Sur une application du théorème de M. *Mittag-Leffler*, dans la théorie des fonctions.

(Extrait d'une lettre adressée à M. *Mittag-Leffler* de Stockholm par M. *Ch. Hermite* à Paris.)

A M. *Weierstrass* est due, comme vous le savez bien, la remarque importante que l'expression analytique de la fonction $D_x \log \Gamma(1+x)$, par la formule

$$C+\left[1-\frac{1}{1+x}\right]+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right]+\cdots,$$

a été la première indication qui ait mis sur la voie de votre théorème général. C'est en effet le premier exemple connu, où la série des fractions simples, étant divergente, se change en une série absolument convergente, en ajoutant une constante à chacune des fractions. Les fonctions elliptiques sont venues après; et dans cette formule qu'a donnée le premier M. *Weierstrass*:

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \Sigma\left[\frac{1}{x+2mK+2m'iK'}-\frac{1}{2mK+2m'iK'}-\frac{x}{(2mK+2m'iK')^2}\right],$$

c'est un binôme du premier degré que l'on retranche au lieu d'une constante. Voici un cas enfin où il faut retrancher des fractions simples un polynôme entier de degré limité, mais qui peut être quelconque. Considérez la fonction $F(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}$, dont les pôles sont $x = -n$ et les résidus correspondants $R_n = \frac{(-1)^n(a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1.2\dots n}$. Si nous supposons que la constante a soit positive, la série $\Sigma\frac{R_n}{x+n}$ est convergente, et sans qu'il soit besoin d'ajouter une fonction holomorphe, on a l'expression:

$$F(x) = \Sigma\frac{R_n}{x+n}.$$

C'est ce que l'on prouvera immédiatement au moyen de la formule $F(x) = \int_0^1 (1-t)^{a-1} t^{x-1} dt$; nous pouvons en effet sous le signe d'intégration développer la puissance $(1-t)^{a-1}$, et écrire:

$$F(x) = \int_0^1 \Sigma \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n} t^{x-1+n} dt,$$

puis:

$$F(x) = \Sigma \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{1.2\ldots n} \frac{1}{x+n}.$$

Vous observerez de plus que x devant être supposé nécessairement positif, dans l'intégrale, le résultat déduit du développement en série subsiste pour toute valeur réelle ou imaginaire de la variable. Mais admettons que a soit négatif (réel pour plus de simplicité), et soit $a = -a'$. La série précédente cesse d'être convergente, et nous avons par conséquent à chercher, s'il existe une valeur entière de l'exposant i qui rende convergente la nouvelle suite:

$$\Sigma \frac{R_n}{n^i} = \Sigma \frac{(a'+1)(a'+2)\ldots(a'+n)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{n^i}.$$

Or en désignant par u_n le terme général, on a:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^i(n+1+a')}{(n+1)^{i+1}} = \frac{n^{i+1}+(1+a')n^i}{n^{i+1}+(1+i)n^i+\cdots}$$

et la règle de *Gauss* donne immédiatement la condition:

$$1+a'-1-i+1 < 0$$

ou simplement:

$$i > a'+1.$$

La fonction considérée nous conduit donc à l'application de votre théorème dans la circonstance que j'avais en vue et qui s'offre pour la première fois, si je ne me trompe, en analyse. Pour parvenir alors à l'expression de $F(x)$, je poserai $a = -\nu + \alpha$, ν étant un nombre entier et α positif, puis je ferai usage de la relation élémentaire:

$$\Gamma(x-\nu) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu)}$$

qui permet d'écrire:

$$F(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha-\nu)}{\Gamma(x+\alpha-\nu)} = G(x)\frac{\Gamma(x)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(x+\alpha)}$$

où j'ai fait:

$$G(x) = \left(1+\frac{x}{\alpha-1}\right)\left(1+\frac{x}{\alpha-2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{\alpha-\nu}\right).$$

