Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen.

(Auszug eines Schreibens des Herrn *M. Nöther* in Erlangen an Herrn *L. Fuchs* in Heidelberg.)

Der von Ihnen erwähnte, von Herrn *Weierstrass* in seinen Vorlesungen behandelte Satz lautet: „dass es in der durch die algebraische *irreductible* Gleichung

$$(1.)\qquad f(s,z) = 0$$

definirten Functionsklasse, vom Geschlecht p, keine rationale Function von s, z giebt, welche in nur *einem*, aber *willkürlich* gewählten Punkte (s_0, z_0) unendlich wird in einer Ordnung $\mu < p+1$."

Zum Beweise benutze ich nur den bekannten Satz:

(A.) „μ ($< p+1$) Punkte von $f(s,z)=0$, in welchen eine rationale Function von s, z unendlich in der ersten Ordnung wird, sind durch eine oder mehrere Functionen φ verknüpft; und zwar — wenn die Function noch $q+1$ (homogen eingehende) Constanten hat, verschwinden *genau* $p+q-\mu$ linear von einander unabhängige Functionen φ in der Gruppe von μ Punkten."

Dieser von Herrn *Brill* und mir (Math. Ann. VII) als „*Riemann-Roch*scher Satz" bezeichnete Satz ist von uns für *alle* Fälle — auch wenn die μ Punkte beliebig zusammenrücken, wie im obigen Falle — streng bewiesen.

Eine rationale Function F von s, z, welche in μ ($< p+1$) Punkten α unendlich wird, lässt sich also immer in die Form setzen:

$$(2.)\qquad F = \frac{\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_q\varphi_q}{\varphi_0},$$

wo φ_0 in den Punkten α verschwindet, während $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_q$ die $q+1$ linear von einander unabhängigen Functionen φ sind, die in den übrigen $2p-2-\mu$ Nullpunkten von φ_0 ebenfalls zu Null werden.

Es möge nun φ_0 in nur *einem, willkürlich gewählten* Punkte α, aber in der μ^{ten} Ordnung, unendlich werden, *und sei* μ *die kleinste Zahl* ($< p+1$), *für welche solches bei* $f(s, z) = 0$ *möglich ist.*

Dann folgt zunächst, *dass* q *nur gleich Eins sein kann.*

Denn wäre $q > 1$, so könnte man dem Zähler von F die eine Bedingung vorschreiben, in α ebenfalls zu Null zu werden; und man hätte dann in F eine Function, welche sich nicht auf eine Constante reducirte, und welche in nur *einem,* willkürlich gewählten Punkte α, in der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, unendlich würde. Dies existirt nicht nach der Annahme über μ. — Wäre aber $q < 1$, so würde F eine Constante. Also bleibt nur $q = 1$, oder:

$$(2'.)\qquad F = \frac{\alpha_0\varphi_0+\alpha_1\varphi_1}{\varphi_0}.$$

Nach Satz (A.) ergiebt sich hieraus, dass im Punkte α genau $p-\mu+1$ linear von einander unabhängige Functionen φ in der μ^{ten} Ordnung verschwinden; was also für die ganze Schaar der Functionen φ — oder

$$(3.)\qquad \Phi \equiv \beta_1\Phi_1+\beta_2\Phi_2+\cdots+\beta_p\Phi_p \text{ —}$$

nur $\mu-1$ von einander unabhängige lineare Bedingungen bedeutet.

Diese Bedingungen für Φ, in α in der μ^{ten} Ordnung zu verschwinden, schreiben sich

$$(4.)\quad \begin{cases} 1')\ \Phi_{(0)} = 0,\ 2')\ \Phi_{(0)}+(d\Phi)_{(0)} = 0,\ 3')\ \Phi_{(0)}+2(d\Phi)_{(0)}+(d^2\Phi)_{(0)} = 0, \ldots \\ \qquad\qquad \mu')\ \Phi_{(0)}+(\mu-1)(d\Phi)_{(0)}+\cdots+(d^{\mu-1}\Phi)_{(0)} = 0, \end{cases}$$

wo der Index (0) sich auf die Werthe (s_0, z_0) von α bezieht. Die Differentialquotienten $\left(\frac{ds}{dz}\right)_{(0)}$, $\left(\frac{d^2s}{dz^2}\right)_{(0)}$, ... sind natürlich aus $f(s, z) = 0$ zu entnehmen.

