

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1875

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0080

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0080](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0080)

**LOG Id:** LOG\_0005

**LOG Titel:** Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen \*).

(Von Frau *Sophie von Kowalevsky*.)

## E i n l e i t u n g.

Es sei eine algebraische Differentialgleichung

$$(1.) \quad G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

vorgelegt, wo  $G$  eine ganze rationale Function der unabhängigen Veränderlichen  $x$ , der als Function derselben zu bestimmenden Grösse  $y$  und der Ableitungen derselben nach  $x$  bis zur  $n^{\text{ten}}$  Ordnung hin bedeutet.

Eine analytische Function ist vollständig bestimmt, sobald irgend ein regulärer Zweig derselben gegeben ist. Es kommt also darauf an, auf die allgemeinste Weise eine Potenzreihe

$$\sum_0^{\infty} b_\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!},$$

wo  $a, b_0, b_1, \dots$  Constanten bedeuten, so zu bestimmen, dass dieselbe, für  $y$  gesetzt, der gegebenen Differentialgleichung genügt, und innerhalb eines gewissen, die Stelle  $a$  umgebenden Bezirks convergirt.

Es muss also, wenn man diese Reihe für  $y$  in den Ausdruck  $G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$  einsetzt und denselben nach Potenzen von  $x-a$  entwickelt, jeder einzelne Coefficient dieser Entwicklung gleich Null werden.

So erhält man zunächst zwischen  $a, b_0, b_1, \dots, b_n$  die Gleichung

$$(2.) \quad G(a, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0.$$

Nun hat aber, wenn  $y$  irgend eine reguläre Function von  $x$  ist, die  $\lambda^{\text{te}}$  Ableitung von

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

die Form

$$G'\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \frac{d^{n+\lambda} y}{dx^{n+\lambda}} + H_\lambda\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n+\lambda-1} y}{dx^{n+\lambda-1}}\right),$$

wo  $G'$  die partielle Ableitung von  $G$  in Beziehung auf  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , und  $H_\lambda$  eine

\*) Diese Abhandlung ist zugleich als Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen Facultät zu Göttingen erschienen.

ganze rationale Function von  $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n+\lambda-1}y}{dx^{n+\lambda-1}}$  bezeichnet. Es muss also (für  $\lambda = 1, 2, \dots, \infty$ )

$$(3.) \quad G'(a, b_0, b_1, \dots, b_n) b_{n+\lambda} + H_\lambda(a, b_0, b_1, \dots, b_{n+\lambda-1}) = 0$$

sein, wenn der Coefficient von  $(x-a)^\lambda$  in der genannten Entwicklung von

$$G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

verschwinden soll. Umgekehrt genügt die für  $y$  angenommene Reihe der Gleichung (1.) formell, wenn die Gleichung (2.) und sämtliche Gleichungen (3.) erfüllt werden.

Durch die Gleichungen (3.) werden aber sämtliche Coefficienten  $b_\nu$ , deren Index  $> n$  ist, eindeutig bestimmt, sobald  $a, b_0, b_1, \dots, b_n$  gegeben sind und zugleich  $G'(a, b_0, b_1, \dots, b_n)$  einen von Null verschiedenen Werth hat.

So ergibt sich der Satz:

„Nimmt man die Constanten

$$a, b_0, b_1, \dots, b_n$$

willkürlich, jedoch so an, dass die Gleichung

$$G(a, b_0, b_1, \dots, b_n) = 0$$

eine einfache Wurzel  $b_n$  hat, so lassen sich die Grössen

$$b_{n+1}, b_{n+2}, \dots$$

stets in eindeutiger Weise so bestimmen, dass

$$\sum_0^\infty b_\nu \frac{(x-a)^\nu}{\nu!},$$

für  $y$  gesetzt, der Gleichung (1.) formell genügt.“

*Diese Reihe ist aber auch stets innerhalb eines bestimmten Bezirks convergent und stellt, wenn man  $x$  innerhalb desselben annimmt, eine die vorgelegte Differentialgleichung befriedigende Function dar. Aus jeder solchen Reihe entspringt dann ferner eine bestimmte (eindeutige oder mehrdeutige) analytische Function, von der jeder reguläre Zweig die vorgelegte Differentialgleichung ebenfalls befriedigt\*).*

\*) Dieser Satz findet sich zuerst in der Weierstrassschen Abhandlung „Zur Theorie der analytischen Facultäten“ (Crelles Journal, Bd. 51, S. 43) ausgesprochen, und ist bald darauf auch von den Herren Briot und Bouquet bewiesen worden (Journal de l'École polytechnique cah. 36). Derselbe bleibt bestehen, wenn der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (1.) eine eindeutige und in eine beständig convergirende Potenzreihe der Grössen  $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$  entwickelbare Function ist.



nach  $b_{0,0}$  aufgelöst eine endliche, einfache Wurzel hat, und nimmt diese für  $b_{0,0}$ , so lassen sich, wenn man die Ausdrücke auf der Linken der Gleichungen (5.), (6.) nach Potenzen von  $x-a$  entwickelt, die Coefficienten der einzelnen Potenzen gleich Null setzt, die Grössen

$$\begin{array}{lll} b_{0,1}, & b_{0,2}, & \dots \\ b_{1,1}, & b_{1,2}, & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \dots \end{array}$$

in eindeutiger Weise so bestimmen, dass den Gleichungen (5.), (6.) *formell* genügt wird.

Dann sind aber auch die so sich ergebenden  $n+1$  Reihen (7.) stets innerhalb eines bestimmten Bezirks convergent und stellen, wenn man  $x$  auf diesen Bezirk beschränkt, ein System von  $n+1$  Functionen dar, welche die in Rede stehenden Gleichungen wirklich befriedigen.

Aus demselben entspringt dann ein System (eindeutiger oder mehrdeutiger) analytischer Functionen von der Beschaffenheit, dass je  $n+1$  zusammengehörige reguläre Zweige derselben die Gleichungen (5.), (6.) ebenfalls befriedigen.

Umgekehrt, wenn ein System von  $n+1$  analytischen Functionen die Gleichungen (5.), (6.), nicht aber zugleich die Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_0}$$

befriedigt (d. h. wenn dasselbe nicht eine singuläre Lösung des Systems von partiellen Differentialgleichungen bildet), so lässt sich, wofern man specielle Werthe von  $a$  ausnimmt, jedes System zusammengehöriger Elemente \*) dieser Functionen durch Reihen, welche in der beschriebenen Weise gebildet sind, ausdrücken.

Die singulären Lösungen erhält man aber, indem man die vorgelegten Gleichungen (5.), (6.) mit der Gleichung

$$\frac{\partial G(x, y_0, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_0}$$

combinirt.

Diese Sätze, in der gegebenen Fassung, entnehme ich den Vorlesungen des Herrn *Weierstrass*, meines verehrten Lehrers. In der vor-

\*) Vgl. §. III. im Anfang.







ist, beweisen, dass sie sämmtlich innerhalb eines bestimmten Bezirkes convergent sind, so steht dasselbe für die Reihen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  fest.

