Zusatz zur Abhandlung: Ueber die verschiedenen Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen.

(Dieses Journal, Band 83, Seite 76.)

(Von Herrn *Eugen Hunyady* in Budapest.)

Indem ich mir erlaube, nochmals auf diesen Gegenstand zurückzukommen, beabsichtige ich die a. a. O. angegebenen Gleichungen (1.)—(15.) aus der folgenden:

$$(1.)\qquad D = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3 z_3 & x_3 z_3 & x_3 y_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4 z_4 & x_4 z_4 & x_4 y_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & x_5 z_5 & x_5 y_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & x_6 z_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0$$

abzuleiten.

1. Mit Beibehaltung der a. a. O. eingeführten Bezeichnungen, soll ferner noch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \xi_{kl}\,\xi_{lm} & \eta_{kl}\,\eta_{lm} & \zeta_{kl}\,\zeta_{lm} & \eta_{kl}\,\zeta_{lm}+\eta_{lm}\,\zeta_{kl} & \zeta_{kl}\,\xi_{lm}+\zeta_{lm}\,\xi_{kl} & \xi_{kl}\,\eta_{lm}+\xi_{lm}\,\eta_{kl} \\ \xi_{lm}\,\xi_{mi} & - & - & \eta_{lm}\,\zeta_{mi}+\eta_{mi}\,\zeta_{lm} & - & - \\ \xi_{mi}\,\xi_{ik} & - & - & \eta_{mi}\,\zeta_{ik}+\eta_{ik}\,\zeta_{mi} & - & - \\ \xi_{ik}\,\xi_{kl} & - & - & \eta_{ik}\,\zeta_{kl}+\eta_{kl}\,\zeta_{ik} & - & - \\ \xi_{ik}\,\xi_{lm} & - & - & \eta_{ik}\,\zeta_{lm}+\eta_{lm}\,\zeta_{ik} & - & - \\ \xi_{kl}\,\xi_{mi} & - & - & \eta_{kl}\,\zeta_{mi}+\eta_{mi}\,\zeta_{kl} & - & - \end{vmatrix}$$

durch:

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} kl, & lm \\ lm, & mi \\ mi, & ik \\ ik, & kl \\ ik, & lm \\ kl, & mi \end{vmatrix}$$

bezeichnet werden.

Da ferner im Laufe des hier Folgenden die Determinante D mit der Determinante (2.) ähnlichen Determinanten multiplicirt wird, so wollen wir das Product der h^{ten} Zeile in D mit einer beliebigen Zeile in (2.), welche die folgende sei:

$$\xi_{pq}\xi_{rs},\quad \eta_{pq}\eta_{rs},\quad \zeta_{pq}\zeta_{rs},\quad \eta_{pq}\zeta_{rs}+\eta_{rs}\zeta_{pq},\quad \zeta_{pq}\xi_{rs}+\zeta_{rs}\xi_{pq},\quad \xi_{pq}\eta_{rs}+\xi_{rs}\eta_{pq},$$

hier darstellen, indem wir für dasselbe finden:

$$(3.)\quad \begin{cases} x_h^2\xi_{pq}\xi_{rs}+y_h^2\eta_{pq}\eta_{rs}+z_h^2\zeta_{pq}\zeta_{rs}+y_h z_h(\eta_{pq}\zeta_{rs}+\eta_{rs}\zeta_{pq})+x_h z_h(\zeta_{pq}\xi_{rs}+\zeta_{rs}\xi_{pq}) \\ +x_h y_h(\xi_{pq}\eta_{rs}+\xi_{rs}\eta_{pq}) = (x_h\xi_{pq}+y_h\eta_{pq}+z_h\zeta_{pq})(x_h\xi_{rs}+y_h\eta_{rs}+z_h\zeta_{rs}) \\ \qquad = (hpq)(hrs). \end{cases}$$

2. Die Determinante (2.) erhalten wir in einer andern Form, wenn wir von Gleichung (3.) der vorhergehenden Note ausgehend, die drei letzten Colonnen derselben unserem Zweck entsprechend unter einander vertauschen und die Grössen

