

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1882

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0092

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0092

LOG Id: LOG_0012

LOG Titel: Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber den geometrischen Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelflächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Eugen Hunyady* in Budapest.)

Die Gleichung des im Titel angeführten Ortes lässt sich nach Herrn *Cayley*, Comptes rendus der Pariser Akademie (1861, I. p. 1216), wie folgt schreiben:

$$(1.) \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & p_1^2 & x_1 y_1 & x_1 z_1 & x_1 p_1 & y_1 z_1 & y_1 p_1 & z_1 p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & p_6^2 & x_6 y_6 & x_6 z_6 & x_6 p_6 & y_6 z_6 & y_6 p_6 & z_6 p_6 \\ 2x & 0 & 0 & 0 & y & z & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 & x & 0 & 0 & z & p & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 0 & x & 0 & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

wenn x, y, z, p die Coordinaten der Kegelspitzen und

$$x_1, y_1, z_1, p_1, \dots, x_6, y_6, z_6, p_6$$

die der sechs gegebenen Punkte bedeuten. Die Gleichung desselben Ortes findet man bei *Hierholzer* (Ueber Kegelschnitte im Raume, *Clebsch* und *Neumann*, Math. Annalen Bd. II, p. 582) unter Benutzung der Bezeichnung

$$(a.) \quad (ikl0)$$

für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha & p_\alpha \end{vmatrix} \quad (\alpha = i, k, l, 0)$$

in folgender Form angegeben:

$$(2.) \quad (1230)(2560)(1450)(3460) - (4560)(1340)(2360)(1250) = 0.$$

Der Gegenstand der folgenden Zeilen ist die algebraische Ableitung der Gleichung (2.) aus der Gleichung (1.), die ich mir hier mitzuthellen erlaube.

1. Unter Beibehaltung der Eingangs der Abhandlung „Beitrag zur Theorie der Flächen zweiten Grades“ (d. J. Bd. 89, p. 47) gewählten Bezeichnungen, bemerken wir in erster Reihe, dass die Ableitung der Gleichung (2.) aus der Gleichung (1.) auf die Transformation der Determinante Δ in die linke Seite der Gleichung (2.) hinauskommt; um aber diese Transformation bewirken zu können, erachten wir die Ableitung einer dabei in Anwendung kommenden Determinantengleichung für nothwendig.

Man hat zunächst die folgende identische Gleichung:

$$(3.) \quad |x_i x_k \quad y_i y_k \quad z_i z_k \quad x_i y_k + x_k y_i \quad x_i z_k + x_k z_i \quad y_i z_k + y_k z_i| = \pi_{234} \cdot \pi_{341} \cdot \pi_{412} \cdot \pi_{123}$$

($i, k = 2, 3; 3, 4; 1, 4; 1, 2; 1, 3; 2, 4$).

Ersetzt man ferner in dieser Gleichung die Grössen:

$$(b.) \quad \begin{cases} x_1, & y_1, & z_1; \\ x_2, & y_2, & z_2; \\ x_3, & y_3, & z_3; \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{cases}$$

durch die folgenden:

$$(c.) \quad \begin{cases} \xi_{230}, & \eta_{230}, & \zeta_{230}; \\ \xi_{340}, & \eta_{340}, & \zeta_{340}; \\ \xi_{450}, & \eta_{450}, & \zeta_{450}; \\ \xi_{520}, & \eta_{520}, & \zeta_{520}, \end{cases}$$

so reduciren sich die in der Gleichung (3.) rechts stehenden Factoren; z. B. geht π_{234} in Folge der erwähnten Substitutionen über in die Determinante

$$- \begin{vmatrix} \xi_{340} & \eta_{340} & \zeta_{340} \\ \xi_{450} & \eta_{450} & \zeta_{450} \\ \xi_{520} & \eta_{520} & \zeta_{520} \end{vmatrix},$$

die man noch wie folgt schreiben kann:

$$- \begin{vmatrix} \xi_{340} & \eta_{340} & \zeta_{340} & \pi_{340} \\ \xi_{450} & \eta_{450} & \zeta_{450} & \pi_{450} \\ \xi_{520} & \eta_{520} & \zeta_{520} & \pi_{520} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

welche schliesslich nach Multiplication mit (0345) gleich

$$- \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (3450) \\ 0 & (3450) & 0 & 0 \\ 0 & (2350) & (2450) & 0 \\ p & p_3 & p_4 & p_5 \end{vmatrix} = p (3450)^2 (2450)$$

ist; man erhält also nach Hinweglassung der gleichen Factoren für π_{234} den Werth:

$$-p(2450)(3450).$$

In ähnlicher Weise ergeben sich auch die Werthe von π_{341} , π_{412} , π_{123} , indem man für dieselben der Reihe nach die folgenden Werthe erhält:

$$\begin{aligned} & p(2350)(2450), \\ & -p(2340)(2350), \\ & p(2340)(3450). \end{aligned}$$

Es ergibt sich also aus (3.) nach Substitution der Grössen (c.) für die von (b.) die folgende identische Gleichung:

$$(4.) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\xi_{ik0}\xi_{lm0} \eta_{ik0}\eta_{lm0} \zeta_{ik0}\zeta_{lm0} \xi_{ik0}\eta_{lm0} + \xi_{lm0}\eta_{ik0} \xi_{ik0}\zeta_{lm0} + \xi_{lm0}\zeta_{ik0} \eta_{ik0}\zeta_{lm0} + \eta_{lm0}\zeta_{ik0}| \\ = p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2 \\ (ik,lm = 34,45; 45,52; 52,23; 23,34; 23,45; 34,52). \end{array} \right.$$

2. Mit Berücksichtigung der Gleichung (4.) multipliciren wir nun die Determinante \mathcal{A} mit folgender Determinante zehnten Grades, deren erste sechs Zeilen aus

$$\begin{aligned} & \xi_{ik0}\xi_{lm0}, \quad \eta_{ik0}\eta_{lm0}, \quad \zeta_{ik0}\zeta_{lm0}, \quad \pi_{ik0}\pi_{lm0}, \quad \xi_{ik0}\eta_{lm0} + \xi_{lm0}\eta_{ik0}, \quad \xi_{ik0}\zeta_{lm0} + \xi_{lm0}\zeta_{ik0}, \\ & \xi_{ik0}\pi_{lm0} + \xi_{lm0}\pi_{ik0}, \quad \eta_{ik0}\zeta_{lm0} + \eta_{lm0}\zeta_{ik0}, \quad \eta_{ik0}\pi_{lm0} + \eta_{lm0}\pi_{ik0}, \quad \zeta_{ik0}\pi_{lm0} + \zeta_{lm0}\pi_{ik0} \end{aligned}$$

abgeleitet werden, indem man für ik , lm dieselben Werthe wie in (4.) setzt. Die Elemente der letzten vier Zeilen sind hingegen sämmtlich Null, mit Ausnahme von 7, 7; 8, 9; 9, 10 und 10, 4*), die alle gleich Eins sind. Der Werth dieser Determinante ist nach (4.) gleich

$$-p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2.$$

Das Resultat der Multiplication ergibt sich dann nach einigen leichten Reductionen in folgender Form:

$$2p^4(2340)^2(2350)^2(2450)^2(3450)^2 \cdot \begin{vmatrix} (2360)(4560) & (3460)(2560) \\ (1230)(1450) & (1340)(1250) \end{vmatrix},$$

so dass man nach Hinweglassung der gleichen Factoren schliesslich

(5.) $\mathcal{A} = 2 |(1230)(2560)(1450)(3460) - (4560)(1340)(2360)(1250)|$ erhält, woraus der Zusammenhang von \mathcal{A} und des ersten Gliedes der Gleichung (2.) hervorgeht, und zu ersehen ist, wie die Gleichung (2.) aus (1.) algebraisch abgeleitet werden kann.

*) Es ist unter i , k das Element der i^{ten} Zeile und k^{ten} Colonne zu verstehen.