Dieses vorausgesetzt, werde, wie es immer möglich ist, eine positive Grösse  $g$  so angenommen, dass sämmtliche Reihen  $G_{\alpha, \beta}^{(g)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  convergiren, wenn

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi = g$$

gesetzt wird; dann kann man eine zweite, ebenfalls positive Grösse  $G$  so annehmen, dass aus dem Bruche

$$\frac{G}{1 - \frac{\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_n}{g}}$$

wenn derselbe nach steigenden Potenzen von  $\psi_1, \dots, \psi_n$  entwickelt wird, eine Reihe  $\bar{G}(\psi_1, \dots, \psi_n)$  entspringt, in welcher jeder einzelne Coefficient positiv und grösser als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in jeder der Reihen  $G_{\alpha, \beta}^{(g)}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ist.

Ebenso kann man zwei positive Grössen  $g'$  und  $\rho$  so wählen, dass in der Reihe, welche aus der Entwicklung des Bruches

$$\frac{g'(x_1 + x_2 + \dots + x_r)}{1 - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_r}{\rho}}$$

nach steigenden Potenzen von  $x_1, \dots, x_r$  hervorgeht und die mit  $\psi(x_1, \dots, x_r)_0$  bezeichnet werden möge, jeder Coefficient positiv und grösser als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in jeder der Reihen

$$\varphi(x_1, \dots, x_r)_{1,0}, \dots, \varphi(x_1, \dots, x_r)_{n,0}$$

wird.

Werden dann in dem System (5.) sämmtliche Reihen

$$\bar{G}_{\alpha, \beta}^{(g)}(\psi_1, \dots, \psi_n) = \bar{G}(\psi_1, \dots, \psi_n)$$

angenommen, und wird zugleich festgesetzt, dass für  $x=0$  jede der Functionen  $\psi_\alpha$  in

$$\psi(x_1, \dots, x_r)_0$$

übergehen soll, so sind die eben angegebenen Bedingungen erfüllt, und es braucht also nur bewiesen zu werden, dass die so definirten Reihen  $\psi_1, \dots, \psi_n$  innerhalb eines gewissen Bezirkes convergent sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen werden aber die sämmtlichen Reihen  $\psi_1, \dots, \psi_n$  einander gleich und Functionen bloss von  $x$  und von

$$\left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_r}{\rho} \right).$$

Das System (5.) reducirt sich also, wenn man

$$\psi = \frac{\psi_1 + \dots + \psi_n}{g}, \quad y = \frac{x_1 + \dots + x_r}{e}$$

setzt, so dass  $\psi_\alpha = \frac{g}{n} \psi$  wird (für  $\alpha = 1 \dots n$ ), auf die einzige partielle Differentialgleichung

$$(6.) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{a}{1-\psi} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

wo  $a$  eine positive Constante bedeutet.

Dabei ist noch die Bedingung hinzuzufügen, dass für  $x = 0$

$$\psi \text{ in } \frac{by}{1-y}$$

übergehen soll, wo  $b$  ebenfalls eine Constante bezeichnet.

Die Gleichung (6.) besagt nichts weiter, als dass zwischen den Grössen  $\psi$  und  $(1-\psi)y + ax$  eine Relation besteht. Diese wird aber durch die Feststellung, dass  $\psi$  für  $x = 0$  in  $\frac{by}{1-y}$  übergehen soll, eine völlig bestimmte; und es ergibt sich zwischen  $\psi$ ,  $x$ ,  $y$  die Gleichung

$$(1-\psi)y + ax = \frac{1-\psi}{b+\psi} \psi,$$

woraus man

$$\psi = \frac{1 - (1-b)y - ax - \sqrt{(1 - (1+b)y - ax)^2 - 4abx}}{2(1-y)}$$

erhält, mit der Bedingung, dass bei der Entwicklung dieses Ausdruckes nach Potenzen von  $x$ ,  $y$  das Anfangsglied in der Entwicklung der Quadratwurzel 1 sei.

Die so sich ergebende Potenzreihe von  $x$ ,  $y$  hat nun einen bestimmten Convergenzbezirk, und es sind zugleich ihre Coefficienten durchweg positiv, wie man sofort sieht, wenn man die Entwicklung von  $\psi$  nach der im Vorstehenden auseinandergesetzten Methode vornimmt. Es wird daher auch die Potenzreihe von  $(x, x_1, \dots, x_r)$ , in welche  $\psi$  durch die Substitution

$$y = \frac{x_1 + \dots + x_r}{e}$$

übergeht, einen bestimmten Convergenzbezirk besitzen. Für jedes innerhalb dieses Bezirkes enthaltene Werthsystem  $(x, x_1, \dots, x_r)$  sind dann sicher auch die Reihen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sämtlich unbedingt convergent. Dieselben besitzen also jedenfalls einen gemeinschaftlichen Convergenzbezirk und stellen, wenn





hergestellt, welche für  $\varphi_1, \dots \varphi_n$  gesetzt den Differentialgleichungen formell genügen, so dass in jeder dieser Gleichungen die Ausdrücke auf der linken und rechten Seite, wenn man sie nach Potenzen von  $x, x_1, \dots x_r$  entwickelt, in den Coefficienten der gleichstelligen Glieder übereinstimmen; so werden jene Reihen stets innerhalb eines bestimmten Bezirks convergiren und analytische Functionen, welche die Differentialgleichungen wirklich befriedigen, darstellen, sobald nur folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Es müssen die Reihen

$$\varphi(0, x_1, \dots x_r)_1, \dots \varphi(0, x_1, \dots x_r)_n$$

einen gemeinschaftlichen Convergenzbezirk besitzen;

b) es muss das Werthsystem

$$\varphi(0, 0, \dots 0)_1, \dots \varphi(0, 0, \dots 0)_n$$

innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Functionen

$$G_{\alpha, \beta}^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots \varphi_n), \quad G^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots \varphi_n)$$

enthalten sein;

c) es darf keine der Functionen  $G^{(\gamma)}(\varphi_1, \dots \varphi_n)$  an der Stelle

$$(\varphi_1 = \varphi(0 \dots 0)_1, \dots \varphi_n = \varphi(0 \dots 0)_n)$$

verschwinden.

Wenn insbesondere die  $G_{\alpha, \beta}^{(\gamma)}, G^{(\gamma)}$  sämtlich ganze Functionen oder beständig convergirende Reihen von  $\varphi_1, \dots \varphi_n$  sind, so ist die Bedingung b) von selbst erfüllt.

### §. II.

Ich nehme jetzt an, es sei zur Bestimmung einer Function  $\varphi$  von  $r+1$  Veränderlichen  $(x, x_1, \dots x_r)$  irgend eine algebraische partielle Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung gegeben, und auf die Form

$$(1.) \quad G\left(x, x_1, \dots x_r, \varphi \dots \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \dots\right) = 0$$

gebracht, wo  $G$  eine ganze rationale Function von  $x, x_1, \dots x_r, \varphi$  und denjenigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}},$$

in denen

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n$$

ist, bedeutet. Dabei darf man voraussetzen, es sei diese Gleichung in dem

Sinne irreductibel, dass  $G$  nicht das Product zweier Ausdrücke von derselben Form ist.

