Ueber das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Classe.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Die Construction des Strahlensystems zweiter Ordnung zweiter Classe der fünf anderen Systeme, welche mit ihm dieselbe Brennfläche besitzen, lässt sich auf eine einfache elementare Weise ausführen, die aus der Construction des Strahlensystems dritter Ordnung zweiter Classe, welche ich früher angegeben habe *), durch Specialisirung hervorgeht. Die Beziehungen, welche die sechs Strahlensysteme unter einander haben, lassen sich ebenso wie früher erkennen und die meisten Sätze, welche über diese Strahlensysteme durch die Arbeiten der Herren *Kummer, Klein, Reye, Schur, Caporali* und anderer bekannt sind **), ohne Mühe ableiten. Es wird hier genügen, die Construction anzudeuten und auf einige dieser Beziehungen hinzuweisen.

§ 1.

Die Construction des Strahlensystems.

In einer Ebene (12) seien zwei reciproke Systeme (1) und (2) von besonderer Beschaffenheit gegeben. Der Strahlenbüschel zweiter Ordnung, der diejenigen Linien enthält, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen, möge aus zwei Strahlenbüscheln erster Ordnung bestehen. Ihre Mittelpunkte U_1 und U_2 liegen auf einem nicht zerfallenden Kegelschnitte ϱ, welcher der Ort der Punkte ist, durch welche die ihnen entsprechenden Geraden gehen. Eine solche Beziehung erhält man z. B. in einer Ebene, welche durch die Mittelpunkte zweier reciproken Strahlenbündel gelegt wird.

---

*) Dieses Journal Bd. 91, S. 1.

**) *Kummer,* Fläche vierter Ordnung etc., Monatsberichte d. Berl. Akad. 1864. *Klein,* Math. Annalen II. S. 199—226. *Reye,* dieses Journal Bd. 86, S. 97. *Schur,* Math. Annalen XV S. 440. *Caporali,* Sui Complessi e sulle Congruenze di 2° grado, Atti della R. Accad. dei Lincei 1877—78 S. 749.

Man erkennt dann leicht Folgendes: Zu jeder Geraden l_1, welche nicht durch U_1 geht, gehört der Punkt U_2; zu jedem Punkte L_1 gehört eine Gerade l_2 durch U_2, welche $\overline{L_1 U_1}$ auf dem Kegelschnitte ϱ trifft; zu einer Linie l_1, welche durch U_1 geht, gehören unendlich viele Punkte auf einer durch U_2 gehenden Geraden, welche l_1 auf ϱ schneidet.

Sind nun ausserhalb der Ebene (12) zwei Strahlenbüschel erster Ordnung $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ mit einem gemeinsamen Strahle beliebig angenommen, so kann man zu jeder Geraden l_1 einen zugehörenden Strahl $l^{(1)}$ durch L_2 der Art legen, dass $l^{(1)}$ dieselben Strahlen der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ schneidet wie l_1. Die Gesammtheit der Strahlen $l^{(1)}$ bildet erstens einen Strahlenbündel mit dem Mittelpunkte U_2, und zwar ist derselbe reciprok auf das ebene System (1) bezogen. Zwei Linien l_1 und $l^{(1)}$ sind entsprechende Geraden in einem Nullsysteme, in welchem zu der Ebene (12) der Punkt U_2 gehört und die Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ einander entsprechen.

Zweitens erhält man ein ***Strahlensystem zweiter Ordnung zweiter Classe*** Σ_1 in den Strahlen $l^{(1)}$, welche den durch U_1 gehenden Linien von (12) zugehören. Der Büschel U_1 bestimmt eine projectivische Beziehung zwischen den Büscheln $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ der Art, dass sie ihren gemeinsamen Strahl entsprechend gemein haben. Ein Strahl von Σ_1 schneidet stets entsprechende Strahlen dieser Büschel, wesshalb Σ_1 einem Nullsysteme S_1 angehört, in welchem der Ebene (12) der Punkt U_1 zugeordnet ist. Zu einem Strahle durch U_1 in (12) gehören unendlich viele Strahlen von Σ_1, welche eine Regelfläche zweiter Ordnung bilden, die von (12) in einem Punkte der Curve ϱ berührt wird.

Alle in einer beliebigen Geraden von (12) eintreffenden Strahlen von Σ_1 bilden eine Regelfläche dritter Ordnung, deren einfache Leitlinie diese Gerade ist, deren Doppellinie aber der im Nullsysteme S_1 zu der Geraden gehörende Strahl durch U_1 ist.

§ 2.

Die singulären Punkte und Ebenen von Σ_1.