Vous voyez qu'étant ramené au cas précédemment considéré, on en conclut immédiatement:

$$F(x) = G(x)\Sigma\frac{(-1)^n(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{x+n};$$

un calcul facile montre ensuite qu'on a:

$$R_n = \frac{(-1)^n(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{1.2\ldots n}G(-n),$$

et en désignant le polynôme de degré $\nu-1$ en x, $\frac{G(x)-G(-n)}{x+n}$ par $G_n(x)$, nous parvenons à l'expression analytique de la fonction $F(x)$, sous la forme que donne votre théorème, à savoir:

$$F(x) = \Sigma\left[\frac{R_n}{x+n}+G_n(x)\right].$$

Remarquez cependant cette légère modification qui consiste en ce que $G_n(x)$ n'est point le polynôme:

$$-R_n\left[\frac{1}{n}+\frac{x}{n^2}+\cdots+\frac{x^{\nu-1}}{n^\nu}\right].$$

Cette circonstance a pour effet de supprimer toute partie entière dans $F(x)$, et elle suggère la considération suivante. Soit en général $f(x)$ une fonction uniforme, n'ayant pour fixer les idées que des pôles simples $x=a_n$, et soit R_n le résidu qui correspond à a_n. Désignons par $G(x)$ une fonction holomorphe, telle que l'équation $G(x)=0$ n'ait jamais qu'un nombre fini et limité de racines x_0, x_1, etc.. Cette condition pourra être remplie alors même que $G(x)$ ne serait point un polynôme, mais le produit d'un polynôme par l'exponentielle d'une fonction holomorphe. Cela posé, je considère dans les cas où la série des fractions simples $\frac{R_n}{x-a_n}$ n'est point convergente, la nouvelle fonction $\frac{f(x)}{G(x)}$. Désignons par $\mathfrak{R}_n$ les résidus qui correspondent aux pôles $x=a_n$ et par ρ_0, ρ_1, ... ceux qui correspondent aux racines $x=x_0$, $x=x_1$, ... de $G(x)$. Il est clair qu'on pourra poser:

$$\frac{f(x)}{G(x)} = \frac{\rho_0}{x-x_0}+\frac{\rho_1}{x-x_1}+\cdots+\Sigma\frac{\mathfrak{R}_n}{x-a_n}+g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction holomorphe, lorsque la série:

$$\Sigma\,\mathrm{mod}\,\frac{\mathfrak{R}_n}{a_n}$$

19*

sera convergente, et on tirera évidemment de là:

$$f(x) = G(x)\Sigma\frac{\mathfrak{R}_n}{x-a_n}+g_1(x),$$

$g_1(x)$ désignant encore une fonction holomorphe.

C'est en supposant en particulier $G(x)=x^\nu$, ce qui donne $\mathfrak{R}_n=\frac{R_n}{a_n^\nu}$, qu'on obtient la condition si simple de la convergence de la série $\Sigma \operatorname{mod}\frac{R_n}{a_n^{\nu+1}}$, mais il ne semble pas inutile d'avoir remarqué une condition d'une forme plus générale, qui serait susceptible de trouver son application dans certains cas, et peut-être même lorsque les degrés des polynômes qu'il faut joindre aux fonctions simples $\frac{R_n}{x-a_n}$, doivent être supposés indéfiniment croissants.

La fonction $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}$ peut encore se traiter comme la précédente et vous allez voir qu'elle conduit à des conséquences analogues. On a alors deux séries de pôles, données par les formules:

$$x=-n,\quad x=a+n;$$

quant aux résidus qui leur correspondent, ils sont égaux et de signes contraires: nous les représenterons par R_n et $-R_n$, en faisant:

$$R_n = \frac{(-1)^n a(a+1)\ldots(a+n-1)}{1.2\ldots n}.$$

Cela étant, on reconnaît comme précédemment par la règle de *Gauss* que la série $\Sigma\frac{R_n}{x+n}$ est convergente sous la condition $a<1$, il en est de même par conséquent de celle-ci $\Sigma\frac{R_n}{x-a-n}$, qui en résulte en changeant x en $a-x$. Je recours maintenant, pour établir que la somme des deux suites représente la fonction, à la formule bien connue:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}=\int_0^1\frac{t^{x-1}+t^{a-x-1}}{(1+t)^a}dt,$$

et j'observe que le second membre, pour être une quantité finie, exige les conditions $x>0$, $a-x>0$, de sorte qu'il faut nécessairement supposer la constante a positive. Ceci admis, l'intégrale nous donne comme vous allez voir l'expression de la fonction par une somme de fractions simples. J'emploierai dans ce but le développement de la puissance du binôme:

$$\frac{1}{(1+t)^a} = \Sigma R_n t^n$$

en m'imposant la condition qu'il soit convergent non seulement pour $t<1$, mais pour la valeur limite $t=1$, ce qui aura lieu ainsi qu'*Abel* l'a établi si l'on suppose $a<1$. On en tire en effet:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{a-x-1}}{(1+t)^a}\,dt = \Sigma R_n\int_0^1 t^{x-1+n}\,dt+\Sigma R_n\int_0^1 t^{a-x-1+n}\,dt,$$

d'où ce résultat:

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma\frac{R_n}{x+n}-\Sigma\frac{R_n}{x-a-n},$$

où n'entre point de fonction holomorphe dans le second membre, et qui, je le répète, suppose a positif et moindre que l'unité. Je dis qu'il subsiste sans modification pour les valeurs négatives de cette constante, de sorte que la série des fractions simples représentera la fonction dans tous les cas où elle est convergente. Soit à cet effet $a=-\nu+\alpha$, ν étant un nombre entier, α étant positif et moindre que l'unité, en faisant:

$$G(x) = \left(1+\frac{x}{1-\alpha}\right)\left(1+\frac{x}{2-\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\nu-\alpha}\right),$$

nous aurons:

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(\alpha-x)}{\Gamma(\alpha)\,G(x)};$$

cela étant, j'opérerai de la manière suivante. Je me fonderai sur cette remarque que $f(x)$ étant donnée par la formule:

$$f(x) = \Sigma\frac{R}{x-a},$$

on en tire immédiatement sous la forme semblable d'une série de fractions simples, l'expression d'une seconde fonction, liée à la précédente par la relation:

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x-\xi}.$$

Nommons en effet R_1 le résidu de $f_1(x)$, correspondant au pôle $x=a$, on aura:

$$R_1 = \frac{R}{a-\xi},$$

ce qui permet d'écrire:

$$f(x) = \Sigma\frac{R_1(a-\xi)}{x-a},$$

et par conséquent:

$$f_1(x) = \Sigma\frac{R_1(a-\xi)}{(x-a)(x-\xi)}.$$

Or l'identité:

$$\frac{a-\xi}{(x-a)(x-\xi)} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-\xi}$$

donne sur-le-champ l'expression:

$$f_1(x) = \Sigma \frac{R_1}{x-a} - \frac{\Sigma R_1}{x-\xi},$$

et l'on peut remarquer qu'on a, d'après la valeur de R_1:

$$\Sigma R_1 = \Sigma \frac{R}{a-\xi} = -f(\xi).$$

La fonction $f_1(x)$ étant ainsi représentée par une série de fractions simples, sans addition d'une partie entière, vous voyez qu'en posant successivement:

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)}{x-\xi_1},$$

$$f_3(x) = \frac{f_2(x)}{x-\xi_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_\nu(x) = \frac{f_{\nu-1}(x)}{x-\xi_{\nu-1}},$$

il en sera de même de proche en proche de toutes ces quantités dont la dernière a pour expression:

$$f_\nu(x) = \frac{f(x)}{G(x)},$$

où l'on a fait:

$$G(x) = (x-\xi)(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{\nu-1}).$$

Nous sommes donc assuré par ce procédé bien facile, que le résultat obtenu pour $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}$ entraîne une expression de même forme de la fonction $\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}$. Mais cette forme change, et l'on se trouve amené à l'application de votre théorème, lorsque la constante a devient positive et plus grande que l'unité. Faisons en effet $a = \nu + \alpha$, où ν est entier, α positif et moindre que un, et posons:

$$G(x) = \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha+\nu-1}\right),$$

on aura:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = G(x)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Désignons encore par ϱ_n ce que devient R_n quand on change a en α, la formule obtenue plus haut, à savoir:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(x-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \Sigma\frac{\varrho_n}{x+n} - \Sigma\frac{\varrho_n}{x-\alpha-n},$$

nous donne:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x+n} - \Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x-\alpha-n}.$$

Or les ν premiers termes de la seconde série, dans le second membre, à savoir:

$$G(x)\left[\frac{\varrho_0}{x-\alpha} + \frac{\varrho_1}{x-\alpha-1} + \cdots + \frac{\varrho_{\nu-1}}{x-\alpha-\nu+1}\right]$$

conduisent d'après l'expression de $G(x)$ à un polynôme entier de degré $\nu-1$. Il viendra donc, si on le désigne un moment par $P(x)$:

$$\Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x-\alpha-n} = P(x) + \Sigma\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-\alpha-\nu-n}$$

les suites se rapportant aux valeurs $n = 0, 1, 2, \ldots$.