Es handelt sich darum, auf die allgemeinste Weise ein diese Differentialgleichung befriedigendes *Functionenelement* (in dem Sinne, wie Herr *Weierstrass* dies Wort gebraucht)

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$$

zu bestimmen, d. h. eine innerhalb eines bestimmten Bezirks convergente und der Differentialgleichung genügende Potenzreihe von  $x-a, x_1-a_1, \dots, x_r-a_r$ , wo  $a, a_1, \dots, a_r$  Constanten bezeichnen.

Ich betrachte nun zunächst den Fall, den ich den *normalen* nennen will, wo von den Ableitungen

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^n}, \quad \dots \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_r^n}$$

wenigstens eine, — ich will annehmen  $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$  — in  $G$  wirklich vorkommt.

Dieses vorausgesetzt lässt sich zeigen, dass man eine der Differentialgleichung genügende Reihe

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r) = \sum \left( b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!} \right)$$

( $\alpha = 0 \dots \infty, \alpha_1 = 0 \dots \infty, \dots, \alpha_r = 0 \dots \infty$ )

erhalten kann, in der, wenn man sie auf die Form

$$\sum_0^\infty \varphi^{(\nu)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

bringt, von den Functionen  $\varphi^{(\nu)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$  die  $n$  ersten

$$\varphi^{(0)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r), \quad \dots \quad \varphi^{(n-1)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$$

im Allgemeinen willkürlich angenommen werden können, die übrigen dann aber durch die Differentialgleichung bestimmt werden.

Setzt man die für  $\varphi$  angenommene Reihe in den Ausdruck auf der Linken der Gleichung (1.) ein, und entwickelt denselben nach Potenzen von  $x-a, x_1-a_1, \dots, x_r-a_r$ , so muss zunächst das constante Glied verschwinden, d. h. es muss

$$(2.) \quad G(a, a_1, \dots, a_r, b_{0,0, \dots, 0} \dots b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \dots) = 0$$

sein.

Ich bezeichne ferner zur Abkürzung

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

mit  $\varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$  und

$$\varphi^{(\nu)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$$

bloss mit  $\varphi^{(\nu)}$ . Dann wird für  $x = a$

$$\varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \text{ gleich } \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

Entwickelt man nun

$$G(x, x_1, \dots, x_r, \varphi, \dots, \varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}, \dots)$$

nach Potenzen von  $x - a$ , so wird der Coefficient von  $(x - a)^0$  eine ganze Function von  $\varphi^{(n)}$ , deren Coefficienten ausser den Veränderlichen  $x_1, \dots, x_r$  nur die Functionen  $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$  und deren Ableitungen nach  $(x_1, \dots, x_r)$  enthalten, und es muss  $\varphi^{(n)}$  so bestimmt werden, dass diese Function, welche mit  $G_0(\varphi^{(n)})$  bezeichnet werde, verschwindet, und zugleich  $\varphi^{(n)}$  eine Potenzreihe von  $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$  wird. Dies ist aber immer, und zwar nur auf eine einzige Weise, möglich, wenn man  $a, a_1, \dots, a_r$  und diejenigen Grössen

$$b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r},$$

in denen

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n, \quad \alpha < n$$

ist, so annimmt, dass sich aus der Gleichung (2.) für  $b_{n,0,\dots,0}$  wenigstens ein endlicher Werth, der eine einfache Wurzel der Gleichung ist, ergibt. Diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, sind die Reihen

$$\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$$

im Uebrigen willkürlich, jedoch so, dass jede von ihnen einen Convergenzbezirk besitzt, anzunehmen. Die Coefficienten der Reihe

$$\varphi^{(n)}$$

die dann stets auch einen gewissen Convergenzbezirk besitzt, werden rational aus den Coefficienten der vorstehenden und aus  $b_{n,0,\dots,0}$  zusammengesetzt; es giebt also so viel verschiedene Functionen  $\varphi^{(n)}$ , als verschiedene Werthe von  $b_{n,0,\dots,0}$ , die einfache Wurzeln der Gleichung (2.) sind, existiren.

Differentiirt man ferner den Ausdruck  $G$ , als Function von  $x$  betrachtet, so hat die  $\lambda^{\text{te}}$  Ableitung desselben die Form

$$G'(\varphi_{n,0,\dots,0}) \frac{\partial^{n+\lambda} \varphi}{\partial x^{n+\lambda}} + H_\lambda(x, x_1, \dots, x_r, \varphi, \dots, \varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \dots}),$$

wo  $G'(\varphi_{n,0,\dots,0})$  die partielle Ableitung von  $G$  nach  $\varphi_{n,0,\dots,0}$  ist und  $H_\lambda$  eine ganze Function von  $x, x_1, \dots, x_r$  und denjenigen Grössen  $\varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$  bezeichnet, in welchen

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n + \lambda, \quad \alpha < n + \lambda$$

ist. Der Coefficient von  $\frac{(x-a)^\lambda}{\lambda!}$  in der erwähnten Entwicklung von  $G$  hat also die Form

$$G'_0(\varphi)^{(n)} \varphi^{(n+\lambda)} + H_{\lambda,0},$$

wo  $G'_0$  und  $H_{\lambda,0}$  diejenigen Functionen von  $x_1, \dots, x_r$  bezeichnen, in welche  $G'$  und  $H_\lambda$  dadurch übergehen, dass man  $x = a$  und

$$\varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi^{(a)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

setzt.

Dieser Coefficient muss nun gleich Null sein, und da sich, weil  $G'_0(\varphi)^{(n)}$  an der Stelle  $(x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r)$  nicht verschwindet,

$$\frac{1}{G'_0(\varphi)^{(n)}}$$

in eine Potenzreihe von  $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$  entwickeln lässt, so ergibt sich  $\varphi^{(n+\lambda)}$  als Potenzreihe von  $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$ , welche völlig bestimmt ist, sobald

$$\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n+\lambda-1)}$$

es sind. Daraus folgt, dass sich, wenn man  $a, a_1, \dots, a_r, \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n-1)}$  den obigen Bedingungen gemäss annimmt, darauf nach Fixirung des

Coefficienten  $b_{n,0,\dots,0}^{(n)}$  zunächst  $\varphi^{(n)}$  und dann

$$\varphi^{(n+1)}, \varphi^{(n+2)}, \dots$$

so bestimmen lassen, und zwar nur auf eine einzige Weise, wie es erforderlich ist, wenn der Ausdruck

$$\varphi = \sum^{(\nu)} \varphi(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

der vorgelegten Differentialgleichung formell genügen soll.

