Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1882
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0092
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0092

LOG Id: LOG_0005
LOG Titel: Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen.

(Von Herrn *F. Caspary.*)

Der nachfolgende Aufsatz beschäftigt sich mit der Umformung gewisser Determinanten, welche der algebraische Ausdruck bekannter, auf Kegelschnitte bezüglicher Sätze sind. Wenn ich mir damit erlaube von neuem auf ein Thema zurückzukommen, welches die Herren ***Hunyady****), ***Mertens*****) und ***Pasch******) eingehend behandelt haben, so geschieht es, weil die veränderte Auffassung der Determinanten, von der ich hier Gebrauch mache, jene Umformungen ganz ausserordentlich vereinfacht und die directe Ueberführung der einen Determinante in alle übrigen sehr erleichtert. Ausserdem scheint mir diese Auffassung der Determinanten, die im wesentlichen von *Grassmann* (vergl. *Ausdehnungslehre.* Berlin 1862. S. 37 flgd.) herrührt, an sich nicht ohne Interesse und insbesondere verwendbar, um bekannte Sätze von Kegelschnitten auf Curven höherer Ordnung und selbst auf Oberflächen auszudehnen.

§ 1.

Erklärungen und vorbereitende Sätze.

Bezeichnet man mit $[pq]$ denjenigen Ausdruck, welcher aus dem algebraischen Product zweier Grössen:

$$(1.) \quad \begin{cases} p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3, \\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \end{cases}$$

*) Dieses Journal Bd. 83 S. 76 flgd.

**) Dieses Journal Bd. 84 S. 355 flgd.

***) Dieses Journal Bd. 89 S. 247 flgd.

hervorgeht, wenn für die Producte der e die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\text{(I.)}\quad \begin{cases} e_1 e_1 = e_2 e_2 = e_3 e_3 = 0; \\ e_2 e_3 = -e_3 e_2;\quad e_3 e_1 = -e_1 e_3;\quad e_1 e_2 = -e_2 e_1 \end{cases}$$

festgesetzt werden, so erhält man:

$$\text{(2.)}\quad [pq] = (p_2 q_3 - p_3 q_2) e_2 e_3 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) e_3 e_1 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) e_1 e_2,$$

woraus sofort:

$$\text{(3.)}\quad [pp] = 0$$

und

$$\text{(4.)}\quad [pq] = -[qp]$$

sich ergiebt.

Im Folgenden mögen mit *Grassmann* die Grössen e_1, e_2, e_3 als ***Einheiten*** und die Grössen der Form (1.) als ***extensive Grössen*** bezeichnet werden. Von ihnen werde gesagt, sie seien aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 durch die ***Ableitungszahlen*** p_1, p_2, p_3; q_1 u. s. w. ***abgeleitet.*** Grössen wie die Ableitungszahlen mögen zur Unterscheidung von den extensiven Grössen ***Zahlgrössen*** heissen. Das unter den Bedingungen (I.) gebildete Product $[pq]$ werde das ***äussere Product*** der beiden ***Factoren*** p und q genannt; die Rechnung selbst heisse ***äussere Multiplication.***

Bedeuten $\varkappa$ und λ zwei Zahlgrössen, so folgt aus (2.) sofort:

$$\text{(5.)}\quad [\varkappa p\; \lambda q] = \varkappa\lambda [pq],$$

wobei natürlich $\varkappa$ und λ, wie Zahlgrössen stets, algebraisch mit einander multiplicirt sind.

Wegen (3.), (4.) und (5.) ergiebt sich aus (2.) sehr leicht:

Setzt man:

$$\text{(6.)}\quad \begin{cases} a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \\ b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3, \\ c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3, \\ d = d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3, \end{cases}$$

und

$$\text{(7.)}\quad \begin{cases} k = \varkappa a + \varkappa' b + \varkappa'' c, \\ l = \lambda a + \lambda' b + \lambda'' c, \end{cases}$$

so ist

$$\text{(8.)}\quad [kd] = \varkappa [ad] + \varkappa' [bd] + \varkappa'' [cd],$$

und

$$\text{(9.)}\quad [kl] = (\varkappa' \lambda'' - \lambda' \varkappa'')[bc] + (\varkappa'' \lambda - \lambda'' \varkappa)[ca] + (\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa')[ab].$$

Führt man zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} e_2 e_3 = E_1, \\ e_3 e_1 = E_2, \\ e_1 e_2 = E_3, \end{cases}$$

und:

$$\text{(10.)}\quad \begin{cases} [pq] = L, \\ p_2 q_3 - p_3 q_2 = L_1, \\ p_3 q_1 - p_1 q_3 = L_2, \\ p_1 q_2 - p_2 q_1 = L_3, \end{cases}$$

so geht (2.) in

$$\text{(11.)}\quad L = L_1 E_1 + L_2 E_2 + L_3 E_3$$

über. Die Grössen E_1, E_2, E_3 mögen wie die e_1, e_2, e_3 ***Einheiten*** heissen; sollen sie von diesen unterschieden werden, so seien sie als ***Einheiten zweiter Stufe,*** jene als ***Einheiten erster Stufe*** bezeichnet. Ebenso mögen Grössen der Form (11.) ***extensive Grössen*** heissen und zwar ***zweiter Stufe*** im Gegensatz zu den extensiven Grössen ***erster Stufe,*** welche aus den Einheiten e_1, e_2, e_3 abgeleitet sind. Endlich heisse auch L aus den Einheiten E_1, E_2, E_3 durch die ***Ableitungszahlen*** L_1, L_2, L_3 ***abgeleitet.***

Unterwirft man die Einheiten E_1, E_2, E_3 den analogen Bedingungen, wie sie für die Einheiten e_1, e_2, e_3 bestehen, setzt also fest, dass:

$$\text{(III.)}\quad \begin{cases} E_1 E_1 = E_2 E_2 = E_3 E_3 = 0; \\ E_2 E_3 = -E_3 E_2; \quad E_3 E_1 = -E_1 E_3; \quad E_1 E_2 = -E_2 E_1 \end{cases}$$

sei, so erkennt man, dass sich den Formeln (2.) bis (9.) entsprechende an die Seite stellen lassen, welche aus ihnen hervorgehen, wenn man die kleinen Buchstaben durch grosse ersetzt. Um in allen Fällen Formeln, welche sich auf extensive Grössen erster Stufe beziehen, auf solche zweiter Stufe übertragen zu dürfen, müssen die Einheiten E_1, E_2, E_3 in der nämlichen Weise die Einheiten e_1, e_2, e_3 erzeugen, wie sie selbst aus diesen hervorgehen. Daraus ergiebt sich, dass analog (II.)

$$\text{(IV.)}\quad \begin{cases} E_2 E_3 = e_1, \\ E_3 E_1 = e_2, \\ E_1 E_2 = e_3 \end{cases}$$

sein muss.

Setzt man ferner:

$$\text{(V.)}\quad e_1 e_2 e_3 = e_2 e_3 e_1 = e_3 e_1 e_2 = 1,$$

so ergiebt sich aus (I.) und (II.) das folgende System von Bedingungsgleichungen:

$$\text{(VI.)}\quad \begin{cases} E_1 e_1 = e_1 E_1 = 1, & E_2 e_1 = e_1 E_2 = 0, \quad E_3 e_1 = e_1 E_3 = 0, \\ E_1 e_2 = e_2 E_1 = 0, & E_2 e_2 = e_2 E_2 = 1, \quad E_3 e_2 = e_2 E_3 = 0, \\ E_1 e_3 = e_3 E_1 = 0, & E_2 e_3 = e_3 E_2 = 0, \quad E_3 e_3 = e_3 E_3 = 1, \end{cases}$$

welches bei der jetzt zu behandelnden Multiplication zweier extensiven Grössen erster und zweiter Stufe seine Verwendung findet.

