Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1882
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0092
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0092

LOG Id: LOG_0012
LOG Titel: Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Eugen Hunyady* in Budapest.)

Die Gleichung des im Titel angeführten Ortes lässt sich nach Herrn *Cayley*, Comptes rendus der Pariser Akademie (1861, I. p. 1216), wie folgt schreiben:

$$(1.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & p_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & x_1p_1 & y_1z_1 & y_1p_1 & z_1p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & p_6^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & x_6p_6 & y_6z_6 & y_6p_6 & z_6p_6 \\ 2x & 0 & 0 & 0 & y & z & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 & x & 0 & 0 & z & p & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 & x & 0 & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

wenn x, y, z, p die Coordinaten der Kegelspitzen und

$$x_1,\quad y_1,\quad z_1,\quad p_1,\quad \dots\quad x_6,\quad y_6,\quad z_6,\quad p_6$$

die der sechs gegebenen Punkte bedeuten. Die Gleichung desselben Ortes findet man bei *Hierholzer* (Ueber Kegelschnitte im Raume, *Clebsch* und *Neumann*, Math. Annalen Bd. II, p. 582) unter Benutzung der Bezeichnung

$$(a.)\qquad (ikl0)$$

für die Determinante:

$$|x_\alpha,\quad y_\alpha,\quad z_\alpha,\quad p_\alpha| \qquad (\alpha = i, k, l, 0)$$

in folgender Form angegeben:

$$(2.)\qquad (1230)(2560)(1450)(3460) - (4560)(1340)(2360)(1250) = 0.$$

Der Gegenstand der folgenden Zeilen ist die algebraische Ableitung der Gleichung (2.) aus der Gleichung (1.), die ich mir hier mitzutheilen erlaube.

1. Unter Beibehaltung der Eingangs der Abhandlung „Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades" (d. J. Bd. 89, p. 47) gewählten Bezeichnungen, bemerken wir in erster Reihe, dass die Ableitung der Gleichung (2.) aus der Gleichung (1.) auf die Transformation der Determinante $\varDelta$ in die linke Seite der Gleichung (2.) hinauskommt; um aber diese Transformation bewirken zu können, erachten wir die Ableitung einer dabei in Anwendung kommenden Determinantengleichung für nothwendig.

Man hat zunächst die folgende identische Gleichung:

$$(3.)\quad |x_i x_k \quad y_i y_k \quad z_i z_k \quad x_i y_k + x_k y_i \quad x_i z_k + x_k z_i \quad y_i z_k + y_k z_i| = \pi_{234}.\pi_{341}.\pi_{412}.\pi_{123}$$
$$(i,k = 2,3;\ 3,4;\ 1,4;\ 1,2;\ 1,3;\ 2,4).$$

Ersetzt man ferner in dieser Gleichung die Grössen:

$$(b.)\quad \begin{cases} x_1, & y_1, & z_1; \\ x_2, & y_2, & z_2; \\ x_3, & y_3, & z_3; \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{cases}$$

durch die folgenden:

$$(c.)\quad \begin{cases} \xi_{230}, & \eta_{230}, & \zeta_{230}; \\ \xi_{340}, & \eta_{340}, & \zeta_{340}; \\ \xi_{450}, & \eta_{450}, & \zeta_{450}; \\ \xi_{520}, & \eta_{520}, & \zeta_{520}, \end{cases}$$

so reduciren sich die in der Gleichung (3.) rechts stehenden Factoren; z. B. geht π_{234} in Folge der erwähnten Substitutionen über in die Determinante

$$-\begin{vmatrix} \xi_{340} & \eta_{340} & \zeta_{340} \\ \xi_{450} & \eta_{450} & \zeta_{450} \\ \xi_{520} & \eta_{520} & \zeta_{520} \end{vmatrix},$$

die man noch wie folgt schreiben kann:

$$-\begin{vmatrix} \xi_{340} & \eta_{340} & \zeta_{340} & \pi_{340} \\ \xi_{450} & \eta_{450} & \zeta_{450} & \pi_{450} \\ \xi_{520} & \eta_{520} & \zeta_{520} & \pi_{520} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

welche schliesslich nach Multiplication mit (0345) gleich

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (3450) \\ 0 & (3450) & 0 & 0 \\ 0 & (2350) & (2450) & 0 \\ p & p_3 & p_4 & p_5 \end{vmatrix} = p\,(3450)^2(2450)$$

ist; man erhält also nach Hinweglassung der gleichen Factoren für π_{234} den Werth:

$$-p(2450)(3450).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich auch die Werthe von π_{341}, π_{412}, π_{123}, indem man für dieselben der Reihe nach die folgenden Werthe erhält:

$$p(2350)(2450),$$
$$-p(2340)(2350),$$
$$p(2340)(3450).$$

Es ergiebt sich also aus (3.) nach Substitution der Grössen (*c.*) für die von (*b.*) die folgende identische Gleichung:

$$(4.)\quad \begin{cases} |\xi_{ik0}\xi_{lm0} \quad \eta_{ik0}\eta_{lm0} \quad \zeta_{ik0}\zeta_{lm0} \quad \xi_{ik0}\eta_{lm0}+\xi_{lm0}\eta_{ik0} \quad \xi_{ik0}\zeta_{lm0}+\xi_{lm0}\zeta_{ik0} \quad \eta_{ik0}\zeta_{lm0}+\eta_{lm0}\zeta_{ik0}| \\ \qquad = p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2 \\ \qquad (ik, lm = 34,45;\ 45,52;\ 52,23;\ 23,34;\ 23,45;\ 34,52). \end{cases}$$

2. Mit Berücksichtigung der Gleichung (4.) multipliciren wir nun die Determinante $\varDelta$ mit folgender Determinante zehnten Grades, deren erste sechs Zeilen aus

$$\xi_{ik0}\xi_{lm0},\quad \eta_{ik0}\eta_{lm0},\quad \zeta_{ik0}\zeta_{lm0},\quad \pi_{ik0}\pi_{lm0},\quad \xi_{ik0}\eta_{lm0}+\xi_{lm0}\eta_{ik0},\quad \xi_{ik0}\zeta_{lm0}+\xi_{lm0}\zeta_{ik0},$$
$$\xi_{ik0}\pi_{lm0}+\xi_{lm0}\pi_{ik0},\quad \eta_{ik0}\zeta_{lm0}+\eta_{lm0}\zeta_{ik0},\quad \eta_{ik0}\pi_{lm0}+\eta_{lm0}\pi_{ik0},\quad \zeta_{ik0}\pi_{lm0}+\zeta_{lm0}\pi_{ik0}$$

abgeleitet werden, indem man für *ik, lm* dieselben Werthe wie in (4.) setzt. Die Elemente der letzten vier Zeilen sind hingegen sämmtlich Null, mit Ausnahme von 7, 7; 8, 9; 9, 10 und 10, 4*), die alle gleich Eins sind. Der Werth dieser Determinante ist nach (4.) gleich

$$-p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2.$$

Das Resultat der Multiplication ergiebt sich dann nach einigen leichten Reductionen in folgender Form:

$$2p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2.\begin{vmatrix} (2360)(4560) & (3460)(2560) \\ (1230)(1450) & (1340)(1250) \end{vmatrix},$$

so dass man nach Hinweglassung der gleichen Factoren schliesslich

$$(5.)\qquad \varDelta = 2\{(1230)(2560)(1450)(3460)-(4560)(1340)(2360)(1250)\}$$

erhält, woraus der Zusammenhang von $\varDelta$ und des ersten Gliedes der Gleichung (2.) hervorgeht, und zu ersehen ist, wie die Gleichung (2.) aus (1.) algebraisch abgeleitet werden kann.

---

*) Es ist unter *i, k* das Element der i^{ten} Zeile und k^{ten} Colonne zu verstehen.

Budapest, den 28. December 1881.