Um nun zu beweisen, dass  $\varphi$  ein Element einer diese Gleichung befriedigenden analytischen Function von  $x, x_1, \dots, x_r$  darstellt, hat man zu zeigen, dass sie innerhalb eines gewissen Bezirks convergirt.

Dies geschieht in folgender Weise:

Ich setze

$$(3.) \quad x = a + u, \quad x_1 = a_1 + u_1, \quad \dots \quad x_r = a_r + u_r$$

und bezeichne, unter  $\varphi$  jetzt die Potenzreihe von  $u, u_1, \dots, u_r$  verstehend, in welche  $\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$  durch diese Substitution übergeht,

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \dots \quad \frac{\partial^n \varphi}{\partial u^n}$$

beziehlich mit

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \dots \quad \varphi_n,$$

sowie die übrigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}},$$

in denen  $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n$  ist, in irgend einer Ordnung genommen mit  $\varphi_{n+1}, \dots, \varphi_s$ .

Dann hat man

$$(4.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \varphi_1, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} = \varphi_n. \end{array} \right.$$

Ferner kann man, wenn  $\lambda > 0$ ,

$$(5.) \quad \frac{\partial \varphi_{n+\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial u_\nu}$$

setzen, wo  $\mu$  eine der Zahlen  $1 \dots s$ , und  $\nu$  eine der Zahlen  $1 \dots r$  ist. (Ist nämlich  $\varphi_{n+\lambda} = \varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$ , so ist mindestens eine der Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , z. B.  $\alpha_\nu$ , von Null verschieden, und man hat dann

$$\frac{\partial \varphi_{n+\lambda}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_{\alpha+1, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu-1, \dots, \alpha_r}}{\partial u_\nu},$$

und es ist  $\varphi_{\alpha+1, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu-1, \dots, \alpha_r}$  eine der Grössen  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_s$ ).

Bezeichnet man ferner, unter  $G$  wie vorhin den Ausdruck auf der

linken Seite der Gleichung (1.) verstehend, dessen partielle Ableitungen in Beziehung auf  $x, \varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_s$  respective mit

$$G'(x), \quad G'(\varphi_0), \quad G'(\varphi_1), \quad \dots \quad G'(\varphi_s),$$

so hat man

$$G'(\varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} = - \left\{ G'(x) + G'(\varphi_0) \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} + \dots + G'(\varphi_{n-1}) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial u} + G'(\varphi_{n+1}) \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial u} + \dots + G'(\varphi_s) \frac{\partial \varphi_s}{\partial u} \right\},$$

also

$$(6.) \quad G'(\varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} = - \sum_1^{s-n} \left( G'(\varphi_{n+\lambda}) \frac{\partial \varphi_{n+\lambda}}{\partial u_\nu} \right) - \sum_0^{n-1} \left( G'(\varphi_\lambda) \varphi_{\lambda+1} \right) - G(x).$$

Endlich ist

$$(7.) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0.$$

Die Gleichungen (4.), (5.), (6.), (7.) bilden nun für die Grössen  $x, x_1, \dots x_r, \varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_s$ , welche sämmtlich Potenzreihen von  $u, u_1, \dots u_r$  sind, ein System partieller Differentialgleichungen von der in §. I, Zusatz D) betrachteten Form. Da sie nun überdies den dort unter a) und c) angegebenen Bedingungen genügen, so ist damit festgestellt, dass sie sämmtlich innerhalb eines bestimmten Bezirks convergiren.

Jede auf die angegebene Weise hergestellte Potenzreihe

$$\varphi(x, x_1, \dots x_r | a, a_1, \dots a_r)$$

ist also wirklich ein Element einer die vorgelegte Differentialgleichung befriedigenden analytischen Function.

Es ist jetzt noch zu untersuchen, ob man umgekehrt auch für jede der vorgelegten Differentialgleichung genügende analytische Function  $\varphi$  ein sie definirendes Element durch das auseinandergesetzte Verfahren erhalten kann.

Es sei

$$\varphi(x, x_1, \dots x_r) = \sum_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} b_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!}$$

ein beliebiges Element einer solchen Function, so bestehen für dasselbe, wenn die obigen Bezeichnungen beibehalten werden, die Gleichungen:

$$G_0^{(n)}(\varphi) = 0, \\ G_0^{(n)}(\varphi) \varphi + H_{\lambda, \nu}^{(n)} = 0.$$

Wenn nun  $b_{n,0,\dots,0}$  nicht eine mehrfache Wurzel der Gleichung

$$G(a, a_1, \dots, a_r, b_{0,\dots,0}, \dots, b_{\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_r}, \dots, b_{n,0,\dots,0}) = 0$$

ist, so sind durch diese Gleichungen und die Bedingung, dass  $\varphi$  an der Stelle  $(x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r)$  den Werth  $b_{n,0,\dots,0}$  haben soll,

$$\begin{matrix} (n) & (n+1) & (n+2) & \dots \\ \varphi, & \varphi, & \varphi, & \dots \end{matrix}$$

vollständig bestimmt.

Nun besitzt aber die Function stets unendlich viele Elemente, für welche  $b_{n,0,\dots,0}$  eine einfache Wurzel der ebengenannten Gleichung ist, wofern die Function nicht eine sogenannte singuläre Lösung der Differentialgleichung ist, d. h. ausser dieser auch der Gleichung

$$G' \left( \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right) = 0$$

genügt. Damit ist bewiesen:

Ist  $\varphi$  irgend eine der vorgelegten Differentialgleichung, aber nicht auch der Gleichung

$$G' \left( \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right) = 0$$

genügende analytische Function, so lässt sich jedes Element

$$\varphi(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$$

derselben, für welches  $G' \left( \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right)$  an der Stelle  $(x = a, x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r)$  einen von Null verschiedenen Werth hat, durch das im Vorstehenden entwickelte Verfahren bestimmen.

In dem Falle aber, wo  $\varphi$  eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist, erhält man für sie durch die Combination der beiden Gleichungen

$$G = 0, \quad G' \left( \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right) = 0$$

entweder eine algebraische Gleichung oder eine partielle Differentialgleichung, der sie als nicht singuläre Lösung genügt.

### §. III.

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung nicht die normale Form hat, so kann man ihr dieselbe doch stets dadurch geben, dass man an Stelle der Grössen  $x, x_1, \dots, x_r$  ebenso viele lineare Functionen derselben  $(y, y_1, \dots, y_r)$  als Argumente von  $\varphi$  einführt.



$$\varphi_{\alpha'+1, \alpha'_1, \dots, \alpha'_r} = c^{\alpha'+1} c_1^{\alpha'_1} \dots c_r^{\alpha'_r} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} + \dots,$$

$$\varphi_{\alpha''+1, \alpha''_1, \dots, \alpha''_r} = c^{\alpha''+1} c_1^{\alpha''_1} \dots c_r^{\alpha''_r} \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} + \dots,$$

etc.

wo die weggelassenen Glieder nur solche Ableitungen

$$\frac{\partial^{\beta+\beta_1+\dots+\beta_r} \varphi}{\partial y^\beta \partial y_1^{\beta_1} \dots \partial y_r^{\beta_r}}$$

enthalten, in denen  $\beta + \beta_1 + \dots + \beta_r = n + 1$ , aber  $\beta < n + 1$  ist. Man hat also

$$\frac{\partial G}{\partial x} = (G_1 c^{\alpha'+1} c_1^{\alpha'_1} \dots c_r^{\alpha'_r} + G_2 c^{\alpha''+1} c_1^{\alpha''_1} \dots c_r^{\alpha''_r} + \dots) \frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}} + \dots \text{ etc.},$$

wo in den weggelassenen Gliedern, nachdem die in ihnen enthaltenen Ableitungen von  $\varphi$  nach  $x, x_1, \dots, x_r$  in Ableitungen nach  $y, y_1, \dots, y_r$  verwandelt worden,  $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$  nicht vorkommt.