Ehe ich zu dieser Multiplication übergehe, seien noch zwei einfache Relationen hervorgehoben. Erstens folgt aus (II.), (IV.) und (V.), dass auch

$$\text{(VII.)}\qquad E_1 E_2 E_3 = E_2 E_3 E_1 = E_3 E_1 E_2 = 1$$

ist, und zweitens ergiebt sich, *dass wenn*

$$\begin{cases} l = l_1 e_1 + l_2 e_2 + l_3 e_3, \\ m = m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} L = L_1 E_1 + L_2 E_2 + L_3 E_3, \\ M = M_1 E_1 + M_2 E_2 + M_3 E_3 \end{cases}$$

gesetzt wird, aus

$$l = m,$$
$$L = M$$

die drei Gleichungen $l_\alpha = m_\alpha$ *bez.* $L_\alpha = M_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ *hervorgehen; und umgekehrt, dass diese Gleichungen* $l = m$ *bez.* $L = M$ *zur Folge haben.* Diese letztere Behauptung ist an sich einleuchtend, und die erstere ergiebt sich, wenn man $l = m$ bez. $L = M$ der Reihe nach mit E_1, E_2, E_3 bez. e_1, e_2, e_3 multiplicirt und (VI.) beachtet.

Um nun das Product zweier extensiven Grössen, von denen die eine erster, die andere zweiter Stufe ist, zu behandeln, werde wie in (1.):

$$\text{(12.)}\quad \begin{cases} p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3, \\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \\ \text{und ausserdem:} \\ r = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 \end{cases}$$

gesetzt. Dann war nach (2.) und (II.):

$$\text{(13.)}\qquad [pq] = (p_2 q_3 - p_3 q_2) E_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) E_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) E_3.$$

Multiplicirt man dieses äussere Product mit r, während die Bedingungen

(VI.) gelten, und bezeichnet das Resultat mit $[pqr]$, so ist:

$$(14.)\qquad [pqr] = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Nennt man $[pqr]$ das ***äussere Product*** der drei extensiven Grössen p, q, r, so erkennt man, ***dass das äussere Product dreier extensiven Grössen erster Stufe die Determinante ihrer neun Ableitungszahlen ist.*** Der nämliche Satz gilt, wie sofort ersichtlich, auch für extensive Grössen zweiter Stufe, so dass wenn:

$$(15.)\qquad \begin{cases} P = P_1E_1+P_2E_2+P_3E_3, \\ Q = Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3, \\ R = R_1E_1+R_2E_2+R_3E_3 \end{cases}$$

ist und die Bedingungsgleichungen (III.) und (VII.) bestehen, auch:

$$(16.)\qquad [PQR] = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}$$

ist. Aus (14.) und (16.) ergiebt sich sofort:

$$(17.)\qquad \begin{cases} [ppr] = 0, \\ [pqr] = -[qpr] = [rpq] \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und ebenso:

$$(18.)\qquad \begin{cases} [PPR] = 0, \\ [PQR] = -[QPR] = [RPQ] \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das äussere Product der Grössen $[pq]$ und r war vorhin mit $[pqr]$ bezeichnet worden, statt mit $[[pq]r]$. Von dieser vereinfachten Bezeichnungsweise, nach welcher nur das Product in eckige Klammern gesetzt wird, nicht aber auch die Factoren, werde ich durchgehends bei allen denjenigen äusseren Producten Gebrauch machen, bei denen einzelne Factoren selber äussere Producte sind. Insbesondere werde ich das äussere Product $[pqr]$, wenn $p = [PP']$, $q = [QQ']$, $r = [RR']$ ist, einfach $[PP'\,QQ'\,RR']$ schreiben.

§ 2.

Die Identität: $[pqR] = [pR]q - [qR]p$. Folgerungen.

Nach diesen Vorbereitungen gehe ich dazu über, eine ausserordentlich einfache, aber für die ganze folgende Untersuchung fundamentale Hilfsformel herzuleiten.

Es sei, wie in (12.), (13.) und (15.):

$$(19.)\quad \begin{cases} p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3, \\ q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3, \\ [pq] = (p_2 q_3 - p_3 q_2) E_1 + (p_3 q_1 - p_1 q_3) E_2 + (p_1 q_2 - p_2 q_1) E_3, \\ R = R_1 E_1 + R_2 E_2 + R_3 E_3, \end{cases}$$

und es werde das äussere Product aus $[pq]$ und R gebildet, welches nach der am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung mit $[pqR]$ zu bezeichnen ist. Dann ergiebt sich, wegen (III.) und (IV.):

$$(20.)\quad \begin{cases} [pqR] = ((p_3 q_1 - p_1 q_3) R_3 - (p_1 q_2 - p_2 q_1) R_2) e_1 \\ \qquad + ((p_1 q_2 - p_2 q_1) R_1 - (p_2 q_3 - p_3 q_2) R_3) e_2 \\ \qquad + ((p_2 q_3 - p_3 q_2) R_2 - (p_3 q_1 - p_1 q_3) R_1) e_3. \end{cases}$$

Da aber die Factoren der Einheiten e_1, e_2, e_3 der Reihe nach sich in:

$$(p_1 R_1 + p_2 R_2 + p_3 R_3) q_\alpha - (q_1 R_1 + q_2 R_2 + q_3 R_3) p_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

umformen lassen und nach (VI.):

$$(21.)\quad \begin{cases} p_1 R_1 + p_2 R_2 + p_3 R_3 = [pR], \\ q_1 R_1 + q_2 R_2 + q_3 R_3 = [qR] \end{cases}$$

ist, so geht (20.) in:

$$(22.)\quad [pqR] = [pR] q - [qR] p$$

über. Zu dieser Fundamentalformel ist zu bemerken, dass $[pR]$ und $[qR]$, wie aus (21.) ersichtlich, Zahlgrössen sind, also bei weiterer äusserer Multiplication von (22.) mit anderen extensiven Grössen, wie die Zahlgrössen $\varkappa$ und λ in (5.), vor die eckigen Klammern treten.

Von den mannigfachen Folgerungen, welche man aus (22.) ableiten kann, seien hier nur einige erwähnt, welche im Folgenden sehr häufige Verwendung finden.

Setzt man nämlich:

$$p = a, \quad q = b, \quad R = [cd],$$

so folgt aus (22.):

$$[ab\, cd] = [acd] b - [bcd] a.$$

Da aber andererseits:

$$[ab\, cd] = -[cd\, ab] = -[abc] d + [abd] c$$

ist, so ergiebt sich die Identität:

$$[acd]b-[bcd]a = -[abc]d+[abd]c$$

oder

$$(23.)\qquad [bcd]a-[acd]b+[abd]c-[abc]d = 0.$$

Multiplicirt man diese Identität äusserlich mit $[ef]$, so folgt wegen (8.):

$$(24.)\qquad [bcd][aef]-[acd][bef]+[abd][cef]-[abc][def] = 0,$$

wobei nach (14.):

$$[bcd] = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

u. s. w. ist. Ersetzt man in (24.) die Buchstaben a bis f durch die Ziffern von 1 bis 6 in irgend welcher Anordnung, so erhält man dasjenige Formelsystem, welches Herr *Cayley* Quart. Journ. tom. XV p. 55—57 aufgestellt hat. (Vgl. auch dieses Journal Bd. 83, S. 230.)

Drei andere Formeln, welche ebenfalls später oft gebraucht werden, gehen aus (22.) hervor, wenn man für p, q, R der Reihe nach die Werthe a, b, $[ac]$; a, b, $[bc]$; a, c, $[bc]$ setzt. Man erhält dann:

$$(25.)\qquad \begin{cases} [ab\;ac] = [abc]a, \\ [ab\;bc] = [abc]b, \\ [ac\;bc] = [abc]c, \end{cases}$$

weil nach (17.):

$$[aac] = 0, \quad [bac] = -[abc] \quad \text{u. s. w.}$$

ist. Aus (25.) folgt leicht:

$$(26.)\qquad [ab\;ac\;bc] = [abc]^2.$$

Analog (22.) erhält man:

$$(27.)\qquad [PQr) = [Pr]Q-[Qr]P,$$

wenn:

$$\begin{aligned} P &= P_1E_1+P_2E_2+P_3E_3, \\ Q &= Q_1E_1+Q_2E_2+Q_3E_3, \\ R &= R_1E_1+R_2E_2+R_3E_3 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Ausserdem leuchtet ein, dass auch die (25.) und (26.) analogen Formeln für die Grössen A, B, C gelten.