Die Ebene α möge den Kegelschnitt ϱ in den Punkten O und P treffen, β in M und N. Es lässt sich nun wie früher beweisen, dass die Strahlen von Σ_1, welche die Verbindungsgeraden dieser vier Punkte schneiden, sechs Strahlenbüschel erster Ordnung bilden. Die vier Punkte M,

N, O, P sind Mittelpunkte solcher Strahlenbüschel von Σ_1, deren Ebenen durch U_1 gehen und die Punkte A resp. B enthalten. Die Strahlen von Σ_1, welche in $\overline{MU_2}$ eintreffen, bilden einen Büschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt man, wie folgt, erhält. Der Geraden $\overline{MU_2}$ entspricht im Nullsysteme S_1 eine durch U_1 gehende Linie, welche wir zum Schnitt mit der Ebene (MU_2B) bringen, und so erhalten wir den Mittelpunkt des betreffenden Büschels. Analoge Büschel liefern die Geraden $\overline{U_2N}$, $\overline{U_2O}$, $\overline{U_2P}$. U_2 ist Mittelpunkt eines Büschels von Σ_1 in derjenigen Ebene, welcher U_2 im Nullsystem S_1 entspricht, und endlich ist U_1 Mittelpunkt eines Büschels in der Ebene (12).

Wir finden somit sechszehn singuläre Punkte und sechszehn singuläre Ebenen mit Strahlenbüscheln erster Ordnung von Σ_1. Jeder Ebene ist hierdurch der Punkt zugewiesen, der ihr in S_1 entspricht. Jede Ebene enthält sechs Punkte, die auf einem Kegelschnitte liegen; durch jeden Punkt gehen sechs Ebenen, die eine Kegelfläche zweiter Ordnung berühren, wie sich dies leicht aus der hier bestimmten Anordnung ergiebt.

Die Uebersicht über die singulären Punkte und Ebenen wird am besten durch die Bezeichnungen des Herrn *Weber* *) gegeben, auf welche auch Herr *Reye* **) gekommen ist, und die man durch Analogie aus den im Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Classe gefundenen erhalten würde. Den Punkt U_1 bezeichnen wir mit (2); U_2 mit (1); die Ebene, welche zu U_2 gehört, mit (0) und die übrigen singulären Ebenen durch Combinationen der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 zu je zweien. Die sechs Punkte von (0) bezeichnen wir mit (1), (2), (3), (4), (5), (6) und die übrigen singulären Punkte mit Combinationen der Ziffern 1 bis 6 zu je dreien und zwar so, dass zwei Combinationen, die kein gemeinsames Element besitzen, denselben Punkt bestimmen.

Die Punkte M, N, O, P seien bezeichnet mit

(123), (124), (125), (126)

oder

(456), (356), (346), (345).

Die Bezeichnungen der ausserhalb (12) liegenden Punkte und der dazu gehörenden Ebenen lassen sich dann so festsetzen, dass man die von Herrn *Reye* mitgetheilte Tabelle erhält. Die nähere Ausführung der Anordnung der Singularitäten findet sich ebenfalls in der *Reye*schen Arbeit.

---

*) Dieses Journal, Bd. 84, S. 343.

**) a. a. O. S. 103.

§ 3.

Die Strahlensysteme: Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5, Σ_6.

Die Strahlen von Σ_1, welche in einer durch U_2 und in (12) gelegten Geraden eintreffen, bilden eine Regelschaar $G_{(12)}$ zweiter Ordnung. Die Leitstrahlen dieser Regelflächen ergeben ein Strahlensystem Σ_2 zweiter Ordnung und Classe, welches dieselbe Brennfläche wie Σ_1 besitzt. Die Strahlen von Σ_1, welche durch die Punkte einer durch *M, N, O, P* gelegten Curve zweiter Ordnung gehen, bilden eine Regelschaar $G'_{(12)}$ zweiten Grades, deren Leitgeraden zu Σ_2 gehören. Die Leitgeraden einer $G'_{(12)}$ können bei der in § 1 angegebenen Construction die Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ ersetzen*). Das Strahlensystem hat dieselben singulären Punkte und Ebenen wie Σ_1, nur sind dieselben in anderer Weise (wie aus der oben angeführten Tabelle ersichtlich ist) einander zugeordnet.