Wählt man nun die Constanten  $c, c_1, \dots, c_r$  so, dass der Coefficient von  $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$  in der vorstehenden Gleichung, als Function von  $x, x_1, \dots, x_r, \dots, \varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}, \dots$  betrachtet, nicht identisch verschwindet — was nur für specielle Werthsysteme der  $c, c_1, \dots, c_r$  eintreten kann — so wird derselbe auch nicht identisch gleich Null, wenn man in ihm an Stelle der Veränderlichen  $x, x_1, \dots, x_r$  die  $y, y_1, \dots, y_r$  einführt und die Ableitungen  $\varphi_{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$  in Ableitungen von  $\varphi$  nach  $y, y_1, \dots, y_r$  verwandelt; und es kommt also die Ableitung  $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$  wirklich vor. Es ist aber

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c \frac{\partial G}{\partial y} + c_1 \frac{\partial G}{\partial y_1} + \dots + c_r \frac{\partial G}{\partial y_r},$$

und es kann daher  $\frac{\partial G}{\partial x}$ , auf die angegebene Weise transformirt, die Ableitung  $\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial y^{n+1}}$  nur dann enthalten, wenn in  $G$  die Ableitung  $\frac{\partial^n \varphi}{\partial y^n}$  vorkommt.

Nimmt man insbesondere

$$y = x - a - c_1(x_1 - a_1) - \dots - c_r(x_r - a_r)$$

$$y_1 = x_1 - a_1$$

$$\dots$$

$$y_r = x_r - a_r,$$

so sieht man, dass bei gehöriger Wahl von  $c_1, \dots, c_r$  sich  $\varphi$  stets nach

Potenzen von

$$x - a - c_1(x_1 - a_1) - \dots - c_r(x_r - a_r), \quad x_1 - a_1, \quad \dots \quad x_r - a_r$$

entwickeln lässt, und dass man diejenigen Functionen, in welche

$$\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \dots \quad \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}}$$

für

$$x = a + c_1(x_1 - a_1) + \dots + c_r(x_r - a_r)$$

übergehen, als Potenzreihen von  $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$  im Allgemeinen willkürlich nehmen kann.

Die im Vorstehenden beschriebene Umformung der vorgelegten Differentialgleichung könnte in dem Falle unnöthig erscheinen, wenn in dieser Gleichung zwar nicht die  $n^{\text{te}}$  Ableitung von  $\varphi$  nach  $x$ , aber doch eine andere  $\frac{\partial^m \varphi}{\partial x^m}$  (wo  $m < n$ , aber  $> 0$ ) vorkommt, und überdies in den übrigen Ableitungen

$$\frac{\partial^{\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

$\alpha < m$  ist.

Denn nimmt man wie oben

$$\varphi = \sum^{(\nu)} \varphi(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r) \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

an, und entwickelt den Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung nach Potenzen von  $x - a$ , so erhält man zunächst eine Gleichung zwischen

$$\varphi^{(0)}, \quad \varphi^{(1)}, \quad \dots \quad \varphi^{(m)}$$

und einer gewissen Anzahl der Ableitungen der  $m$  ersten dieser Functionen nach  $x_1, \dots, x_r$ . Nimmt man dann die Reihen  $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(m-1)}$  willkürlich an, doch so, dass die Gleichung, in welche die ebengenannte übergeht, wenn man  $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$  setzt, nach  $\varphi^{(m)}$  aufgelöst, eine endliche, einfache Wurzel hat, so kann man  $\varphi^{(m)}$  als Potenzreihe von  $x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$  so bestimmen, dass sie die erstere Gleichung befriedigt und für  $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$  in jene Wurzel übergeht.

Die übrigen Coefficienten der genannten Entwicklung liefern sodann zur Berechnung der übrigen Functionen

$$\varphi^{(m+\nu)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$$

die erforderlichen Gleichungen, durch welche sie sämmtlich, und zwar eindeutig, bestimmt werden.

Man erhält so, ganz in der oben auseinandergesetzten Weise, eine Potenzreihe

$$\varphi(x, x_1, \dots x_r | a, a_1, \dots a_r),$$

welche für  $\varphi$  gesetzt die gegebene Differentialgleichung formell befriedigt.

Aber ich habe bemerkt, dass wenn diese Reihe convergent sein soll, die Functionen  $\varphi, \dots \varphi$  nicht willkürlich angenommen werden können, sondern solchen Beschränkungen unterworfen sind, dass man im Allgemeinen sagen kann, die Reihe

$$\varphi(x, x_1, \dots x_r | a, a_1, \dots a_r)$$

convergiere an *keiner* Stelle  $(x, x_1, \dots x_r)$ , wie nahe man dieselbe auch der Stelle  $(a, a_1, \dots a_r)$  annehmen kann.

Ich begnüge mich aber hier dies an einem Beispiel nachzuweisen.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

gegeben. Wenn  $\varphi_0(y|b)$  irgend eine Potenzreihe von  $y-b$  ist, so genügt die Reihe

$$\sum_0^{\infty} \nu \frac{d^{2\nu} \varphi_0(y|b)}{dy^{2\nu}} \cdot \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

dieser Differentialgleichung formell, und geht für  $x=a$  in  $\varphi_0(y|b)$  über, sie besitzt aber nur bei einer ganz besonderen Wahl von  $\varphi_0(y|b)$  einen Convergencebezirk, während im Allgemeinen sie für kein Werthsystem  $(x, y)$  eine bestimmte, endliche Summe hat.

Es sei z. B.  $a=0, b=0,$

$$\varphi_0(y|b) = \frac{1}{1-y}.$$

Dann ist

$$\frac{d^n \varphi}{dy^n} = \frac{n!}{(1-y)^{n+1}},$$

und die obige Reihe geht in

$$\sum_0^{\infty} \nu \frac{2\nu!}{\nu!} \frac{x^\nu}{(1-y)^{2\nu+1}}$$

über, von der es leicht zu sehen ist, dass sie divergent ist, wie klein auch  $x, y$  angenommen werden.