§ 3.

Umformung von $\omega = [ab\,de\;\;bc\,ef\;\;cd\,fa]$.

Stellen die Ableitungszahlen p_1, p_2, p_3; q_1 u. s. w. die homogenen Coordinaten der Punkte p, q, r dar, so zeigt (13.), dass die Ableitungszahlen des äusseren Productes $[pq]$ die Coordinaten der durch die beiden Punkte p und q gelegten Geraden sind. Ferner liefert das äussere Product $[pqr]$ nach (14.) den doppelten Inhalt des Dreiecks, welches die Punkte p, q, r zu Ecken hat; und insbesondere *ist* $[pqr]=0$ *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die drei Punkte* p, q, r *in einer Geraden liegen.* Ganz ebenso sind die Ableitungszahlen von $[PQ]$ die Coordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden P und Q, wenn ihre Coordinaten die Ableitungszahlen P_1, P_2, P_3; Q_1 u. s. w. sind; und ebenso stellt $[PQR]$ den doppelten Inhalt des von den drei Geraden P, Q, R umschlossenen Dreiecks dar, *während* $[PQR]=0$ *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die drei Geraden* P, Q, R *durch einen Punkt gehen.*

Es seien nun a, b, c, d, e, f sechs Punkte, welche das Sechseck $abcdef$ bilden. Seine drei Paar Gegenseiten sind ab, de; bc, ef; cd, fa und deren drei Schnittpunkte $[ab\,de]$, $[bc\,ef]$, $[cd\,fa]$. Liegen diese drei Punkte in einer Geraden, ist also:

$$[ab\,de\;\;bc\,ef\;\;cd\,fa] = 0,$$

so sind nach dem *Pascal*schen Satze a, b, c, d, e, f sechs Punkte eines Kegelschnittes; und umgekehrt liegen jene sechs Punkte auf einem Kegelschnitt, so ist stets die obige Gleichung erfüllt.

Für die folgenden Umformungen werde die linke Seite obiger Gleichung, bezeichnet durch ω, also:

$$(28.)\qquad \omega = [ab\,de\;\;bc\,ef\;\;cd\,fa]$$

als Ausgangspunkt gewählt. Setzt man in ω den dritten Factor an die erste Stelle und vertauscht in $[ab\,de]$ und $[bc\,ef]$ die Reihenfolge der Factoren, so bleibt nach (17.) ω ungeändert. Man erhält also auch:

$$(29.)\qquad \omega = [cd\,fa\;\;de\,ab\;\;ef\,bc].$$

Setzt man hierin für den Augenblick:

$$\begin{aligned}[cd] &= P,\\ [fa] &= Q,\\ [de\,ab] &= r,\end{aligned}$$

so folgt wegen (27.):

$$[cd\,fa\ \ de\,ab] = [abd][cde][fa] + [abf][ade][cd],$$

weil nach (25.):

$$[Pr] = [cd\,de\,ab] = [cde][dab] = [abd][cde]$$

und:

$$[Qr] = [fa\,de\,ab] = -[ab\,af\,de] = -[abf][ade]$$

ist. Multiplicirt man die letzte Gleichung noch äusserlich mit $[ef\,bc]$, so erhält man, weil auch:

$$[fa\,ef\,bc] = -[aef][bcf]$$

und:

$$[cd\,ef\,bc] = [bcd][cef]$$

ist:

$$(30.)\quad \omega = -[abd][aef][bcf][cde] + [abf][ade][bcd][cef]\,^{*}).$$

Erwähnt sei noch, dass sich diese Formel auch ergiebt, wenn man in (28.):

$$[ab\,de] = p,$$
$$[bc\,ef] = q,$$
$$[cd] = R$$

setzt, Formel (22.) anwendet und schliesslich mit $[fa]$ äusserlich multiplicirt. Vertauscht man auf der rechten Seite von (30.) a mit c, so gehen die beiden Producte, deren Differenz gleich ω ist, in einander über, jedoch mit veränderten Vorzeichen. Daher folgt, dass, wenn man in (28.) a mit c vertauscht, der entstehende Ausdruck $= -\omega$ wird. Hieraus ergiebt sich:

$$\omega = [ab\,de\ \ bc\,ef\ \ cd\,fa] = -[cb\,de\ \ ba\,ef\ \ ad\,fc]$$

oder auch:

$$(31.)\quad \omega = [ab\,de\ \ bc\,ef\ \ cd\,fa] = -[ad\,fc\ \ de\,cb\ \ ef\,ba].$$

Es werde nun:

$$(32.)\quad \begin{cases} A = [bc], & D = [ef], \\ B = [ca], & E = [fd], \\ C = [ab], & F = [de] \end{cases}$$

gesetzt, und es sei Ω derjenige Ausdruck, welcher aus ω hervorgeht, wenn man $a, b, \dots f$ mit $A, B, \dots F$ vertauscht. Dann ist wegen (28.):

$$(33.)\quad \Omega = [AB\,DE\ \ BC\,EF\ \ CD\,FA],$$

---

*) Vgl. *Hunyady*, dieses Journal Bd. 83, Seite 83, Formel (27.) und auch *Pasch*, dieses Journal Bd. 89, S. 248, Formel (2.).

woraus sofort:

$$\Omega = [abc]^2[def]^2[cf\,ad \;\; ab\,ef \;\; de\,bc]$$

oder auch:

$$(34.)\quad \Omega = [abc]^2[def]^2[ad\,fc \;\; de\,cb \;\; ef\,ba]$$

hervorgeht, weil wegen (25.) und (32.):

$$[AB] = [abc]c, \quad [DE] = [def]f,$$
$$[BC] = [abc]a, \quad [EF] = [def]d$$

ist. Aus (31.) und (34.) aber folgt:

$$(35.)\quad \begin{cases} [AB\,DE \;\; BC\,EF \;\; CD\,FA] \\ = -[abc]^2[def]^2[ab\,de \;\; bc\,ef \;\; cd\,fa], \end{cases}$$

oder auch:

$$(36.)\quad \Omega = -[abc]^2[def]^2\,\omega\,^{*)},$$

wenn Ω und $A, B \dots F$ durch (33.) und (32.) definirt sind.

Da die rechte Seite von (28.) bei cyklischer Vertauschung der Buchstaben in ihren negativen Werth übergeht, so ergiebt sich aus (30.):

$$(37.)\quad \omega = -[abc][adf][bef][cde]+[abf][acd][bce][def],$$

woraus bei weiterer cyklischer Vertauschung:

$$(38.)\quad \omega = -[abc][aef][bde][cdf]+[abe][acf][bcd][def]$$

hervorgeht.

Der durch (30.) gegebenen Darstellung von ω lässt sich eine andere an die Seite stellen, welche aus jener hervorgeht, wenn man die Identität (23.):

$$[bcd]a-[acd]b+[abd]c-[abc]d = 0$$

benutzt. Multiplicirt man dieselbe nämlich äusserlich mit $[de]$, so folgt, weil $[dde] = 0$ ist:

$$[ade][bcd] = [acd][bde]-[abd][cde],$$

woraus, wenn man d mit f vertauscht:

$$-[aef][bcf] = -[acf][bef]+[abf][cef]$$

hervorgeht. Multiplicirt man die erste dieser Identitäten mit $[abf][cef]$, die zweite mit $[abd][cde]$ und addirt, so folgt aus (30.):

$$(39.)\quad \omega = -[abd][acf][bef][cde]+[abf][acd][bde][cef],$$

---

*) Vgl. *Mertens,* dieses Journal Bd. 84, Seite 358 und *Pasch,* dieses Journal Bd. 89, Seite 248, Formel 3.

woraus durch cyklische Vertauschung die beiden anderen Formen:

$$(40.)\qquad \omega = -[abc][adf][bde][cef]+[abd][acf][bce][def],$$

$$(41.)\qquad \omega = -[abd][aef][bce][cdf]+[abe][adf][bcd][cef]$$

hervorgehen.

