

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1882

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0092

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0092](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0092)

**LOG Id:** LOG\_0011

**LOG Titel:** Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen. (Auszug eines Schreibens des Herrn M. Nöther aus Erlangen an Herrn L. Fuchs in Heidelberg.).

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen.

(Auszug eines Schreibens des Herrn *M. Nöther* in Erlangen an Herrn *L. Fuchs* in Heidelberg.)

---

Der von Ihnen erwähnte, von Herrn *Weierstrass* in seinen Vorlesungen behandelte Satz lautet: „dass es in der durch die algebraische *irreductible* Gleichung

$$(1.) \quad f(s, z) = 0$$

definirten Functionsklasse, vom Geschlecht  $p$ , keine rationale Function von  $s, z$  giebt, welche in nur *einem*, aber *willkürlich* gewählten Punkte  $(s_0, z_0)$  unendlich wird in einer Ordnung  $\mu < p+1$ .“

Zum Beweise benutze ich nur den bekannten Satz:

(A.) „ $\mu$  ( $< p+1$ ) Punkte von  $f(s, z) = 0$ , in welchen eine rationale Function von  $s, z$  unendlich in der ersten Ordnung wird, sind durch eine oder mehrere Functionen  $\varphi$  verknüpft; und zwar — wenn die Function noch  $q+1$  (homogen eingehende) Constanten hat, verschwinden *genau*  $p+q-\mu$  linear von einander unabhängige Functionen  $\varphi$  in der Gruppe von  $\mu$  Punkten.“

Dieser von Herrn *Brill* und mir (Math. Ann. VII) als „*Riemann-Rochscher* Satz“ bezeichnete Satz ist von uns für *alle* Fälle — auch wenn die  $\mu$  Punkte beliebig zusammenrücken, wie im obigen Falle — streng bewiesen.

Eine rationale Function  $F$  von  $s, z$ , welche in  $\mu$  ( $< p+1$ ) Punkten  $\alpha$  unendlich wird, lässt sich also immer in die Form setzen:

$$(2.) \quad F = \frac{\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_q \varphi_q}{\varphi_0},$$

wo  $\varphi_0$  in den Punkten  $\alpha$  verschwindet, während  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q$  die  $q+1$  linear von einander unabhängigen Functionen  $\varphi$  sind, die in den übrigen  $2p-2-\mu$  Nullpunkten von  $\varphi_0$  ebenfalls zu Null werden.

Es möge nun  $\varphi_0$  in nur *einem*, willkürlich gewählten Punkte  $\alpha$ , aber in der  $\mu^{\text{ten}}$  Ordnung, unendlich werden, und sei  $\mu$  die kleinste Zahl ( $< p+1$ ), für welche solches bei  $f(s, z) = 0$  möglich ist.

Dann folgt zunächst, dass  $q$  nur gleich Eins sein kann.

Denn wäre  $q > 1$ , so könnte man dem Zähler von  $F$  die eine Bedingung vorschreiben, in  $\alpha$  ebenfalls zu Null zu werden; und man hätte dann in  $F$  eine Function, welche sich nicht auf eine Constante reducirte, und welche in nur *einem*, willkürlich gewählten Punkte  $\alpha$ , in der  $(\mu-1)^{\text{ten}}$  Ordnung, unendlich würde. Dies existirt nicht nach der Annahme über  $\mu$ . — Wäre aber  $q < 1$ , so würde  $F$  eine Constante. Also bleibt nur  $q=1$ , oder:

$$(2'.) \quad F = \frac{\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1}{\varphi_0}.$$

Nach Satz (A.) ergibt sich hieraus, dass im Punkte  $\alpha$  genau  $p-\mu+1$  linear von einander unabhängige Functionen  $\varphi$  in der  $\mu^{\text{ten}}$  Ordnung verschwinden; was also für die ganze Schaar der Functionen  $\varphi$  — oder

$$(3.) \quad \Phi \equiv \beta_1 \Phi_1 + \beta_2 \Phi_2 + \dots + \beta_p \Phi_p -$$

nur  $\mu-1$  von einander unabhängige lineare Bedingungen bedeutet.

Diese Bedingungen für  $\Phi$ , in  $\alpha$  in der  $\mu^{\text{ten}}$  Ordnung zu verschwinden, schreiben sich

$$(4.) \quad \begin{cases} 1') \Phi_{(0)} = 0, & 2') \Phi_{(0)} + (d\Phi)_{(0)} = 0, & 3') \Phi_{(0)} + 2(d\Phi)_{(0)} + (d^2\Phi)_{(0)} = 0, \dots \\ \mu') \Phi_{(0)} + (\mu-1)(d\Phi)_{(0)} + \dots + (d^{\mu-1}\Phi)_{(0)} = 0, \end{cases}$$

wo der Index (0) sich auf die Werthe  $(s_0, z_0)$  von  $\alpha$  bezieht. Die Differentialquotienten  $\left(\frac{ds}{dz}\right)_{(0)}$ ,  $\left(\frac{d^2s}{dz^2}\right)_{(0)}$ , ... sind natürlich aus  $f(s, z) = 0$  zu entnehmen.