Um allgemein zu zeigen, welche Bedingung die Function  $\varphi_0(y|b)$  erfüllen muss, damit ein die gegebene Differentialgleichung befriedigendes Element  $\varphi(x, y|a, b)$ , das für  $x = a$  in  $\varphi_0(y|b)$  übergeht, existire, bemerke ich, dass die Differentialgleichung in Beziehung auf die Veränderliche  $y$  die normale Form hat; wenn man daher zwei Functionen

$$\varphi^{(0)}(x|a), \quad \varphi^{(1)}(x|a)$$

willkürlich annimmt, so kann man  $\varphi(x, y|a, b)$  nach dem Vorhergehenden so bestimmen, dass diese Function der gegebenen Differentialgleichung genügt und für  $y = b$

$$\varphi(x, y|a, b) \quad \text{in} \quad \varphi^{(0)}(x|a)$$

und

$$\frac{\partial \varphi(x, y|a, b)}{\partial y} \quad \text{in} \quad \varphi^{(1)}(x|a)$$

übergeht. Und zwar erhält man, da in diesem Falle

$$\varphi^{(2)}(x|a) \quad \text{nur den einen Werth} \quad \frac{\partial \varphi^{(0)}(x|a)}{\partial x}$$

hat,

$$\sum_0^\infty \nu \frac{\partial^\nu \varphi^{(0)}(x|a)}{\partial x^\nu} \frac{(y-b)^{2\nu}}{(2\nu)!} + \sum_0^\infty \nu \frac{\partial^\nu \varphi^{(1)}(x|a)}{\partial x^\nu} \frac{(y-b)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$$

als den *allgemeinsten* Ausdruck von  $\varphi(x, y|a, b)$ .

Ist nun

$$\varphi^{(0)}(x|a) = \sum_0^\infty c_\nu (x-a)^\nu$$

und

$$\varphi^{(1)}(x|a) = \sum_0^\infty c'_\nu (x-a)^\nu,$$

so ergibt sich

$$\varphi_0(y|b) = \varphi(a, y|a, b) = \sum_0^\infty \frac{\nu!}{(2\nu)!} c_\nu (y-b)^{2\nu} + \sum_0^\infty \frac{\nu!}{(2\nu+1)!} c'_\nu (y-b)^{2\nu+1}.$$

Bezeichnet man nun mit  $\rho$  eine positive Grösse, die kleiner ist als der Radius des gemeinschaftlichen Convergencebezirks der Reihen  $\varphi^{(0)}$ ,  $\varphi^{(1)}$ , und die absoluten Beträge von  $c_\nu$ ,  $c'_\nu$  mit  $|c_\nu|$ ,  $|c'_\nu|$ , so lässt sich eine positive Grösse  $g$  so angeben, dass für jeden Werth von  $\nu$

$$|c_\nu| < g\rho^{-\nu}, \quad |c'_\nu| < g\rho^{-\nu}.$$

Es muss also  $\varphi_0(y|b)$  so gewählt werden, dass für zwei bestimmte Grössen  $g, \rho$  dem absoluten Betrage nach

der Coefficient von  $(y-b)^{2\nu}$  kleiner ist als  $\frac{\nu!}{(2\nu)!} g \rho^{-\nu}$ ,

- - -  $(y-b)^{2\nu+1}$  - - -  $\frac{\nu!}{(2\nu)!} g \rho^{-\nu}$ .

Daraus folgt, dass die Reihe

$$\sum \frac{d^{2\nu} \varphi_0(y|b)}{dy^{2\nu}} \frac{(x-a)^\nu}{\nu!}$$

niemals convergent ist, wie klein man auch  $x-a, y-b$  annehmen möge, wenn die Reihe  $\varphi_0(y|b)$  nur einen beschränkten Convergenzbezirk besitzt. Aber auch wenn  $\varphi_0(y|b)$  eine beständig convergirende Reihe ist, kann die vorstehende Reihe beständig divergent sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn man

$$\varphi_0(y|b) = \sum_0^\infty \frac{(y-b)^\nu}{(\nu!)^{\frac{1}{2}}}$$

annimmt, weil dann die eben angegebenen Bedingungen für die Coefficienten der Reihe  $\varphi_0(y|b)$  nicht erfüllt sind.

§. IV.

Ich gehe jetzt zu dem Fall über, wo zur Bestimmung von  $m$  Functionen  $\varphi_1, \dots \varphi_m$  von  $r+1$  Veränderlichen  $(x, x_1, \dots x_r)$  ein System von  $m$  algebraischen partiellen Differentialgleichungen gegeben ist, welches in Beziehung auf  $\varphi_\lambda$  von der  $n_\lambda$ ten Ordnung sein möge. Ich setze dabei voraus, dass dasselbe die *normale* Form habe, d. h. dass in demselben die Ableitungen

$$\frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \dots \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

wirklich vorkommen, und dass es, wenn man diese Grössen als die Unbekannten, die übrigen in ihm vorkommenden aber als willkürlich gegebene betrachtet, auflösbar sei, und nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen der genannten Grössen liefere.

Der ersten Bedingung ist, wenn sie nicht von selbst erfüllt sein sollte, stets durch eine lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen in der im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Weise zu genügen.

Was dagegen die zweite Bedingung angeht, so bleibt allerdings noch

zu untersuchen, ob ein Gleichungssystem von nicht normaler Form stets durch ein ähnliches Verfahren, wie es *Jacobi* bei einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt hat, auf ein normales zurückgeführt werden könne, worauf ich aber hier nicht eingehen kann.

Dieses vorausgeschickt, bringe ich das vorgelegte Gleichungssystem folgendermassen auf eine „canonische“ Gestalt:

Man kann, um die Grössen

$$\frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}}, \dots, \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}}$$

durch  $x, x_1, \dots, x_r, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  und die in den gegebenen Gleichungen enthaltenen Ableitungen von  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  auszudrücken, eine lineare Function der ersteren

$$\varphi_0 = c_1 \frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} + \dots + c_m \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}},$$

wo  $c_1, \dots, c_m$  willkürlich anzunehmende Constanten bezeichnen, als unbekannte Grösse einführen. Man erhält dann für  $\varphi_0$  eine algebraische Gleichung

$$\mathfrak{G} = 0,$$

wo  $\mathfrak{G}$  eine ganze Function von  $\varphi_0$ , deren Coefficienten ganze und rationale Functionen der als bekannt angenommenen Grössen sind, bezeichnet.

Es sei  $G$  ein unzerlegbarer Theiler von  $\mathfrak{G}$ , so entspricht jedem Werthe von  $\varphi_0$ , welcher der Gleichung

$$G = 0$$

genügt, ein Werthsystem der unbekanntenen Ableitungen:

$$\frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} = \frac{G_1}{G'}, \dots, \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}} = \frac{G_m}{G'},$$

wo

$$G' = \frac{\partial G}{\partial \varphi_0}, \quad G_\lambda = -\frac{\partial G}{\partial c_\lambda}$$

ist.