Die rechten Seiten der Gleichungen (30.) und (39.) bleiben, abgesehen vom Vorzeichen, beide ungeändert, wenn man d und f vertauscht, während eine Vertauschung von a mit c oder von b mit e die erste derselben, und eine Vertauschung von a mit e oder von b mit c die zweite derselben nicht ändert. Aus diesen fünf Vertauschungen gehen aber bei cyklischer Permutation der Buchstaben $a, b, \dots f$ zehn andere hervor, für welche ω wegen (37.) bis (41.) nicht geändert wird. *Daher bleibt ω, abgesehen vom Vorzeichen, ungeändert für sämmtliche $\frac{6.5}{2} = 15$ Vertauschungen der sechs Buchstaben $a, b, \dots f$.* Auch das Vorzeichen ist aus der Bemerkung leicht zu bestimmen, *dass ω jedes Mal sein Zeichen ändert, wenn man zwei Buchstaben vertauscht.* Hieraus folgt also, dass es für ω 15 verschiedene Darstellungen giebt. Man erhält dieselben aus jedem der drei Gleichungspaare (30.) und (39.), (37.) und (40.), (38.) und (41.), wenn man von den 15 möglichen Vertauschungen der Buchstaben $a, b, \dots f$ zuerst diejenige aussondert, die beide Gleichungen eines Paares ungeändert lässt, dann diejenige, welche die eine Gleichung eines Paares in die andere überführt, und von den 13 bleibenden Vertauschungen in der einen der beiden Gleichungen diejenigen 11 vornimmt, welche ihre rechten Seiten ändern, während man diejenigen beiden Vertauschungen, die dies nicht verursachen, auf die andere Gleichung anwendet.

Der Kürze halber unterlasse ich es, diese 15 Gleichungen herzuschreiben, zumal dieselben von Herrn *Hunyady* Bd. 83 Seite 83 und flgd. zusammengestellt sind.

Ist $\omega = 0$, so liegen, wie bereits bemerkt, die sechs Punkte $a, b, \dots f$ auf einem Kegelschnitte. Alsdann folgt aus (30.):

$$[abd][aef][bcf][cde] = [abf][ade][bcd][cef],$$

und diese Gleichung liefert in verschiedener geometrischer Deutung die vier Theoreme, welche nach ihren Entdeckern *Pappus, Desargues, Newton* und *Chasles* benannt sind*). Ebenso ergiebt (35.) für $\omega = 0$ den bekannten

*) Vgl. *Hunyady* a. a. O. S. 76 flgd.

Satz, dass die Seiten zweier Dreiecke, deren Ecken auf einem Kegelschnitt liegen, einen anderen Kegelschnitt berühren.

Vertauscht man in (32.) und (35.) b mit e und B mit E und setzt:

$$(42.)\quad \begin{cases} A' = [ce], & D' = [fb], \\ B' = [df], & E' = [ac], \\ C' = [ea], & F' = [bd], \end{cases}$$

so folgt aus (35.):

$$(43.)\quad \begin{cases} [A'B'\; D'E'\; B'C'\; E'F'\; C'D'\; F'A'] \\ = -[ace]^2[bdf]^2[ab\; de\; bc\; ef\; cd\; fa] \end{cases}$$

oder, wenn man die linke Seite mit Ω' bezeichnet,

$$(44.)\quad \Omega' = -[ace]^2[bdf]^2\omega.$$

Diese Identität ergiebt für $\omega = 0$ den bekannten Satz: Wenn man in einem *Pascal*schen Sechseck *abcdef* die sechs Geraden *ce*, *df*, ... *bd* zieht, so bilden diese ein *Brianchon*sches Sechsseit.

§ 4.

Ableitung einer Determinanten-Identität. Der *Carnot*sche Satz für Kegelschnitte.

Es seien G, H, K; G', H', K' sechs gerade Linien. Da zwischen je vier von ihnen eine lineare Relation bestehen muss, so kann man setzen:

$$G' = \alpha G + \beta H + \gamma K.$$

Multiplicirt man diese Gleichung äusserlich mit $[HK]$, $[KG]$, $[GH]$, so folgt wegen (18.):

$$[G'HK] = \alpha[GHK],$$
$$[G'KG] = \beta[GHK],$$
$$[G'GH] = \gamma[GHK].$$

Die Einsetzung der hieraus sich ergebenden Werthe von α, β, γ in obige Gleichung liefert die folgende Identität:

$$[GHK]G' = [G'HK]G + [G'KG]H + [G'GH]K,$$

aus der durch äussere Multiplication mit G:

$$[GHK][GG'] = -[G'GK][GH] + [G'GH][GK]$$

hervorgeht. Hieraus folgt durch cyklische Permutation der Buchstaben G, H, K; G', H', K':

$$[GHK][HH'] = -[H'HK][GH] - [H'HG][HK]$$

und

$$[GHK][KK'] = -[K'KH][GK] - [K'KG][HK].$$

Multiplicirt man diese drei Formeln äusserlich und beachtet, dass analog (26.):

$$[GH\,GK\,HK] = [GHK]^2$$

ist, so folgt:

(45.) $-[GHK][GG'\,HH'\,KK'] = [G'GH][H'HK][K'KG]+[G'GK][H'HG][K'KH].$

Setzt man hierin:

$$(46.)\quad \begin{cases} G=[ab], & G'=[de], \\ H=[cd], & H'=[fa], \\ K=[ef], & K'=[bc], \end{cases}$$

so geht wegen (28.) $[GG'\,HH'\,KK']$ in ω über. Weil aber ausserdem wegen (25.):

$$\begin{aligned} [G'GH] &= [abd][cde], & [G'GK] &= -[abe][def], \\ [H'HK] &= [aef][cdf], & [H'HG] &= -[abf][acd], \\ [K'KG] &= [abc][bef], & [K'KH] &= -[bcd][cef] \end{aligned}$$

ist, so folgt aus (45.):

$$(47.)\quad \begin{cases} [ab\,cd\,ef]\,\omega = -[abc][abd][aef][bef][cde][cdf] \\ \qquad\qquad\qquad +[abe][abf][acd][bcd][cef][def]\text{*)}, \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass der Factor von ω, nämlich $[ab\,cd\,ef]$, wegen (22.), (24.) und (27.) noch die folgenden drei Formen:

$$(48.)\quad \begin{cases} [ab\,cd\,ef] &= -[abc][def]+[abd][cef] \\ &= \quad [acd][bef]-[bcd][aef] \\ &= \quad [abe][cdf]-[abf][cde] \end{cases}$$

annimmt.

Erwähnt sei noch, dass Formel (47.), ebenso wie jede der 14 übrigen aus ihr durch Buchstabenvertauschung hervorgehenden Gleichungen, geometrisch gedeutet, den *Carnot*schen Satz**) für Kegelschnitte ergiebt.

§ 5.

Erklärungen und Identitäten. Umformung von $-\omega$ in $\delta = [a^2b^2c^2d^2e^2f^2]$.

Wenn die sechs Punkte $a, b, \ldots f$ auf einem Kegelschnitte liegen, so verschwindet, wie bekannt, die Determinante

$$\delta = \Sigma \pm a_1^2 b_2^2 c_3^2 (d_2 d_3)(e_3 e_1)(f_1 f_2).$$

---

*) Vgl. *Hunyady*, Bd. 83, S. 85, Formel (43.).

**) Vgl. *Hunyady*, Bd. 83, S. 80.

Um nun durch directe Umformung von ω den Nachweis zu führen, dass $\omega = -\delta$ ist, sind einige Erweiterungen der bisher auseinandergesetzten Principien nothwendig, welche jetzt gegeben werden sollen. Ich beginne damit, die in § 1 aufgestellten Erklärungen von drei Einheiten auf beliebig viele auszudehnen.

