$$

$$\sum_3^\infty \frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}}{q^{2k+1}} = (2k+1)y_{2k+1}, \quad \sum_3^\infty \frac{1}{q^{2k}} = 2ky_{2k},$$

so hat man

$$\begin{aligned}
lT_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + \cdots,\\
\tfrac{1}{2}lT_2 &= y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + \cdots,\\
\tfrac{1}{3}lT_3 &= y_3 + y_6 + \cdots,\\
\tfrac{1}{4}lT_4 &= y_4 + y_8 + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und mit Hülfe der unter 4. gebrauchten Multiplicatoren $\mu(1)$, $\mu(2)$, ...*)

$$(24.)\qquad y_1 = A = lT_1 - \tfrac{1}{2}lT_2 - \tfrac{1}{3}lT_3 - \tfrac{1}{5}lT_5 + \tfrac{1}{6}lT_6 - \tfrac{1}{7}lT_7 + \tfrac{1}{10}lT_{10} - \cdots.$$

Nach dieser Formel ist die Berechnung von $A$ leicht und man findet

$$A = -0{,}33498132529,$$

$$\frac{\mathfrak{C} - H + A - \frac{1}{2}}{2} = \lim\left\{\sum_3^G \frac{1}{f} - \tfrac{1}{2}llG\right\}_{G=\infty} = -0{,}2867420562,$$

$$\frac{\mathfrak{C} - H - A - \frac{1}{2}}{2} = \lim\left\{\sum_3^G \frac{1}{f'} - \tfrac{1}{2}llG\right\}_{G=\infty} = 0{,}0482392690.$$

## 8.

Bezeichnet $k = 2^\nu p^\pi p'^{\pi'} \ldots$ eine gegebene Zahl, so entspricht nach *Dirichlet* **) jeder zu $k$ theilerfremden Zahl $m$ ein bestimmtes System von Indices in Bezug auf die Zahl $k$, welches folgendermassen gebildet wird: 1°. Wenn $\nu < 2$, so wird der Modul 2 nicht berücksichtigt. 2°. Wenn $\nu \geqq 2$, so existirt immer ein nach dem Modul $2^{\nu-2}$ ganz bestimmter Exponent $\beta_m$, welcher die Bedingung

$$m \equiv (-1)^{\frac{m-1}{2}} 5^{\beta_m} (\mathrm{mod}\, 2^\nu)$$

erfüllt; es sind dann $\frac{m-1}{2}$, $\beta$ die zwei Indices von $m$ in Bezug auf den Modul $2^\nu$. 3°. Für jede Potenz $p^\pi$ einer ungeraden Primzahl, falls dieselbe überhaupt unter den Factoren von $k$ vorkommt, lege man eine primitive Wurzel $g$ zu Grunde und bestimme den Index $\gamma_m$ von $m$ in Bezug auf diese Grundzahl $g$. 4°. Der Complex $\frac{m-1}{2}$, $\beta_m$, $\gamma_m$, $\gamma'_m$, ... stellt dann das System der Indices der Zahl $m$ in Bezug auf $k$ dar; dieser Complex wird immer wenigstens eine Zahl enthalten, wofern nicht $k = 2$ ist, welcher Fall hier ausgeschlossen werden kann.

Es seien nun $\varepsilon$, $\eta$, $\omega$, $\omega'$, ... bez. Wurzeln der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \eta^{2^{\nu-2}} = 1, \quad \omega^{\varphi p^\pi} = 1, \quad \omega'^{\varphi p'^{\pi'}} = 1, \quad \ldots$$

das Zeichen $\varphi p^\pi \ldots$ in der Bedeutung von *Gauss* genommen, wobei zu bemerken ist, dass für $\nu < 2$ die beiden ersten, für $k = 2^\nu$ die dritte und alle

*) Vergleiche Note sur différentes séries par M. *P. Tschebischeff* in *Liouvilles* Journal T. XVI.

**) Abhandlungen der Berliner Akademie 1837.

folgenden Gleichungen wegzufallen haben, und man setze

$$(25.)\qquad \varepsilon^{\frac{m-1}{2}}\eta^{\beta_m}\omega^{\gamma_m}\omega'^{\gamma'_m}\ldots = c_m;$$

für solche Zahlen $m$ dagegen, welche mit $k$ Theiler gemein haben, definire man $c_m = 0$. Die Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ haben dann folgende Eigenschaften:

$$c_m . c_n = c_{mn},\quad c_{m+hk} = c_m,\quad c_{hk+1} = 1,$$
$$c_{n+1}+c_{n+2}+\cdots+c_{n+k} = 0,$$

wenn nicht alle Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega, \omega', \cdots = 1$ sind,

$$\Sigma c_m = \varphi k \quad \text{oder} \quad = 0$$

je nachdem $m \equiv 1 \pmod{k}$ oder nicht; die Summe erstreckt sich auf alle $\varphi k$ Werthe von $c_m$, welche dadurch erhalten werden, dass man in den Ausdruck (25.) alle Werthe von $\varepsilon, \eta, \omega, \omega', \cdots$ substituirt.