Es werden daher die gegebenen Gleichungen ersetzt durch eine gewisse Anzahl von Gleichungssystemen der Form

$$(1.) \quad \left\{ \begin{array}{l} G(\varphi_0) = 0, \\ G' \frac{\partial^{n_1} \varphi_1}{\partial x^{n_1}} = G_1, \\ \dots \\ G' \frac{\partial^{n_m} \varphi_m}{\partial x^{n_m}} = G_m, \end{array} \right.$$

wo die sämtlichen  $G$ , wenn man

$$\frac{\partial^{a+a_1+\dots+a_r} \varphi_\lambda}{\partial x^\alpha \partial x_1^{a_1} \dots \partial x_r^{a_r}}$$

mit  $\varphi_{\lambda; a, a_1, \dots, a_r}$  bezeichnet, ganze rationale Functionen von  $x, x_1, \dots, x_r$  und denjenigen Grössen

$$\varphi_{\lambda; a, a_1, \dots, a_r}$$

sind, in denen — für den jedesmal betrachteten Werth von  $\lambda$  —

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n_\lambda, \quad \alpha < n_\lambda$$

ist.

Es handelt sich nun darum,  $m+1$  Functionen-Elemente

$$\varphi_0(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r), \varphi_1(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r), \dots, \varphi_m(x, x_1, \dots, x_r | a, a_1, \dots, a_r)$$

auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, dass dieselben für  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$  gesetzt, die Gleichungen (1.) befriedigen.

Man setze, unter  $\lambda$  eine der Zahlen  $0, 1, \dots, m$  verstehend,

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_\lambda &= \sum \left( b_{a, a_1, \dots, a_r}^{(\lambda)} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} \frac{(x_1-a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{(x_r-a_r)^{\alpha_r}}{\alpha_r!} \right) \\ &\quad (\alpha = 0 \dots \infty, \alpha_1 = 0 \dots \infty, \dots, \alpha_r = 0 \dots \infty) \\ &= \sum_0^\infty \sum_{a_1}^{(a)} \varphi_{\lambda; a, a_1, \dots, a_r} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!}, \end{aligned} \right.$$

die Constanten  $a, a_1, \dots, a_r$  und sämtliche Coefficienten  $b_{a, a_1, \dots, a_r}^{(\lambda)}$  vorläufig ganz unbestimmt lassend, und entwickle den Ausdruck  $G$  nach Potenzen von  $x-a, x_1-a_1, \dots, x_r-a_r$ ; so erhält man das constante Glied dieser Entwicklung, das mit  $\bar{G}$  bezeichnet werden möge, wenn man in  $G$

$$\begin{aligned} a, a_1, \dots, a_r &\text{ für } x, x_1, \dots, x_r, \\ b_{a, a_1, \dots, a_r}^{(\lambda)} &\text{ für } \varphi_{\lambda; a, a_1, \dots, a_r} \end{aligned}$$

und

$$b_{0,0,\dots,0}^{(0)} \text{ für } \varphi_0$$

setzt. Dann muss, wenn die Gleichungen (1.) befriedigt werden sollen, zunächst

$$\bar{G} = 0$$

sein. Diese Gleichung dient dazu, um  $b_{0,0,\dots,0}^{(0)}$  durch die eben genannten Grössen auszudrücken. Die letzteren müssen also so gewählt werden, dass in dem Ausdrücke  $\bar{G}$  die zu bestimmende Grösse  $b_{0,0,\dots,0}^{(0)}$  wirklich vorkommt.

Entwickelt man ferner  $G$  nach Potenzen von  $x-a$ , so wird der

Coefficient von  $(x-a)^0$ , der mit  $\dot{G}^{(0)}(\varphi_0)$  bezeichnet werden möge, dadurch erhalten, dass man in  $G$

$$a \quad \text{für} \quad x,$$

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_r} \varphi(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}} \quad \text{für} \quad \varphi_{\lambda; \alpha_1, \dots, \alpha_r}$$

und

$$\varphi_0^{(0)} \quad \text{für} \quad \varphi_0$$

setzt. Es ist also

$$\dot{G}^{(0)}(\varphi_0)$$

eine ganze Function von  $\varphi_0^{(0)}$  mit Coefficienten, welche ganze Functionen von

$$x_1, \dots, x_r,$$

ferner von

$$\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_1^{(n_1-1)}, \dots, \varphi_m^{(0)}, \dots, \varphi_m^{(n_m-1)}$$

und einer gewissen Anzahl der Ableitungen dieser Functionen sind. Dieselbe geht in  $\bar{G}$  über, wenn man  $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$  nimmt. Unterwirft man also die in  $\bar{G}$  vorkommenden Grössen  $a, a_1, \dots, a_r, b_{a, a_1, \dots, a_r}^{(\lambda)}$  der Bedingung, dass die Gleichung

$$\bar{G} = 0$$

nach  $b_{0, \dots, 0}^{(0)}$  aufgelöst, mindestens *eine* endliche, einfache Wurzel besitze, und versteht jetzt unter  $b_{0, \dots, 0}^{(0)}$  eine solche, so giebt es eine völlig bestimmte Function  $\varphi_0^{(0)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$ , welche, für  $\varphi_0^{(0)}$  gesetzt, der Gleichung

$$(3.) \quad \dot{G}^{(0)}(\varphi_0) = 0$$

genügt, und in  $b_{0, \dots, 0}^{(0)}$  übergeht, wenn man  $x_1 = a_1, \dots, x_r = a_r$  setzt. Dabei können die Coefficienten der eben genannten  $n_1 + n_2 + \dots + n_m$  Functionen

$$\varphi_\lambda^{(\mu)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r),$$

abgesehen von der angegebenen Beschränkung, ganz willkürlich angenommen werden, selbstverständlich jedoch so, dass jede von ihnen einen Convergenzbezirk besitze. Dann hat die in der angegebenen Weise bestimmte Function  $\varphi_0^{(0)}(x_1, \dots, x_r | a_1, \dots, a_r)$  ebenfalls immer einen gewissen Convergenzbezirk.

Differentiirt man ferner den Ausdruck

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda}} - G_\lambda$$

als Function von  $x$  betrachtet, so hat die  $\nu^{\text{te}}$  Ableitung derselben die Form

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda + \nu} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda + \nu}} + H_\nu^{(\lambda)},$$

wo  $H_\nu^{(\lambda)}$  eine ganze Function von  $x, x_1, \dots, x_r$  und denjenigen Grössen

$$\varphi_{\mu; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r},$$

in denen — bei dem jedesmal betrachteten Werth von  $\lambda$  —

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r \leq n_\mu + \nu, \quad \alpha < n_\mu + \nu$$

ist, bezeichnet.