Setzt man:

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \cdots + p_\mathfrak{r} e_\mathfrak{r},$$
$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + \cdots + q_\mathfrak{r} e_\mathfrak{r},$$

so mögen die Grössen p und q ***extensive Grössen*** heissen und zwar ***abgeleitet*** aus den Einheiten $e_1, e_2, \ldots e_\mathfrak{r}$ mit Hülfe der ***Ableitungszahlen***

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_\mathfrak{r}; \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_\mathfrak{r}.$$

Multiplicirt man p mit q unter den Bedingungen:

$$\text{(VIII.)} \quad \begin{cases} e_\mathfrak{a} e_\mathfrak{a} = 0, \\ e_\mathfrak{a} e_\mathfrak{b} = -e_\mathfrak{b} e_\mathfrak{a}, \end{cases} \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots \mathfrak{r})$$

so heisse das Product ein ***äusseres*** und werde durch $[pq]$ bezeichnet. Die Gleichungen (VIII.) mögen die ***Bedingungsgleichungen der äusseren Multiplication*** genannt werden. Zu ihnen trete für ein äusseres Product von $\mathfrak{r}$ Factoren die fernere Bedingung:

$$\text{(IX.)} \quad e_1 e_2 \ldots e_\mathfrak{r} = 1.$$

Es seien $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots \mathfrak{e}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots \mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ zwei Systeme von je $\mathfrak{p}$ Einheiten. Für jedes dieser Systeme mögen die Bedingungen der äusseren Multiplication gelten, während die Einheiten des einen Systems mit denen des anderen durch die Bedingungen:

$$\text{(X.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{e}_\mathfrak{a} \mathfrak{E}_\mathfrak{a} = 1, \\ \mathfrak{e}_\mathfrak{a} \mathfrak{E}_\mathfrak{b} = 0 \end{cases} \qquad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b})$$

verknüpft sind. Einheiten, für welche die Bedingungen (X.) gelten, mögen ***sich ergänzende Einheiten*** heissen. Dass $\mathfrak{E}_\mathfrak{a}$ die ***Ergänzung*** von $\mathfrak{e}_\mathfrak{a}$ ist, werde mit ***Grassmann*** durch

$$\text{(XI.)} \quad \mathfrak{E}_\mathfrak{a} = |\mathfrak{e}_\mathfrak{a}$$

bezeichnet. Ersetzt man in:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{h}_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_\mathfrak{r} \mathfrak{e}_\mathfrak{r}$$

die Einheiten $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots \mathfrak{e}_\mathfrak{r}$ durch ihre Ergänzungen, so mag der entstehende Ausdruck durch $|\mathfrak{h}$ bezeichnet werden und die ***Ergänzung von*** $\mathfrak{h}$ heissen.

Dann ist also:

$$\text{(XII.)}\qquad |\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1|\mathfrak{e}_1+\mathfrak{h}_2|\mathfrak{e}_2+\cdots+\mathfrak{h}_\mathfrak{r}|\mathfrak{e}_\mathfrak{r}.$$

Bemerkt sei noch, dass aus $\mathfrak{E}_\mathfrak{a}=|\mathfrak{e}_\mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{e}_\mathfrak{a}=|\mathfrak{E}_\mathfrak{a}$ folgt, und dass beide Gleichungen zusammen:

$$\text{(XIII.)}\qquad |(|\mathfrak{e}_\mathfrak{a}) = \mathfrak{e}_\mathfrak{a}$$

ergeben; oder in Worten: ***Die Ergänzung von der Ergänzung einer Einheit ist diese Einheit selbst.*** Dasselbe gilt für extensive Grössen, d. h. es ist auch:

$$\text{(XIII*.)}\qquad |(|\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Es sei nun:

$$\text{(49.)}\qquad \begin{cases} p = p_1e_1+p_2e_2+\cdots+p_\mathfrak{r}e_\mathfrak{r}, \\ q = q_1e_1+q_2e_2+\cdots+q_\mathfrak{r}e_\mathfrak{r} \end{cases}$$

und

$$\text{(50.)}\qquad \begin{cases} P = P_1E_1+P_2E_2+\cdots+P_\mathfrak{r}E_\mathfrak{r}, \\ Q = Q_1E_1+Q_2E_2+\cdots+Q_\mathfrak{r}E_\mathfrak{r}. \end{cases}$$

Dann folgt:

$$[pq] = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(p_\mathfrak{a}q_\mathfrak{b}-p_\mathfrak{b}q_\mathfrak{a})e_\mathfrak{a}e_\mathfrak{b} \qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{a},\mathfrak{b}=1,2,\dots\mathfrak{r}\\ \mathfrak{a}\gtrless\mathfrak{b}\end{pmatrix}$$

und

$$[PQ] = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}(P_\mathfrak{c}Q_\mathfrak{d}-P_\mathfrak{d}Q_\mathfrak{c})E_\mathfrak{c}E_\mathfrak{d} \qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1,2,\dots\mathfrak{r}\\ \mathfrak{c}\gtrless\mathfrak{d}.\end{pmatrix}$$

Bilden nun nicht nur die $2.\mathfrak{r}$ Einheiten $e_\mathfrak{a}$ und $E_\mathfrak{a}$, sondern auch ihre $2\cdot\frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{r}-1)}{2}$ Combinationen zur zweiten Classe ohne Wiederholungen Systeme sich ergänzender Einheiten, ist also:

$$\text{(51.)}\qquad \begin{cases} e_\mathfrak{a}E_\mathfrak{a} = 1, \\ e_\mathfrak{a}E_\mathfrak{b} = 0, \\ (e_\mathfrak{a}e_\mathfrak{b})(E_\mathfrak{a}E_\mathfrak{b}) = 1, \\ (e_\mathfrak{a}e_\mathfrak{b})(E_\mathfrak{c}E_\mathfrak{d}) = 0, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1,2,\dots\mathfrak{r}\\ \mathfrak{a}\gtrless\mathfrak{b}\gtrless\mathfrak{c}\gtrless\mathfrak{d}\end{pmatrix}.$$

so folgt:

$$\big[[pq][PQ]\big] = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(p_\mathfrak{a}q_\mathfrak{b}-p_\mathfrak{b}q_\mathfrak{a})(P_\mathfrak{a}Q_\mathfrak{b}-P_\mathfrak{b}Q_\mathfrak{a}),$$

woraus nach einigen einfachen Umformungen sich ergiebt:

$$\big[[pq][PQ]\big] = \sum_\mathfrak{a}(p_\mathfrak{a}P_\mathfrak{a})\sum_\mathfrak{b}(q_\mathfrak{b}Q_\mathfrak{b})-\sum_\mathfrak{a}(p_\mathfrak{a}Q_\mathfrak{a})\sum_\mathfrak{b}(q_\mathfrak{b}P_\mathfrak{b})$$

oder

$$\text{(52.)}\qquad \big[[pq][PQ]\big] = [pP][qQ]-[pQ][qP],$$

wobei wegen $e_\mathfrak{a}E_\mathfrak{a}=1$, $e_\mathfrak{a}E_\mathfrak{b}=0$

$$[pP] = p_1P_1+p_2P_2+\cdots+p_\mathfrak{r}P_\mathfrak{r},$$
$$[qQ] = q_1Q_1+q_2Q_2+\cdots+q_\mathfrak{r}Q_\mathfrak{r}$$

u. s. w. ist.

Hervorheben will ich noch einmal, dass die Gültigkeit von (52.) darauf beruht, dass die Systeme der Einheiten, aus denen p, q und $[pq]$ abgeleitet sind, die Ergänzungen der Einheiten bilden, aus denen bez. P, Q und $[PQ]$ abgeleitet.