Diese  $\mu$  Gleichungen 1'), 2'), ...,  $\mu'$ ) stellen  $\mu-1$  Bedingungen vor; und *ebensoviele von einander unabhängige Bedingungen sind schon in den  $\mu-1$  ersten 1'), 2'), ...,  $(\mu-1)'$ ) enthalten*. Denn sind nur diese  $\mu-1$  Gleichungen, d. h.

$$(5.) \quad \Phi_{(0)} = 0, \quad \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{(0)} = 0, \quad \dots \quad \left(\frac{d^{\mu-2}\Phi}{dz^{\mu-2}}\right)_{(0)} = 0$$

erfüllt, und wären das *weniger* als  $\mu-1$  unabhängige Bedingungen, so würden in  $\alpha$  mehr als  $p-\mu+1$  linear von einander unabhängige Functionen  $\varphi$  in der  $(\mu-1)^{\text{ten}}$  Ordnung verschwinden, und man erhielte nach Satz (A.) eine Function mit zwei oder mehr Constanten, welche in  $\alpha$  in

der  $(\mu - 1)^{\text{ten}}$  Ordnung unendlich würde und sonst nicht; — was wieder wegen der Annahme über  $\mu$  unmöglich ist. Also:

Die  $\mu - 1$  ersten der  $\mu$  Gleichungen 1'), 2'), ...,  $\mu'$ ) sind von einander unabhängig, und aus ihnen folgt die  $\mu^{\text{te}}$  Gleichung  $\mu'$ ) von selbst.

In unserer Betrachtung war, nach Voraussetzung,  $\alpha$  ein beliebiger Punkt von  $f(s, z) = 0$ . Sie gilt also auch, wenn man  $\alpha$  beliebig variirt. D. h., indem man das zuletzt Bewiesene auf einen  $\alpha$  benachbarten Punkt anwendet:

Die  $\mu$  Gleichungen

$$(6.) \quad \begin{cases} 2') \quad \Phi_{(\omega)} + (d\Phi)_{(\omega)} = 0, & 3') \quad \Phi_{(\omega)} + 2(d\Phi)_{(\omega)} + (d^2\Phi)_{(\omega)} = 0, \quad \dots \\ \mu') \quad \Phi_{(\omega)} + (\mu - 1)(d\Phi)_{(\omega)} + \dots + (d^{\mu-1}\Phi)_{(\omega)} = 0, \\ (\mu + 1') \quad \Phi_{(\omega)} + \mu(d\Phi)_{(\omega)} + \dots + (d^{\mu}\Phi)_{(\omega)} = 0 \end{cases}$$

haben ebenfalls die Eigenschaft, nur  $\mu - 1$  von einander unabhängige lineare Bedingungen für  $\Phi$  vorzustellen, und aus den  $\mu - 1$  ersten derselben, welche von einander unabhängig werden, folgt die letzte von selbst.

Da hiernach auch 2'), 3'), ...,  $\mu'$ )  $\mu - 1$  von einander unabhängige lineare Gleichungen vorstellen, folgt im System (4.) auch die erste 1') aus ihnen; und man findet:

Sobald

$$(\Phi)_{(\omega)} = 0, \quad \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{(\omega)} = 0, \quad \dots \quad \left(\frac{d^{\mu-2}\Phi}{dz^{\mu-2}}\right)_{(\omega)} = 0,$$

wird auch

$$\left(\frac{d^{\mu-1}\Phi}{dz^{\mu-1}}\right)_{(\omega)} = 0, \quad \left(\frac{d^{\mu}\Phi}{dz^{\mu}}\right)_{(\omega)} = 0.$$

Variirt man nochmals, so folgt aus (6.) ebenso, dass dann auch nothwendig  $\left(\frac{d^{\mu+1}\Phi}{dz^{\mu+1}}\right)_{(\omega)} = 0$  werden muss, etc., d. h. es verschwinden dann alle Differentialquotienten von  $\Phi$  bis zu beliebig hoher Ordnung hin. Dies würde aber aussagen, dass  $f(s, z) = 0$  reductibel wäre — ein Fall, der ausgeschlossen ist.

Demnach ist die Annahme  $\mu < p + 1$  überhaupt unmöglich, q. e. d.  
Wiesbaden, October 1881.