Die Entwicklung von

$$G' \frac{\partial^{n_\lambda} \varphi_\lambda}{\partial x^{n_\lambda}} - G_\lambda$$

nach Potenzen von  $x - a$  hat also die Form

$$\dot{G}'^{(n_\lambda + \nu)} \varphi_\lambda + \dot{H}_\nu^{(\lambda)},$$

wo  $\dot{G}', \dot{H}_\nu^{(\lambda)}$  aus  $G', H_\nu^{(\lambda)}$  dadurch entstehen, dass man setzt

$$x = a$$

und

$$\varphi_{\mu; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi_\mu^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}.$$

Es hat ferner die  $\nu^{\text{te}}$  Ableitung des Ausdruckes  $G$  nach  $x$  die Gestalt:

$$G' \frac{\partial^\nu \varphi_0}{\partial x^\nu} + H_\nu^{(0)},$$

wo  $H_\nu^{(0)}$  dieselbe Gestalt wie die vorstehenden Functionen  $H_\nu^{(\lambda)}$  hat.

Bezeichnet man also mit

$$\dot{G}^{(\lambda)}, \quad \dot{H}_\nu^{(0)}$$

die Ausdrücke, in welche  $G^{(\lambda)}, H_\nu^{(0)}$  dadurch übergehen, dass man  $x = a$  und

$$\varphi_{\mu; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_r} \varphi_\mu^{(\alpha)}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_r^{\alpha_r}}$$

setzt, so ist der Coefficient von  $\frac{(x - a)^\nu}{\nu!}$  in der Entwicklung von  $G$  nach

Potenzen von  $x - a$

$$\dot{G}' \varphi_0 + \dot{H}_\nu^{(\nu)}.$$

Damit also die Gleichungen (1.) befriedigt werden, muss man haben

$$(4.) \quad \dot{G}' \varphi_\lambda^{(n_\lambda + \nu)} + \dot{H}_\nu^{(\lambda)} = 0, \quad (\lambda = 0, 1, \dots m).$$

Da sich, weil  $\dot{G}'$  an der Stelle  $(x_1 = a_1, \dots x_r = a_r)$  nicht verschwindet,

$$\frac{1}{\dot{G}'}$$

in eine Potenzreihe von  $x_1 - a_1, \dots x_r - a_r$  entwickeln lässt, so ergeben sich aus den Gleichungen (4.)

$$\varphi_0^{(\nu+1)}, \varphi_1^{(n_1 + \nu)}, \dots \varphi_m^{(n_m + \nu)}$$

als Potenzreihen von  $x_1 - a_1, \dots x_r - a_r$ , welche vollständig bestimmt sind, sobald

$$\begin{array}{cccc} \textcircled{0} & & & \\ \varphi_0 & & & \\ \textcircled{0} & & \textcircled{n_1 - 1} & \\ \varphi_1, & \dots & \varphi_1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \textcircled{0} & & \textcircled{n_m - 1} & \\ \varphi_m, & \dots & \varphi_m & \end{array}$$

es sind.

Daraus folgt, dass wenn man  $a, a_1, \dots a_r$  und die vorstehenden Functionen

$$\varphi_\lambda^{(\mu)}(x_1, \dots x_r | a_1, \dots a_r) \quad (\text{für } \lambda = 1 \dots m)$$

den angegebenen Bedingungen gemäss, im Uebrigen aber willkürlich annimmt, darauf, nach Fixirung der aus der Gleichung

$$\bar{G} = 0$$

sich ergebenden Coefficienten  $b_{0,0,\dots,0}^{(0)}$ , zunächst  $\varphi_0^{(0)}$  und dann die sämtlichen Functionen  $\varphi_\lambda^{(n_\lambda + \nu)}(x_1, \dots x_r | a_1, \dots a_r)$  sich so bestimmen lassen, und zwar nur auf eine einzige Weise, wie es erforderlich ist, wenn



und deren ersten Ableitungen nach den Veränderlichen  $x_1, \dots, x_r$  mittelst der Gleichungen (4.) eliminiren, und erhält so eine Gleichung

$$(7.) \quad (G')^k \frac{\partial \varphi_0}{\partial u} - G_0 = 0,$$

wo  $k$  eine der Zahlen 0, 1, 2, 3 und  $G_0$  ein Ausdruck von derselben Gestalt wie die  $G_\lambda$  in den Gleichungen (6.) ist.

Sodann hat man für jede Function  $\varphi_{\lambda; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$ , in welcher

$$\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r < n_\lambda$$

und mindestens eine der Grössen  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , z. B.  $\alpha_\mu > 0$  ist,

$$(8.) \quad \frac{\partial \varphi_{\lambda; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \dots, \alpha_r}}{\partial u} = \frac{\partial \varphi_{\lambda; \alpha+1, \dots, \alpha_\mu, \dots, \alpha_r}}{\partial u_\mu}.$$

Endlich ist

$$(9.) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial x_r}{\partial u} = 0.$$

So ergibt sich für  $x, x_1, \dots, x_r$  und diejenigen Functionen

$$\varphi_{\lambda; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r},$$

in welchen  $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_r < n_\lambda$  ist (wobei jedoch jetzt *jede* solche Function, auch wenn sie in den Gleichungen (1.) nicht vorkommen sollte, in Betracht zu ziehen ist), ein System partieller Differentialgleichungen von der in §. I, Zusatz D) betrachteten Form.

Damit ist festgestellt, dass sie Potenzreihen von  $u, u_1, \dots, u_r$  oder  $x - a, x_1 - a_1, \dots, x_r - a_r$  sind, welche sämmtlich innerhalb eines bestimmten Bezirks convergiren, indem die am angeführten Orte unter  $a, b$ ) angegebenen Bedingungen in diesem Falle erfüllt sind.

Der Beweis ferner, dass man für jedes die Gleichungen (1.) befriedigende System analytischer Functionen ein dasselbe definirendes System von Functionen-Elementen durch das beschriebene Verfahren erhalten kann, wird ganz so geführt, wie es am Schlusse des §. II. für den Fall, dass nur eine Differentialgleichung vorliegt, geschehen ist. Die singulären Lösungen der Gleichungen (1.) bilden diejenigen Functionensysteme  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ , welche ausser den genannten Gleichungen auch noch die Gleichung  $G' = 0$  befriedigen. Die Bestimmung dieser singulären Functionen-Systeme lässt sich aber immer durch algebraische Gleichungen oder mittelst eines Systems anderer Differentialgleichungen, von dem sie keine singulären Lösungen sind, bewerkstelligen.

Hiermit ist die Aufgabe, die ich mir gestellt habe, vollständig gelöst. Ich bemerke aber noch Folgendes. Auch transcendente partielle Differentialgleichungen lassen sich in vielen Fällen auf das Gleichungssystem (1.) in der Art zurückführen, dass

$$G, G_1, \dots, G_m$$

nicht rationale, aber in der Form beständig convergirender Potenzreihen darstellbare ganze Functionen von

$$x, x_1, \dots, x_r \text{ und den Grössen } \varphi_{\lambda; \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_r}$$

sind. In diesem Falle behalten die im Vorstehenden gefundenen Resultate ihre volle Gültigkeit, wie aus der Herleitung derselben ohne Weiteres ersichtlich ist.

Berlin, im Juli 1874.

---