Bisher wurden extensive Grössen nur durch äussere Multiplication verknüpft. Es wird aber für das Folgende nothwendig, auch die *algebraische Multiplication* extensiver Grössen in Verbindung mit der *äusseren* zu betrachten.

Zwei extensive Grössen heissen *algebraisch* multiplicirt, wenn für die Einheiten, aus denen sie abgeleitet sind, das *commutative Gesetz*

$$e_a e_b = e_b e_a$$

besteht. Bezeichnet man mit $p.q$ das algebraische Product zweier extensiven Grössen p und q, wobei

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$$

und

$$q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$$

gesetzt ist, so folgt:

$$(53.)\quad p.q = p_1 q_1 e_1^2 + p_2 q_2 e_2^2 + p_3 q_3 e_3^2 + (p_2 q_3 + p_3 q_2) e_2 e_3 + (p_3 q_1 + p_1 q_3) e_3 e_1 + (p_1 q_2 + p_2 q_1) e_1 e_2,$$

woraus für $q = p$

$$p^2 = p_1^2 e_1^2 + p_2^2 e_2^2 + p_3^2 e_3^2 + 2 p_2 p_3 \, e_2 e_3 + 2 p_3 p_1 \, e_3 e_1 + 2 p_1 p_2 \, e_1 e_2$$

hervorgeht. Hierbei ist, wie bei Zahlgrössen, $p.p = p^2$ gesetzt.

Ebenso folgt aus:

$$P = P_1 E_1 + P_2 E_2 + P_3 E_3,$$
$$Q = Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + Q_3 E_3$$

durch algebraische Multiplication:

$$(54.)\quad \begin{cases} P.Q = P_1 Q_1 E_1^2 + P_2 Q_2 E_2^2 + P_3 Q_3 E_3^2 + (P_2 Q_3 + P_3 Q_2) E_2 E_3 \\ \qquad + (P_3 Q_1 + P_1 Q_3) E_3 E_1 + (P_1 Q_2 + P_2 Q_1) E_1 E_2. \end{cases}$$

Fasst man die sechs Producte der Einheiten E_1, E_2, E_3 nämlich:

$$(55.)\quad E_1^2,\quad E_2^2,\quad E_3^2,\quad E_2 E_3,\quad E_3 E_1,\quad E_1 E_2$$

als sechs neue linear von einander unabhängige Einheiten auf, so kann man sagen, $P.Q$ sei aus ihnen abgeleitet. Ebenso heisse p^2 aus den sechs Einheiten:

$$(56.)\quad e_1^2,\quad e_2^2,\quad e_3^2,\quad 2e_2 e_3,\quad 2e_3 e_1,\quad 2e_1 e_2$$

abgeleitet.

Sind nun die Einheiten e_1, e_2, e_3 und E_1, E_2, E_3 und ebenso die Einheiten in (55.) und (56.) einander ergänzende Einheiten, d. h. gelten ausser den bereits festgestellten Bedingungen:

$$e_{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{a}} = 1, \qquad e_{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{b}} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, 3\\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b}\end{pmatrix}$$

die folgenden neuen:

$$\text{(XIII.)} \quad \begin{cases} (e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{b}})(E_{\mathfrak{c}} E_{\mathfrak{d}}) = 0, \\ 2(e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{b}})(E_{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{b}}) = 1, \\ (e_{\mathfrak{a}} e_{\mathfrak{a}})(E_{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{a}}) = 1, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} = 1, 2, 3\\ \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{d}\end{pmatrix}$$

so folgt:

$$\text{(57.)} \quad [p^2\ P.Q] = [pP]\,[pQ],$$

wobei, wie oben

$$\text{(58.)} \quad \begin{cases} [pP] = p_1 P_1 + p_2 P_2 + p_3 P_3, \\ [pQ] = p_1 Q_1 + p_2 Q_2 + p_3 Q_3 \end{cases}$$

ist.

Die Bedingungen (XIII.) gestatten auch das allgemeinere äussere Product $[p.q\ \ P.Q]$, dessen Factoren algebraische Producte sind, zu bilden; man findet wegen (XIII.) sehr leicht:

$$\text{(59.)} \quad [p.q\ \ P.Q] = \frac{[pP]\,[qQ] + [pQ]\,[qP]}{2}\ {}^{*)},$$

woraus für $q = p$ (57.) hervorgeht.

Ersetzt man der einfacheren Schreibweise wegen die beiden Systeme von Einheiten in (55.) und (56.) bez. durch:

$$\mathrm{E}_1, \quad \mathrm{E}_2, \quad \mathrm{E}_3, \quad \mathrm{E}_4, \quad \mathrm{E}_5, \quad \mathrm{E}_6$$

und

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6,$$

so erkennt man, dass die Bedingungen (XIII.) in die (X.) analogen

$$\text{(XIII*.)} \quad \begin{cases} \varepsilon_{\mathfrak{a}} \mathrm{E}_{\mathfrak{a}} = 1, \\ \varepsilon_{\mathfrak{a}} \mathrm{E}_{\mathfrak{b}} = 0 \end{cases} \qquad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b})$$

übergehen. Unterwirft man die Einheiten ε und E selbst der äusseren Multiplication und setzt:

$$\text{(60.)} \quad \begin{cases} a^2 = a_1^2 \varepsilon_1 + a_2^2 \varepsilon_2 + a_3^2 \varepsilon_3 + a_2 a_3 \varepsilon_4 + a_3 a_1 \varepsilon_5 + a_1 a_2 \varepsilon_6 = p_1 \varepsilon_1 + p_2 \varepsilon_2 + \cdots + p_6 \varepsilon_6 = p, \\ c^2 = c_1^2 \varepsilon_1 + c_2^2 \varepsilon_2 + c_3^2 \varepsilon_3 + c_2 c_3 \varepsilon_4 + c_3 c_1 \varepsilon_5 + c_1 c_2 \varepsilon_6 = q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2 + \cdots + q_6 \varepsilon_6 = q, \\ F.G = F_1 G_1 \mathrm{E}_1 + F_2 G_2 \mathrm{E}_2 + F_3 G_3 \mathrm{E}_3 + (F_2 G_3 + F_3 G_2)\,\mathrm{E}_4 + (F_3 G_1 + F_1 G_3)\,\mathrm{E}_5 \\ \qquad + (F_1 G_2 + F_2 G_1)\,\mathrm{E}_6 = P_1 \mathrm{E}_1 + P_2 \mathrm{E}_2 + \cdots + P_6 \mathrm{E}_6 = P, \\ H.K = H_1 K_1 \mathrm{E}_1 + H_2 K_2 \mathrm{E}_2 + H_3 K_3 \mathrm{E}_3 + (H_2 K_3 + H_3 K_2)\,\mathrm{E}_4 + (H_3 K_1 + H_1 K_3)\,\mathrm{E}_5 \\ \qquad + (H_1 K_2 + H_2 K_1)\,\mathrm{E}_6 = Q_1 \mathrm{E}_1 + Q_2 \mathrm{E}_2 + \cdots + Q_6 \mathrm{E}_6 = Q, \end{cases}$$

*) Vergl. *Grassmann*. Dieses Journal, Bd. 84, S. 277.

so folgt wegen (52.)

$$\big[[a^2\,c^2]\;[F.G\;\;H.K]\big] = [a^2\;F.G]\,[c^2\;\;H.K]-[a^2\;\;H.K]\,[c^2\;\;F.G],$$

woraus wegen (57.) die Hilfsformel:

$$(61.)\qquad \big[[a^2\,c^2]\;[F.G\;\;H.K]\big] = [aF][aG][cH][cK]-[aH][aK][cF][cG]$$

hervorgeht.