Die Strahlen von Σ_1, welche in einer durch *M, N, O* oder *P* gehenden Geraden in (12) eintreffen, bilden Regelschaaren $G'_{(1\mu)}$ ($\mu = 3, 4, 5, 6$), deren Leitschaaren vier weitere Strahlensysteme Σ_3, Σ_4, Σ_5, Σ_6 zweiter Ordnung und Classe bestimmen. Die Strahlensysteme Σ_1 und Σ_3 lassen sich auf eine zweite Art in Regelflächen $G_{(13)}$ zusammenfassen, welche die Ebene (12) in Kegelschnitten treffen, welche durch die Punkte (1), (124), (125), (126) gehen. Die Construction von Σ_1 lässt sich nach § 1 auch ausführen, wenn an Stelle von $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ die zu Σ_3 gehörende Schaar einer Fläche $G_{(13)}$ gesetzt und gleichzeitig der Punkt (1) mit (123) vertauscht wird.

Irgend zwei der sechs Strahlensysteme Σ_μ und Σ_ν lassen sich auf zwei verschiedene Arten zu Systemen von Regelflächen $G_{(\mu\nu)}$ und $G'_{(\mu\nu)}$ zusammenfassen**). Acht der singulären Ebenen und acht der singulären Punkte gehören $G_{(\mu\nu)}$ an, die übrigen singulären Elemente der Fläche $G'_{(\mu\nu)}$. Jedes System von Regelflächen enthält vier Ebenenpaare und vier Punktepaare z. B.:

Die Ebenen (0)(12), (34)(56), (35)(46), (36)(45) berühren die Flächen $G_{(12)}$ und sind die Ebenenpaare des Systems $G'_{(12)}$.

Die Punkte (1)(2), (134)(234), (135)(235), (145)(245) liegen auf den Flächen $G_{(12)}$ und sind die Punktepaare des Systems $G'_{(12)}$.

Die Ebenen (13)(23), (14)(24), (15)(25), (16)(26) berühren die Flächen $G'_{(12)}$ und sind die Ebenenpaare von $G_{(12)}$.

---

*) Vergl. dieses Journal Bd. 91, S. 11.

**) Vergl. *Schur* a. a. O. S. 441 und *Caporali* a. a. O.

Die Punkte (3)(123), (4)(124), (5)(125), (6)(126) liegen auf $G'_{(12)}$ und sind die Punktepaare von $G_{(12)}$.

Jedes der sechs Strahlensysteme lässt sich auf zehn verschiedene Arten durch Regelschaaren beschreiben.

Σ_μ kann auf dieselbe Weise construirt werden, wie das Strahlensystem Σ_1 nach § 1, und zwar kann an Stelle der Ebene (12) jede andere singuläre Ebene treten, an Stelle der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ die zu Σ_ν gehörende Regelschaar einer $G_{(\mu\nu)}$ oder $G'_{(\mu\nu)}$, welche die singuläre Ebene nicht berührt. Die Punkte U_1 und U_2 müssen dann durch die Mittelpunkte der Strahlenbüschel ersetzt werden, welche Σ_μ und Σ_ν in der gewählten singulären Ebene angehören.

Jedes Strahlensystem Σ_μ gehört einem besonderen Nullsysteme S_μ an.

Herr *Caporali* hat gezeigt, dass durch jedes Strahlensystem zweiten Grades 40 *Reye*sche *Complexe* gehen *). Diese lassen sich mit Hülfe unserer Construction leicht nachweisen.

Die Strahlen von Σ_1 treffen die Ebenen (12) und (56) in Punkten, welche von (1) resp. (134) durch projectivische Strahlenbüschel, die zu Σ_2 gehören, projicirt werden, und liegen desshalb in einem *Reye*schen Complex, dessen Tetraeder die Ecken: (1), (134), (123), (124) hat.

Andere solcher Complexe finden wir mit den Tetraedern:

(1), (156), (125), (126),
(1), (135), (123), (125),
(1), (136), (123), (126),
(1), (145), (124), (125),
(1), (156), (125), (126).

Die vier anderen Strahlensysteme geben desgleichen Veranlassung zu *Reye*schen Complexen, in denen Σ_1 liegt. Die Zahl derselben, deren Tetraeder die Ebene (12) enthält, ist gleich 10. Die Zahl aller Complexe, die durch Σ_1 gehen, ist desshalb 40.

§ 4.

Die Brennfläche der Strahlensysteme.

Da je zwei der Systeme Σ_μ zu Regelflächen zusammengefasst werden können, so umhüllen alle Systeme *eine* Brennfläche, deren Doppeltangenten

*) *Caporali* a. a. O.

die Strahlen der Systeme sind. Die singulären Punkte der Strahlensysteme sind Knotenpunkte der Fläche und die singulären Ebenen berühren dieselbe längs Kegelschnitten.