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1; \\ x_2, & y_2, & z_2; \\ x_3, & y_3, & z_3; \\ x_4, & y_4, & z_4 \end{matrix}$$

durch die folgenden:

$$\begin{matrix} \xi_{ik}, & \eta_{ik}, & \zeta_{ik}; \\ \xi_{kl}, & \eta_{kl}, & \zeta_{kl}; \\ \xi_{lm}, & \eta_{lm}, & \zeta_{lm}; \\ \xi_{mi}, & \eta_{mi}, & \zeta_{mi} \end{matrix}$$

ersetzen; es ergiebt sich dann für (2.) der Werth:

$$(kl,\ lm,\ mi)(lm,\ mi,\ ik)(mi,\ ik,\ kl)(ik,\ kl,\ lm),$$

wobei unter (kl, lm, mi) die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_{kl}, & \eta_{kl}, & \zeta_{kl} \\ \xi_{lm}, & \eta_{lm}, & \zeta_{lm} \\ \xi_{mi}, & \eta_{mi}, & \zeta_{mi} \end{vmatrix}$$

etc. etc. zu verstehen ist. Da man ferner leicht findet, dass

$$\begin{aligned} (kl,\ lm,\ mi) &= (klm)(lmi), \\ (lm,\ mi,\ ik) &= (lmi)(mik), \\ (mi,\ ik,\ kl) &= (mik)(ikl), \\ (ik,\ kl,\ lm) &= (ikl)(klm), \end{aligned}$$

so hat man schliesslich:

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} kl, & lm \\ lm, & mi \\ mi, & ik \\ ik, & kl \\ ik, & lm \\ kl, & mi \end{vmatrix} = (klm)^2(lmi)^2(mik)^2(ikl)^2.$$

Mit Hülfe dieser Identität bestimmt sich der Werth der einer beliebigen quaternären Zahlencombination von 1, ... 6 entsprechenden Determinante (2.).

3. Es ist a. a. O. (S. 78) hervorgehoben worden, dass von den durch die Punkte 1, ... 6 bestimmten fünfundvierzig einfachen Vierecken, je drei auf ein und dieselbe *Pappus-Desargues-Chasles*sche Gleichung führen, und es finden sich, hierauf Bezug nehmend, daselbst die fünfundvierzig Vierecke in fünfzehn Gruppen zu dreien zusammengestellt vor.

Einem jeden der fünfundvierzig Vierecke entspricht eine der Determinante (2.) ähnliche Determinante, so z. B. entsprechen den a. a. O. unter I. (S. 78) angeführten Vierecken:

$$3546, \quad 1625, \quad 1324$$

die folgenden Determinanten:

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} 54, & 46 \\ 46, & 63 \\ 63, & 35 \\ 35, & 54 \\ 35, & 46 \\ 54, & 63 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 62, & 25 \\ 25, & 51 \\ 51, & 16 \\ 16, & 62 \\ 16, & 25 \\ 62, & 51 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 32, & 24 \\ 24, & 41 \\ 41, & 13 \\ 13, & 32 \\ 13, & 24 \\ 32, & 41 \end{vmatrix}.$$

4. Die Ableitung der a. a. O. unter (1.)—(15.) vorkommenden *Pappus-Desargues-Chasles*schen Gleichungen aus (1.) ist identisch mit der folgenden Aufgabe: Mit welchen Factoren ist die Determinante D zu multipliciren, um ihr der Reihe nach die Formen zu geben, wie diese in den ersten Gliedern der Gleichungen (1.)—(15.) a. a. O. vorkommen.

Multiplicirt man die Determinante D mit der ersten der Determinanten in (5.), so erhält man das Resultat der Multiplication nach Berücksichtigung der Gleichung (3.) in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (135)(146) & (136)(145) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (235)(246) & (236)(245) \\ (354)(463) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (463)(354) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (546)(635) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (635)(546) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(546)^2(463)^2(635)^2(354)^2 \begin{vmatrix} (135)(146) & (136)(145) \\ (235)(246) & (236)(245) \end{vmatrix}.$$

Bemerkt man schliesslich, dass die erste Determinante in (5.) nach Gleichung (4.) den folgenden Werth hat:

$$(546)^2(463)^2(635)^2(354)^2,$$

so erhält man nach Hinweglassung der gleichen Factoren für D den folgenden Werth:

$$(6.)\qquad D = (136)(145)(235)(246)-(135)(146)(236)(245),$$

der mit dem ersten Gliede der a. a. O. vorkommenden Gleichung (1.) übereinstimmt.

Es ist noch zu bemerken, dass man D in derselben Form erhält, wenn man statt mit der ersten Determinante in (5.) mit der zweiten oder dritten Determinante multiplicirt.

Wie bereits erwähnt entsprechen den a. a. O. angegebenen fünfzehn Vierecksgruppen ebenfalls fünfzehn Determinantengruppen, die der in (5.) ähnlich sind; wird nun D mit je einer der den fünfzehn Determinantengruppen angehörigen Determinanten multiplicirt, so erhält man D in fünfzehn verschiedenen Formen, die die ersten Glieder der a. a. O. angegebenen Gleichungen (1.)—(15.) bilden.

Budapest, am 28. Dezember 1881.