Specialisirt man diese allgemeine Formel nun dadurch, dass man:

$$(62.)\qquad \begin{cases} F=[bd], & H=[bf], \\ G=[ef], & K=[de] \end{cases}$$

setzt, und lässt man wie in § 1, (II.):

$$\begin{aligned} E_1 &= e_2\,e_3, \\ E_2 &= e_3\,e_1, \\ E_3 &= e_1\,e_2 \end{aligned}$$

sein, so folgt aus (61.):

$$\big[[a^2c^2]\big[[bd].[ef]\;\;[bf].[de]\big]\big] = [abd]\,[aef]\,[cbf]\,[cde]-[abf]\,[ade]\,[cbd]\,[cef].$$

Da aber $[cbf]=-[bcf]$ und $[cbd]=-[bcd]$ ist, so ist die rechte Seite dieser Gleichung, wie aus (30.) ersichtlich, gleich ω. Man erhält also:

$$(63.)\qquad \omega = \big[[a^2c^2]\big[[bd].[ef]\;\;[bf].[de]\big]\big]$$

und erkennt, dass die weitere Umformung von ω von der Entwickelung des äusseren Productes $\big[[bd].[ef]\;\;[bf].[de]\big]$ abhängt.

Um Producte dieser Form zu untersuchen, werde

$$(64.)\qquad \varphi = \big[[pq].[rs]\;\;[ps].[qr]\big]$$

betrachtet, worin:

$$(65.)\qquad \begin{cases} p = p_1e_1+p_2e_2+p_3e_3, \\ q = q_1e_1+q_2e_2+q_3e_3, \\ r = r_1e_1+r_2e_2+r_3e_3, \\ s = s_1e_1+s_2e_2+s_3e_3 \end{cases}$$

ist. Hieraus folgt:

$$[pq] = (p_2q_3-p_3q_2)\,e_2e_3+(p_3q_1-p_1q_3)\,e_3e_1+(p_1q_2-p_2q_1)\,e_1e_2,$$

oder, wenn man, wie bisher:

$$e_2e_3=E_1,\quad e_3e_1=E_2,\quad e_1e_2=E_3$$

und überdies:

$$(p_2 q_3 - p_3 q_2) = F_1,$$
$$(p_3 q_1 - p_1 q_3) = F_2,$$
$$(p_1 q_2 - p_2 q_1) = F_3$$

setzt:

$$[pq] = F_1 E_1 + F_2 E_2 + F_3 E_3 = F.$$

Ebenso kann man setzen:

$$[rs] = G, \quad [ps] = H, \quad [qr] = K,$$

wobei G, H, K ebenso wie F aus E_1, E_2, E_3 abgeleitet sind und zwar mit Hilfe der Ableitungszahlen, G_1, G_2, G_3, $H_1 \ldots$, welche aus F_1, F_2, F_3 durch Vertauschung von p und q mit r und s, p und s, q und r hervorgehen. Dann folgt aus (64.)

$$\varphi = [F.G \quad H.K],$$

wobei die algebraischen Producte $F.G$ und $H.K$ die in (60.) angegebenen Werthe haben. Bildet man nun das äussere Product φ, so erhält man wegen (60.) einen Ausdruck, der aus den 15 Einheiten: $E_1 E_2$, $E_1 E_3$, ... $E_5 E_6$ abgeleitet ist. Nach der zu Gleichung (52.) gemachten Bemerkung sind diese Einheiten aber die bez. Ergänzungen zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 \varepsilon_3$, ... $\varepsilon_5 \varepsilon_6$, d. h. es ist:

$$(66.) \qquad (E_{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{b}}) = |(\varepsilon_{\mathfrak{a}} \varepsilon_{\mathfrak{b}}) \qquad \mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, 3.$$

Was andererseits die Coefficienten der 15 Einheiten $E_1 E_2$, $E_1 E_3$, ... $E_5 E_6$ anbetrifft, so sind sie bez. die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} F_1 G_1 & F_2 G_2 \\ H_1 K_1 & H_2 K_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} F_1 G_1 & F_3 G_3 \\ H_1 K_1 & H_3 K_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad \begin{vmatrix} F_3 G_1 + F_1 G_3 & F_1 G_2 + F_2 G_1 \\ H_3 K_1 + H_1 K_3 & H_1 K_2 + H_2 K_1 \end{vmatrix}$$

und diese stimmen, wie eine einfache Umformung derselben lehrt, mit den Coefficienten von bez.:

$$(\varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6), \quad -(\varepsilon_2 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6), \quad \ldots \quad (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4)$$

in der Entwickelung von $[p^2 q^2 r^2 s^2]$ überein. Hierbei ist nach dem Früheren:

$$(67.) \qquad p^2 = p_1^2 \varepsilon_1 + p_2^2 \varepsilon_2 + p_3^2 \varepsilon_3 + p_2 p_3 \varepsilon_4 + p_3 p_1 \varepsilon_5 + p_1 p_2 \varepsilon_6$$

u. s. w. Da aber die obigen Einheiten wegen $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 = 1$ nichts anderes sind, als die bez. Ergänzungen von $(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$, $(\varepsilon_1 \varepsilon_3)$, ... $(\varepsilon_5 \varepsilon_6)$, also als:

$$|(\varepsilon_1 \varepsilon_2), \quad |(\varepsilon_1 \varepsilon_3), \quad \ldots \quad |(\varepsilon_5 \varepsilon_6),$$

so erhält man schliesslich, wenn man noch die für die Ergänzung einer extensiven Grösse gegebene Erklärung (XII.) beachtet, die Endformel:

$$(68.) \qquad \big[[pq].[rs] \quad [ps].[qr]\big] = |[p^2 q^2 r^2 s^2].$$

Hierin bedeuten, um es noch einmal zu wiederholen, $[pq]$, $[rs]$ u. s. w. und ebenso $[p^2\,q^2\,r^2\,s^2]$ *äussere Producte*, während $[pq].[rs]$ und $[ps].[qr]$ *algebraische Producte* der Factoren $[pq]$, $[rs]$ und $[ps]$, $[qr]$ bezeichnen, und der senkrechte Strich vor der eckigen Klammer der rechten Seite bestimmt, dass nach vollzogener äusserer Multiplication die Einheiten durch ihre Ergänzungen ersetzt werden sollen.

Für

$$p = b, \quad r = e,$$
$$q = d, \quad s = f$$

geht (68.) in:

$$\big[[bd].[ef] \quad [bf].[de]\big] = |[b^2\,d^2\,e^2\,f^2]$$

über. Bei Benutzung dieser Formel erhält man aus (63.), weil $(\varepsilon_a\,\varepsilon_b)\,|\,(\varepsilon_a\,\varepsilon_b) = 1$ und $(\varepsilon_a\,\varepsilon_b)\,|\,(\varepsilon_c\,\varepsilon_b) = 0$ ist:

$$\omega = [a^2\,c^2\,b^2\,d^2\,e^2\,f^2]$$

oder auch:

$$(69.) \qquad \omega = -[a^2\,b^2\,c^2\,d^2\,e^2\,f^2],$$

wobei $a^2, b^2, \dots f^2$ durch (67.) bestimmt sind und $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,\varepsilon_5\,\varepsilon_6 = 1$ ist. Da desshalb das äussere Product rechter Hand identisch die Determinante

$$\delta = \Sigma \pm a_1^2\,b_2^2\,c_3^2\,(d_2\,d_3)\,(e_3\,e_1)\,(f_1\,f_2)$$

darstellt, so folgt *):

$$\omega = -\delta$$

w. z. b. w.

§ 6.

Umformung von ω in $\vartheta = [b.c \;\; c.a \;\; a.b \;\; e.f \;\; f.d \;\; d.e]$.