En se rappelant qu'on a posé $a = \alpha+\nu$, on peut encore écrire:

$$\Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x-\alpha-n} = P(x) + \Sigma\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-a-n}$$

et nous obtenons en conséquence la formule:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \Sigma\frac{G(x)\varrho_n}{x+n} - \Sigma\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-a-n} - P(x).$$

Si l'on désigne par $G_n(x)$ et $G_n^1(x)$ deux polynômes entiers de degré $\nu-1$, les termes généraux des deux séries se mettront d'ailleurs sous la forme:

$$\frac{G(x)\varrho_n}{x+n} = \frac{R_n}{x+n} + G_n(x),$$

$$\frac{G(x)\varrho_{\nu+n}}{x-a-n} = \frac{R_n}{x-a-n} + G_n^1(x),$$

qui est celle que donne votre théorème.

P. S. Je viens de remarquer qu'un point important de la théorie des fonctions Eulériennes conduit à une application de la notion de coupure dans les intégrales définies. Considérez en effet la relation qui donne la valeur approchée de $\log\Gamma(z)$, à savoir:

$$\log\Gamma(z) = (z-\tfrac{1}{2})\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \Phi(z).$$

On a ces deux expressions découvertes par *Binet* pour le terme complémentaire:

$$\Phi(z) = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t(z-t)-z-t}{(1-e^t)t^2} e^{tz}\,dt,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \log\frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{z\,dt}{z^2+t^2},$$

dont la première suppose essentiellement positive la partie réelle de la variable, tandis que la seconde existant dans toute l'étendue du plan, semble donner $\log\Gamma(z)$, pour toute valeur de z. Mais l'intégrale $\int_0^{\infty} \log\frac{e^{2\pi t}}{e^{2\pi t}-1}\,\frac{z\,dt}{z^2+t^2}$ admet pour coupure le lieu représenté par l'équation:

$$z^2+t^2 = 0,$$

t variant de zéro à l'infini, c'est-à-dire l'axe des ordonnées. C'est la circonstance de cette ligne de discontinuité qui explique qu'à gauche de la coupure, l'intégrale cesse de correspondre à la fonction $\log\Gamma(z)$, de sorte que les expressions de *Binet* ne donnent l'une et l'autre cette quantité que pour la moitié du plan qui est à droite de l'axe des ordonnées. J'ajoute qu'une des propriétés fondamentales de $\Gamma(z)$ s'offre comme une conséquence à tirer de cette considération de la coupure. Envisageons en effet, afin d'avoir l'intégrale d'une fonction uniforme, la dérivée $\Phi'(z)$ qui a pour expression, comme on le trouve aisément:

$$\Phi'(z) = -\int_0^{\infty} \frac{2t\,dt}{(z^2+t^2)(1-e^{-2\pi t})},$$

et donne la relation suivante:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} + \Phi'(z).$$

Pour deux points infiniment voisins d'un point quelconque de la coupure qui correspondent aux valeurs $t=\theta$, $z=i\theta$, et ont pour affixes les quantités $\varepsilon+i\theta$, $-\varepsilon+i\theta$, où ε est infiniment petit positif, on a d'après la formule générale:

$$\Phi'(\varepsilon+i\theta)-\Phi'(-\varepsilon+i\theta) = -\frac{2i\pi}{1-e^{-2\pi\theta}},$$

ou bien si l'on introduit la quantité $z = i\theta$:

$$\Phi'(\varepsilon+z)-\Phi'(-\varepsilon+z) = -\frac{\pi e^{-i\pi z}}{\sin\pi z} = -\pi(\operatorname{cotg}\pi z - i).$$

Mais $\Phi'(z)$ ne change pas de signe avec z, de sorte qu'on peut remplacer le terme $\Phi'(-\varepsilon+z)$ se rapportant à un point qui est à gauche de la coupure par $\Phi'(\varepsilon-z)$; il vient ainsi la relation:

$$\Phi'(\varepsilon+z)-\Phi'(\varepsilon-z) = -\pi(\operatorname{cotg}\pi z - i),$$

qui s'applique à la fonction Γ.

Ayant en effet:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(-z)}{\Gamma(-z)} = -\log(-1)-\frac{1}{z}+\Phi'(z)-\Phi'(-z),$$

on en conclut que l'expression:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(-z)}{\Gamma(-z)}+\log(-1)+\frac{1}{z}$$

coïncide pour ε infiniment petit, lorsqu'on suppose $z = i\theta$, avec la quantité:

$$-\pi(\operatorname{cotg}\pi z - i).$$

Elle lui est par conséquent identique dans tout le plan puisqu'il s'agit de fonctions uniformes, et si l'on fait comme il est permis, $\log(-1) = i\pi$, nous sommes amené à la relation:

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}-\frac{\Gamma'(-z)}{\Gamma(-z)} = -\frac{1}{z}-\pi\operatorname{cotg}\pi z,$$

d'où se tire facilement:

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z}$$

ou encore:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

De ce fait des deux expressions sous forme d'intégrales définies de la fonction $\Phi(z)$ l'une n'existant que dans une moitié du plan, tandis que l'autre subsiste pour toute valeur de la variable, mais avec l'axe des abscisses pour coupure, je crois pouvoir rapprocher comme analogue jusqu'à un certain point, le résultat suivant qui est d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Considérons comme fonctions de q, ou plutôt de ω, en faisant $q = e^{i\pi\omega}$, les quantités $\operatorname{sn}\xi$, $\operatorname{cn}\xi$, $\operatorname{dn}\xi$. Si l'on pose $\omega = x+iy$, les expressions sous forme de quotients, à savoir:

$$\operatorname{sn}\xi = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(\xi)}{\Theta(\xi)}, \quad \operatorname{cn}\xi = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H_1(\xi)}{\Theta(\xi)}, \quad \operatorname{dn}\xi = \sqrt{k}\frac{\Theta_1(\xi)}{\Theta(\xi)}$$

n'auront d'existence qu'autant que y sera positif et différent de zéro, tandis que les développements en séries simples:

$$\begin{aligned}
\frac{2kK}{\pi}\operatorname{sn}\frac{2K\xi}{\pi} &= \frac{4\sqrt{q}\sin\xi}{1-q} + \frac{4\sqrt{q^3}\sin 3\xi}{1-q^3} + \cdots,\\
\frac{2kK}{\pi}\operatorname{cn}\frac{2K\xi}{\pi} &= \frac{4\sqrt{q}\cos\xi}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}\cos 3\xi}{1+q^3} + \cdots,\\
\frac{2K}{\pi}\operatorname{dn}\frac{2K\xi}{\pi} &= 1 + \frac{4q\cos 2\xi}{1+q^2} + \frac{4q^2\cos 4\xi}{1+q^4} + \cdots
\end{aligned}$$

sont convergents pour toute valeur de q, en exceptant toutefois le cas de ω réel, ou $y = 0$. Or à l'égard de ces expressions analytiques entièrement explicites, l'axe des abscisses, comme la coupure de la seconde des intégrales de *Binet*, joue le rôle d'une ligne de discontinuité. Dans son beau et important travail intitulé: Ueber die Theorie der elliptischen Modul-Functionen (T. 83 du journal de *Borchardt*) M. *Dedekind* a donné d'après une indication de *Riemann*, la proposition suivante qui en montre le caractère. Si l'on suppose y infiniment petit positif, et x incommensurable, le module k est absolument indéterminé, tandis qu'en faisant $x = \frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers premiers entre eux, on a:

$$\begin{array}{llll}
k = \infty, & \text{pour} & m \equiv 1, & n \equiv 1 \quad (\text{mod.}\,2)\\
k = 1, & \text{,,} & m \equiv 0, & n \equiv 1\\
k = 0, & \text{,,} & m \equiv 1, & n \equiv 1.
\end{array}$$

En suivant l'axe des abscisses, à une distance infiniment petite au-dessus de cet axe, on voit donc se succéder pour $\operatorname{sn}\xi$ par exemple, les quantités $\sin\xi$ et $\frac{\operatorname{tang} i\xi}{i}$, répondant aux valeurs zéro et l'unité du module, et à des intervalles aussi rapprochés qu'on le veut. Je remarquerai encore que les développements ci-dessus, sous forme de séries simples, qui étendent à tout le plan, relativement à ω, la détermination de $\operatorname{sn}\frac{2K\xi}{\pi}$, $\operatorname{cn}\frac{2K\xi}{\pi}$, $\operatorname{dn}\frac{2K\xi}{\pi}$, ne réalisent point cette extension de la même manière pour les trois fonctions. Faisons en effet $\xi = \frac{\pi}{2}$ dans $\operatorname{sn}\frac{2K\xi}{\pi}$, et $\xi = 0$ dans $\operatorname{cn}\frac{2K\xi}{\pi}$, on trouvera ces formules

$$\frac{2kK}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} - \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} + \cdots,$$

$$\frac{2kK}{\pi} = \frac{4\sqrt{q}}{1+q} + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3} + \cdots$$

dont la première change de signe, mais non la seconde, lorsqu'on change q en $\frac{1}{q}$, c'est-à-dire ω en $-\omega$. Que de choses difficiles et délicates se trouvent amenées dans l'étude d'une fonction, par la présence d'une ligne de discontinuité!

Paris, septembre 1881.