Sind nicht alle Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega, \omega', \cdots$ in dem Ausdrucke $c_m$ der Einheit gleich, so convergiren die Reihen

$$\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}+\cdots,$$
$$\frac{c_1 l1}{1}+\frac{c_2 l2}{2}+\frac{c_3 l3}{3}+\cdots.$$

Namentlich ist

$$\frac{c_{n+1}}{n+1}+\frac{c_{n+2}}{n+2}+\frac{c_{n+3}}{n+3}+\cdots = c_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+(c_{n+1}+c_{n+2})\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$+(c_{n+1}+c_{n+2}+c_{n+3})\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots$$

und demnach

$$\operatorname{mod}\left\{\frac{c_{n+1}}{n+1}+\frac{c_{n+2}}{n+2}+\cdots\right\} < \varphi k\left\{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots\right\}$$
$$< \frac{\varphi k}{n+1}.$$

Dies vorausgeschickt, zerlege man in jedem Gliede der Reihe

$$(26.)\qquad \frac{c_2 l2}{2}+\frac{c_3 l3}{3}+\frac{c_4 l4}{4}+\cdots+\frac{c_G lG}{G}$$

den Logarithmus in die Logarithmen der Primfactoren des betreffenden Stellenzeigers und vereinige hierauf alle mit dem Logarithmus der nämlichen Primzahl $q$ behafteten Ausdrücke zu einem Gesammtgliede. Es wird dann allgemein

$lq$ mit dem Factor

$$\begin{array}{l} \frac{c_q}{q}+\frac{c_{2q}}{2q}+\frac{c_{3q}}{3q}+\cdots+\frac{c_{fq}}{fq} \\ +\frac{c_{q^2}}{q^2}+\frac{c_{2q^2}}{2q^2}+\cdots \qquad +\frac{c_{gq^2}}{gq^2} \\ +\frac{c_{q^3}}{q^3}+\frac{c_{2q^3}}{2q^3}+\cdots \qquad +\frac{c_{hq^3}}{hq^3} \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

multiplicirt sein, wo

$$f=\left[\frac{G}{q}\right], \quad g=\left[\frac{G}{q^2}\right], \quad h=\left[\frac{G}{q^3}\right], \cdots.$$

Weil nun aber

$$\begin{aligned} \frac{c_q}{q}+\frac{c_{2q}}{2q}+\cdots+\frac{c_{fq}}{fq} &= \frac{c_q}{q}\left\{\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_f}{f}\right\} \\ &= \frac{c_q}{q}\sum_1^\infty \frac{c_n}{n}-\frac{c_q}{q}\sum_{f+1}^\infty \frac{c_n}{n}, \\ \frac{c_{q^2}}{q^2}+\frac{c_{2q^2}}{2q^2}+\cdots+\frac{c_{gq^2}}{gq^2} &= \frac{c_{q^2}}{q^2}\left\{\frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_g}{g}\right\} \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \end{aligned}$$

und dem Modul nach

$$\begin{gathered} \frac{c_{f+1}}{f+1}+\frac{c_{f+2}}{f+2}+\cdots<\frac{\varphi k}{1+f}<\frac{q\varphi k}{G}, \\ \frac{c_1}{1}+\frac{c_2}{2}+\cdots+\frac{c_g}{g}<\varphi k, \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

so kann, wenn zur Abkürzung

$$\sum_1^\infty \frac{c_n}{n}=L$$

gesetzt wird, das Gesammtglied mit $lq$ auf die Form

$$\frac{Lc_q lq}{q}+\mathfrak{R}$$

gebracht werden, wo

$$\begin{aligned} \operatorname{mod}\mathfrak{R} &< \varphi k\left\{\frac{1}{G}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\cdots\right\}lq \\ &< \varphi k\left\{\frac{1}{G}+\frac{1}{q(q-1)}\right\}lq. \end{aligned}$$

Hiernach wird

$$(27.)\qquad \sum_{1}^{G}\frac{c_n ln}{n} = L\sum_{2}^{G}\frac{c_q lq}{q}+\mathfrak{R}',$$

$$\operatorname{mod}\mathfrak{R}' < \varphi k\left\{\frac{1}{G}\Sigma lq+\Sigma\frac{lq}{q(q-1)}\right\}$$

$$< \varphi k\left\{2+\sum_{2}^{\infty}\frac{lq}{q(q-1)}\right\}.$$

Da die Reihe (26.) convergent und $L$ nach *Dirichlet* von Null verschieden ist, so schliesst man aus (27.) dass der Modul der Summe $\sum_{2}^{G}\frac{c_q lq}{q}$ nie eine gewisse angebbare Constante $C$ überschreiten kann, wie gross auch $G$ sei.