Nachdem im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden, dass $\omega = -\delta$ ist, wo

$$(70.) \qquad \delta = [a^2\,b^2\,c^2\,d^2\,e^2\,f^2]$$

war und $a^2, b^2, \dots f^2$ die aus (67.) hervorgehende Bedeutung haben, werde jetzt eine weitere Umformung gegeben.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(71.) \qquad \begin{cases} [a^2\,b^2\,c^2] = \mathfrak{P}, \\ [d^2\,e^2\,f^2] = \mathfrak{Q} \end{cases}$$

und multiplicirt das äussere Product $[a^2\,b^2\,c^2]$ aus, so erhält man für $\mathfrak{P}$ einen Ausdruck, welcher aus den zwanzig Einheiten $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_4$, $\dots$ $\varepsilon_4\,\varepsilon_5\,\varepsilon_6$ abgeleitet ist; das Nämliche gilt für $\mathfrak{Q}$. Bezeichnet man alsdann die Coef-

---

*) Vgl. *Mertens*, Bd. 84, S. 357 und *Pasch*, Bd. 89, S. 248.

ficienten von $\varepsilon_{\mathfrak{a}}\varepsilon_{\mathfrak{b}}\varepsilon_{\mathfrak{c}}$ in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ bez. durch $\mathfrak{P}_{\mathfrak{abc}}$ und $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{abc}}$, so erhält man, weil $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 = 1$ ist:

$$\delta = \varrho+\sigma-\tau-\upsilon, \tag{72.}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} \varrho &= \mathfrak{P}_{123}\mathfrak{Q}_{456}-\mathfrak{P}_{124}\mathfrak{Q}_{356}+\mathfrak{P}_{134}\mathfrak{Q}_{256},\\ \sigma &= \mathfrak{P}_{125}\mathfrak{Q}_{346}-\mathfrak{P}_{126}\mathfrak{Q}_{345}-\mathfrak{P}_{135}\mathfrak{Q}_{246}\\ &\quad+\mathfrak{P}_{136}\mathfrak{Q}_{245}+\mathfrak{P}_{145}\mathfrak{Q}_{236}-\mathfrak{P}_{146}\mathfrak{Q}_{235}\\ &\quad+\mathfrak{P}_{156}\mathfrak{Q}_{234}\end{aligned}\right. \tag{73.}$$

ist und τ und υ bez. aus ϱ und σ durch Vertauschung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ hervorgehen. Hierbei ist zu bemerken, dass das Vorzeichen von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{abc}}\mathfrak{Q}_{\mathfrak{def}}$ in ϱ und σ positiv oder negativ ist, je nachdem $\varepsilon_{\mathfrak{a}}\varepsilon_{\mathfrak{b}}\varepsilon_{\mathfrak{c}}\varepsilon_{\mathfrak{d}}\varepsilon_{\mathfrak{e}}\varepsilon_{\mathfrak{f}} = +1$ oder $= -1$ wird. Von den zwanzig Coefficienten $\mathfrak{P}_{\mathfrak{abc}}$ müssen die beiden: $\mathfrak{P}_{123}$ und $\mathfrak{P}_{456}$ direct umgeformt werden; die übrigen achtzehn dagegen lassen sich aus vier von ihnen, etwa aus $\mathfrak{P}_{124}$, $\mathfrak{P}_{126}$, $\mathfrak{P}_{145}$, $\mathfrak{P}_{156}$ durch passende Vertauschung der Indices ableiten. Auf diese Weise findet man:

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{P}_{123} = 2\mathfrak{P}'_{123}+\mathfrak{P}'_{456}, & & \mathfrak{P}_{456} = \mathfrak{P}'_{123},\\ \mathfrak{P}_{124} = \mathfrak{P}'_{124}+\mathfrak{P}'_{256}, & & \mathfrak{P}_{356} = -\mathfrak{P}'_{134},\\ \mathfrak{P}_{125} = \mathfrak{P}'_{125}-\mathfrak{P}'_{146}, & & \mathfrak{P}_{346} = -\mathfrak{P}'_{235},\\ \mathfrak{P}_{126} = -\mathfrak{P}'_{126}, & & \mathfrak{P}_{345} = \mathfrak{P}'_{345},\\ \mathfrak{P}_{134} = \mathfrak{P}'_{134}-\mathfrak{P}'_{356}, & & \mathfrak{P}_{256} = \mathfrak{P}'_{124},\\ \mathfrak{P}_{135} = -\mathfrak{P}'_{135}, & & \mathfrak{P}_{246} = \mathfrak{P}'_{246},\\ \mathfrak{P}_{136} = \mathfrak{P}'_{136}-\mathfrak{P}'_{145}, & & \mathfrak{P}_{245} = \mathfrak{P}'_{236},\\ \mathfrak{P}_{145} = -\mathfrak{P}'_{136}, & & \mathfrak{P}_{236} = \mathfrak{P}'_{236}+\mathfrak{P}'_{245},\\ \mathfrak{P}_{146} = -\mathfrak{P}'_{125}, & & \mathfrak{P}_{235} = \mathfrak{P}'_{235}-\mathfrak{P}'_{346},\\ \mathfrak{P}_{156} = \mathfrak{P}'_{156}, & & \mathfrak{P}_{234} = -\mathfrak{P}'_{234}, \end{array}\right. \tag{74.}$$

wobei

$$[b.c \quad c.a \quad a.b] = \mathfrak{P}' \tag{75.}$$

gesetzt und der Coefficient von $\varepsilon_{\mathfrak{a}}\varepsilon_{\mathfrak{b}}\varepsilon_{\mathfrak{c}}$ in $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{P}'_{\mathfrak{abc}}$ bezeichnet ist. In (75.) sind $b.c$, $c.a$, $a.b$ algebraische Producte und es ist, wie früher:

$$\begin{aligned} b.c &= b_1c_1\varepsilon_1+b_2c_2\varepsilon_2+b_3c_3\varepsilon_3+(b_2c_3+b_3c_2)\varepsilon_4\\ &\quad+(b_3c_1+b_1c_3)\varepsilon_5+(b_1c_2+b_2c_1)\varepsilon_6, \end{aligned}$$

woraus die Werthe für $c.a$ und $a.b$ durch Buchstabenvertauschung hervorgehen. Setzt man entsprechend (75.)

$$[e.f \quad f.d \quad d.e] = \mathfrak{Q}' \tag{76.}$$

und bezeichnet den Coefficienten von $\varepsilon_\mathfrak{c}\varepsilon_\mathfrak{b}\varepsilon_\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{Q}'$ mit $\mathfrak{Q}'_{\mathfrak{cbe}}$, so erhält man ein (74.) analoges Formelsystem, in welchem nur $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, a, b, c bez. mit $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, d, e, f vertauscht sind. Setzt man alsdann die Werthe von $\mathfrak{P}_{\mathfrak{abc}}$ und $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{bef}}$ in (73.) ein und bezeichnet mit ϱ', σ', τ', v' die Ausdrücke, welche aus ϱ, σ, τ, v hervorgehen, wenn man $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mit $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ vertauscht, so findet man sofort:

$$(77.)\qquad \begin{cases} \varrho = \tau'+\theta', \\ \sigma = -\sigma', \end{cases}$$

wobei

$$\theta' = 2\mathfrak{P}'_{123}\mathfrak{Q}'_{123}+\mathfrak{P}'_{124}\mathfrak{Q}'_{134}+\mathfrak{P}'_{134}\mathfrak{Q}'_{124}$$

ist. Durch Vertauschung von $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{Q}'$, folgt aus (77.):

$$(78.)\qquad \begin{cases} \tau = \varrho'+\theta', \\ v = -v' \end{cases}$$

und daher:

$$\varrho+\sigma-\tau-v = -(\varrho'+\sigma'-\tau'-v')$$

oder:

$$\delta = -\vartheta,$$

wobei

$$\vartheta = [b.c\ \ c.a\ \ a.b\ \ e.f\ \ f.d\ \ d.e]$$

ist *). Dieses äussere Product ist aber wegen $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6 = 1$ und wegen der den algebraischen Producten $b.c$, $c.a$, ... $d.e$ beigelegten Werthe identisch mit der Determinante sechster Ordnung:

$$\Sigma\pm(b_1c_1)(c_2a_2)(a_3b_3)(e_3f_2+e_2f_3)(f_1d_3+f_3d_1)(d_1e_2+d_2e_1).$$

U. d. w. z. b.

*) Vgl. *Mertens,* Bd. 84 S. 359 und *Pasch,* Bd. 89 S. 249.

Berlin, den 1. November 1880.