Diese μ Gleichungen $1')$, $2')$, ..., $\mu')$ stellen $\mu-1$ Bedingungen vor; und *ebensoviele von einander unabhängige Bedingungen sind schon in den* $\mu-1$ *ersten* $1')$, $2')$, ..., $(\mu-1)')$ *enthalten.* Denn sind nur diese $\mu-1$ Gleichungen, d. h.

$$(5.)\qquad \Phi_{(0)} = 0,\ \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{(0)} = 0,\ \ldots\ \left(\frac{d^{\mu-2}\Phi}{dz^{\mu-2}}\right)_{(0)} = 0$$

erfüllt, und wären das *weniger* als $\mu-1$ unabhängige Bedingungen, so würden in α mehr als $p-\mu+1$ linear von einander unabhängige Functionen φ in der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden, und man erhielte nach Satz (A.) eine Function mit zwei oder mehr Constanten, welche in α in der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich würde und sonst nicht; — was wieder wegen der Annahme über μ unmöglich ist. Also:

Die $\mu-1$ ersten der μ Gleichungen $1'$), $2'$), ..., μ') *sind von einander unabhängig, und aus ihnen folgt die μ^{te} Gleichung μ') von selbst.*

In unserer Betrachtung war, nach Voraussetzung, α ein *beliebiger* Punkt von $f(s, z) = 0$. Sie gilt also auch, wenn man α *beliebig variirt.* D. h., indem man das zuletzt Bewiesene auf einen α benachbarten Punkt anwendet:

Die μ Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} 2') \quad \Phi_{(0)} + (d\Phi)_{(0)} = 0, \quad 3') \quad \Phi_{(0)} + 2(d\Phi)_{(0)} + (d^2\Phi)_{(0)} = 0, \quad \dots \\ \mu') \quad \Phi_{(0)} + (\mu-1)(d\Phi)_{(0)} + \dots + (d^{\mu-1}\Phi)_{(0)} = 0, \\ (\mu+1)') \quad \Phi_{(0)} + \mu(d\Phi)_{(0)} + \dots + (d^\mu\Phi)_{(0)} = 0 \end{cases}$$

haben ebenfalls die Eigenschaft, nur $\mu-1$ von einander unabhängige lineare Bedingungen für Φ vorzustellen, und aus den $\mu-1$ ersten derselben, *welche von einander unabhängig werden,* folgt die letzte von selbst.

Da hiernach auch $2'$), $3'$), ..., μ') $\mu-1$ von einander unabhängige lineare Gleichungen vorstellen, folgt im System (4.) auch die erste $1'$) aus ihnen; und man findet:

Sobald

$$(\Phi)_{(0)} = 0, \; \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{(0)} = 0, \; \dots \; \left(\frac{d^{\mu-2}\Phi}{dz^{\mu-2}}\right)_{(0)} = 0,$$

wird auch

$$\left(\frac{d^{\mu-1}\Phi}{dz^{\mu-1}}\right)_{(0)} = 0, \; \left(\frac{d^{\mu}\Phi}{dz^{\mu}}\right)_{(0)} = 0.$$

Variirt man nochmals, so folgt aus (6.) ebenso, dass dann auch nothwendig $\left(\frac{d^{\mu+1}\Phi}{dz^{\mu+1}}\right)_{(0)} = 0$ werden muss, etc., d. h. es verschwinden dann *alle* Differentialquotienten von Φ bis zu beliebig hoher Ordnung hin. Dies würde aber aussagen, dass $f(s, z) = 0$ *reductibel* wäre — ein Fall, der ausgeschlossen ist.

Demnach ist die Annahme $\mu < p+1$ überhaupt unmöglich, q. e. d.

Wiesbaden, October 1881.