Eine Fläche $G_{(\mu\nu)}$ und eine $G'_{(\mu\nu)}$ schneiden sich in einem windschiefen Vierecke, in welchem die gegenüberstehenden Seiten demselben Strahlensysteme angehören.

Die Strahlen von Σ_μ auf $G_{(\mu\nu)}$ werden durch die Schnitte mit allen $G'_{(\mu\nu)}$ involutorisch gepaart. Durch die Flächen $G'_{(\mu\nu)}$ sind für die Leitschaar und Regelschaar einer $G_{(\mu\nu)}$ Involutionen bestimmt, durch deren projectivische Beziehung vermittelst der $G'_{(\mu\nu)}$ eine Raumcurve vierter Ordnung sich ergiebt, längs welcher die Brennfläche von $G_{(\mu\nu)}$ berührt wird.

Betrachtet man zwei Strahlen von Σ_μ, die auf einer $G_{(\mu\nu)}$ und $G'_{(\mu\nu)}$ liegen, so sind dieselben einander zugeordnet in Bezug auf das Nullsystem S_ν. Bei der Abbildung durch ein Nullsystem S_ν geht jedes Strahlensystem und die Brennfläche in sich selbst über.

Sucht man die Ordnungselemente der auf $G_{(\mu\nu)}$ von Strahlen des Systemes Σ_μ gebildeten Involution auf, so gehören diese den beiden Nullsystemen S_μ und S_ν an und bilden desshalb in ihrer Gesammtheit eine geradlinige Fläche vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden. Ein solches Ordnungselement auf $G_{(\mu\nu)}$ trifft die beiden mit ihm ein windschiefes Viereck bildenden Strahlen von Σ_ν in Punkten, in welchen letztere eine vierpunktige Berührung mit der Brennfläche eingehen. Der Ort der Punkte, in welchen Strahlen von Σ_ν die Brennfläche vierpunktig berühren, ist daher eine Raumcurve achter Ordnung, welche durch die 16 Knotenpunkte der Fläche geht und in ihnen diejenigen singulären Ebenen zu Schmiegungsebenen besitzt, welche den Punkten in dem Nullsysteme S_ν entsprechen*).

Die Curve achter Ordnung ist eine Ordnungscurve für das Nullsystem S_ν; die Tangenten derselben gehören zu Σ_ν und bilden eine abwickelbare Fläche achter Ordnung. Durch die Curve, welche eine ausgezeichnete Haupttangentencurve der Brennfläche ist, gehen fünf Regelflächen vierter Ordnung, welche von Strahlen der anderen Systeme gebildet werden.

---

*) Vergl. *Salmon-Fiedler,* Geometrie des Raumes II, 3. Aufl. S. 493.

§ 5.

Ebene Schnittcurve der Brennfläche.

Alle Strahlen eines Systems Σ_μ, welche in einer Geraden einer singulären Ebene eintreffen, bilden eine Regelfläche dritter Ordnung, deren Doppelgerade durch den der Ebene in S_μ entsprechenden singulären Punkt geht. Wir betrachten zwei solche Regelflächen; die eine F_1 sei gebildet aus Strahlen von Σ_1 mit einer in (12) beliebig gelegenen Leitgeraden, die andere F_2 sei gebildet aus Strahlen von Σ_2 mit einer in (0) beliebig gelegenen Leitlinie. Die Doppelgeraden der beiden Regelflächen gehen durch den Punkt (2). Wir werden zeigen, dass die beiden Flächen einen Kegelschnitt gemein haben.

Die Flächen F_1 und F_2 bringen wir zum Schnitt mit dem System der $G_{(12)}$, welche sämmtlich durch (2) gehen und deren Tangentialebenen in diesem Punkte, zu denen auch (12) und (0) gehören, eine Kegelfläche zweiter Ordnung berühren. Jede Tangentialebene des Kegels bestimmt eine $G_{(12)}$, welche die Schnittgeraden dieser Ebene mit (12) und (0) enthält. Eine Fläche $G_{(12)}$ trifft daher F_1 und F_2 in Erzeugenden, welche verschiedenen Schaaren von $G_{(12)}$ angehören, und deren gemeinsamer Punkt auf F_1 und F_2 liegt. Die Erzeugenden von F_1 und F_2 werden durch das System der $G_{(12)}$ projectivisch auf einander bezogen. Wir projiciren die Geraden von F_1 und F_2 aus den diesen angehörenden Doppelgeraden und erhalten so zwei projectivische Ebenenbüschel, welche eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit der Spitze (2) erzeugen. Diese Kegelfläche trifft F_1 und F_2 in einem diesen Flächen gemeinsamen Kegelschnitt.