## 9.

Bezeichnet man die Summe $\sum_{2}^{x}\frac{c_q lq}{q}$ mit $\psi x$, so ist

$$\frac{\psi n-\psi(n-1)}{ln} = \frac{c_q}{q}\quad \text{oder}\quad = 0,$$

je nachdem $n$ eine Primzahl (ausser den in $k$ aufgehenden) ist oder nicht ist. Es ist daher

$$\sum_{1+G}^{G'}\frac{c_q}{q} = \sum_{1+G}^{G'}\frac{\psi n-\psi(n-1)}{ln}$$

$$= -\frac{\psi G}{l(G+1)}+\frac{\psi G'}{l(1+G')}+\sum_{G+1}^{G'}\psi n\left\{\frac{1}{ln}-\frac{1}{l(n+1)}\right\}$$

und dem Modul nach

$$< C\left(\frac{1}{l(G+1)}+\frac{1}{l(G'+1)}+\sum_{G+1}^{G'}\left\{\frac{1}{ln}-\frac{1}{l(n+1)}\right\}\right)$$

$$< \frac{2C}{l(G+1)},$$

wie weit auch $G'$ über $G$ hinaus angenommen werde. Die Reihe $\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q}$ ist demnach convergent, wenn nicht alle Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega, \omega' \ldots = 1$ sind, und zugleich sieht man aus den Gleichungen

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q} = \sum_{2}^{G}\frac{c_q}{q}+\frac{\lambda 2C}{l(G+1)},$$

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q^{1+\varrho}} = \sum_{2}^{G}\frac{c_q}{q^{1+\varrho}}+\frac{\lambda' 2C}{l(G+1)},$$

dass $\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q^{1+\varrho}}$ mit unbegrenzt abnehmendem $\varrho$ der Grenze $\sum_{2}^{\infty}\frac{c_q}{q}$ zustrebt.

Da nun

$$\prod_2^\infty \frac{1}{1-\frac{c_q}{q^{1+\varrho}}} = \sum_1^\infty \frac{c_n}{n^{1+\varrho}},$$

$$\sum_2^\infty \frac{c_q}{q^{1+\varrho}} + \tfrac{1}{2}\sum_2^\infty \frac{c_{q^2}}{q^{2+2\varrho}} + \cdots = \log \sum_1^\infty \frac{c_n}{n^{1+\varrho}},$$

so findet man für ein unendlich kleines $\varrho$ die Grenzgleichungen

$$\sum_2^\infty \frac{c_q}{q} + \tfrac{1}{2}\sum_2^\infty \frac{c_{q^2}}{q^2} + \cdots = \log L,$$

$$\prod_2^\infty \frac{1}{1-\frac{c_q}{q}} = L = \sum_1^\infty \frac{c_n}{n}.$$

Es werde der Werth der Reihe $\sum_2^\infty \frac{c_q}{q}$ mit $A(\varepsilon, \eta, \omega, \ldots)$ und die Summe der reciproken in $k$ aufgehenden Primzahlen mit $\sigma$ bezeichnet. Es ist dann für $\varepsilon = \eta = \omega = \cdots = 1$ nach (13.), vorausgesetzt dass $G$ die grösste in $k$ enthaltene Primzahl übersteigt,

$$(28.) \quad \sum_2^G \frac{c_q}{q} = llG + \mathfrak{C} - H - \sigma + \delta$$

und in allen anderen Fällen

$$(29.) \quad \sum_2^G \frac{c_q}{q} = A(\varepsilon, \eta, \omega, \ldots) + \frac{\lambda 2C}{l(G+1)}.$$

Ist nun $a$ eine gegebene zu $k$ theilerfremde Zahl und $a' \equiv \frac{1}{a} (\operatorname{mod} k)$, so multiplicire man die Gleichung (29.) mit $\frac{c_{a'}}{\varphi k}$, summire hierauf in Bezug auf alle Wurzelverbindungen $\varepsilon$, $\eta$, $\omega$, ... mit alleiniger Ausnahme der Verbindung $\varepsilon = \eta = \omega = \cdots = 1$ und füge noch die mit $\frac{1}{\varphi k}$ multiplicirte Gleichung (28.) hinzu. Aus der Gesammtsumme der linken Seite fallen dann alle Glieder heraus mit Ausnahme derjenigen reciproken Primzahlen $q$, welche der Bedingung

$$a'q \equiv 1 \quad \text{d. h.} \quad q \equiv \frac{1}{a'} \equiv a (\operatorname{mod} k)$$

genügen. Es ist demnach

$$\sum_2^G \frac{1}{q} = \frac{llG}{\varphi k} + \frac{1}{\varphi k} \{\mathfrak{C} - H - \sigma + \Sigma c_{a'} A(\varepsilon, \eta, \omega, \ldots)\} + \delta';$$

die Summe bezieht sich auf alle in dem Intervall $2 \ldots G$ vorkommenden Primzahlen von der Form $a + mk$.

Krakau, 20. Juli 1873.