Die doppelt unendlich vielen Kegelschnitte der Fläche F_1 werden durch die doppelt unendlich vielen Flächen F_2 ausgeschnitten. Durch einen solchen Kegelschnitt gehen sechs Flächen dritter Ordnung, die von den sechs Strahlensystemen gebildet werden, deren Doppelgeraden sämmtlich durch (2) *gehen und deren einfache Leitgeraden in den sechs durch* (2) *gehenden singulären Ebenen sich befinden.*

Dieser Satz folgt auch unmittelbar aus der *Reye*schen Herleitung.

Eine beliebige Ebene π schneidet die Brennfläche in einer Curve vierter Ordnung C_4. Die 28 Doppeltangenten derselben sind die 16 Geraden in den singulären Ebenen und die 12 Strahlen der sechs Systeme Σ_μ. Es lassen sich nun leicht 62 Gruppen von einfach unendlich vielen C_4 viermal berührenden Kegelschnitten angeben. — Die 63ste Gruppe wird durch die

Complexcurven derjenigen Complexe zweiten Grades gebildet, welche die Brennfläche zu ihrer Singularitätenfläche haben. Dreissig Gruppen, die einander paarweise zugeordnet sind, erhält man in den Schnitten der Ebene π mit den Flächen $G_{(\mu\nu)}$ und $G'_{(\mu\nu)}$.

Jeder Strahl von Σ_1 in π liegt in einer einfach unendlichen Schaar von Flächen F_1, deren Leitlinien in *einer* der singulären Ebenen sich befinden. Jede solche F_1 wird von π in einem solchen Kegelschnitte getroffen. Es entstehen so 32 einander paarweise zugeordneter Gruppen von Kegelschnitten. Die anderen Strahlensysteme liefern nach dem oben bewiesenen Satze keine neuen Gruppen. Jede der 30 ersten Gruppen von Kegelschnitten enthält sechs Linienpaare, von welchen zwei Paare aus Geraden zweier Strahlensysteme bestehen der Art, dass Strahlen verschiedener Systeme ein Paar bilden; die übrigen Geraden der Paare liegen in den singulären Ebenen. Die Flächen F_1, deren Leitgeraden in (12) einen Strahlenbüschel bilden, zerfallen fünfmal in eine Regelfläche zweiter Ordnung und eine durch (2) gehende singuläre Ebene; *eine* Fläche F_1 wird von π geschnitten in ihrer Leitgeraden und dem zweiten in π liegenden Strahle von Σ_1. Hieraus ergiebt sich der von Herrn *Geiser* bewiesene Satz*):

Greift man eine von den 63 Gruppen vierfach berührender Kegelschnitte einer C_4 heraus, so zerfallen die 62 übrigen in zwei wesentlich verschiedene Systeme; das eine besteht aus 32 Gruppen, von denen jede mit der fixirten Gruppe sechs Doppeltangenten gemein hat; das andere besteht aus 30 Gruppen, von denen jede mit der fixirten Gruppe vier Doppeltangenten gemein hat.

Die Eigenschaften der Flächensysteme F_μ und $G_{(\mu\nu)}$ geben Veranlassung zum Beweise vieler Sätze, welche sich auf die Berührungscurven einer C_4 beziehen, worauf wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

§ 6.

Schlussbemerkung.

Der Zusammenhang, welchen die in § 1 gegebene Construction von Σ_μ mit der *Reye*schen Herleitung hat, lässt sich nicht so unmittelbar übersehen, wie bei der Construction des Strahlensystems dritter Ordnung und zweiter Classe.

Den Flächen $G_{(12)}$ werden in dem Flächengebüsch des Herrn *Reye*

*) Dieses Journal, Bd. 72, S. 370 etc.

die durch die Punkte 1 und 2 gehenden Ebenen entsprechen; den Flächen $G'_{(12)}$ aber je zwei Kegelflächen mit den Mittelpunkten 1 und 2 und den Strahlen $\overline{13}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{16}$ resp. $\overline{23}$, $\overline{24}$, $\overline{25}$, $\overline{26}$, was sich mit Hülfe der dort erörterten Abbildung leicht zeigen lässt. Die zusammengehörenden Kegel 1 und 2 bilden entsprechende Elemente zweier projectivischen Kegelbüschel, in welchen die Ebenenpaare einander entsprechen, und deren Schnitt die Kernfläche des Gebüsches ist. Es lässt sich desshalb die Curve sechster Ordnung, welche die Kerncurve eines durch sieben Punkte bestimmten Flächennetzes ist, durch die Schnitte dreier projectivischen Kegelbüschel construiren.

Aachen, im April 1881.