# Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten.

(Von den Herren *Frobenius* in Zürich und *Stickelberger* in Freiburg i. Br.)

---

Wir betrachten im Folgenden elliptische Functionen, in welchen nebst dem Argumente $u$ auch die Perioden $2\omega$ und $2\omega'$ unabhängig veränderlich sind und nur der Beschränkung unterliegen, dass sie weder unendlich gross noch unendlich klein werden dürfen, und ihr Verhältniss nicht durch reelle Werthe hindurchgehen darf. Dann sind auch die zugehörigen Invarianten $g_2$ und $g_3$ unabhängige Variabeln, die alle endlichen Werthe annehmen dürfen, für welche die Discriminante $g_2^3-27g_3^2$ von Null verschieden ist. Aus den Perioden findet man die Invarianten durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad g_2 = 60\Sigma'\frac{1}{(2\nu\omega+2\nu'\omega')^4},\quad g_3 = 140\Sigma'\frac{1}{(2\nu\omega+2\nu'\omega')^6},$$

wo die Summationsbuchstaben $\nu$, $\nu'$ alle Paare ganzer Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, mit Ausschluss des Paares 0, 0, oder wenn man

$$(2.)\qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega},\quad h = e^{i\pi\tau}$$

setzt, und annimmt, dass die Ordinate der complexen Grösse $\tau$ positiv ist, durch die Gleichungen

$$(3.)\qquad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 12g_2 = 1+240\Sigma_1^\infty\frac{\lambda^3h^{2\lambda}}{1-h^{2\lambda}},\quad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^6 216g_3 = 1-504\Sigma_1^\infty\frac{\lambda^5h^{2\lambda}}{1-h^{2\lambda}}.$$

Um die partiellen Differentialgleichungen zu finden, denen eine elliptische Function, als Function dreier Variabeln betrachtet, genügt, fassen wir sie zunächst als Function von $u$, $\omega$, $\omega'$ auf, und transformiren dann die erhaltenen Differentialgleichungen durch Einführung der Variabeln $g_2$, $g_3$ für $\omega$, $\omega'$. Wir knüpfen daran eine Zusammenstellung der Differentialgleichungen, die zwischen den Perioden, den Invarianten, den Perioden der Integrale zweiter Gattung und den durch lineare Transformation der Perioden umgeformten Invarianten bestehen.

## § 1.

Die Perioden $2\omega$, $2\omega'$ als unabhängige Variabeln.

Ist $\varphi(u)$ eine elliptische Function mit den Perioden $2\omega$ und $2\omega'$, und sind $\alpha$ und $\beta$ zwei ganze Zahlen, so ist

$$\varphi(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') = \varphi(u).$$

Setzt man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \varphi_1(u,\omega,\omega'), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = \varphi_2(u,\omega,\omega'), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \varphi'(u,\omega,\omega'),$$

so ergeben sich durch Differentiation jener Gleichung nach $\omega$, $\omega'$ und $u$ die Relationen

$$\begin{aligned}\varphi_1(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+2\alpha\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') &= \varphi_1(u),\\ \varphi_2(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+2\beta\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') &= \varphi_2(u),\\ \varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') &= \varphi'(u).\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\omega$, $\omega'$ und $u$, und addirt sie, so erhält man

$$\begin{aligned}\omega\varphi_1(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+\omega'\varphi_2(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')\\ = \omega\varphi_1(u)+\omega'\varphi_2(u)+u\varphi'(u).\end{aligned}$$

Setzt man

$$(4.) \qquad \mathrm{r}(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

und multiplicirt man jene Gleichungen mit

$$\eta = \mathrm{r}(\omega), \quad \eta' = \mathrm{r}(\omega') \quad \text{und} \quad \mathrm{r}(u),$$

und addirt sie, so erhält man mit Berücksichtigung der Formel

$$\mathrm{r}(u+2\alpha\omega+2\beta\omega') = \mathrm{r}(u)+2\alpha\eta+2\beta\eta'$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}\eta\varphi_1(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+\eta'\varphi_2(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')+\mathrm{r}(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')\varphi'(u+2\alpha\omega+2\beta\omega')\\ = \eta\varphi_1(u)+\eta'\varphi_2(u)+\mathrm{r}(u)\varphi'(u).\end{aligned}$$

Es ergiebt sich also der Satz:

I. *Ist $\varphi(u,\omega,\omega')$ eine elliptische Function mit den Perioden $2\omega$ und $2\omega'$, so sind*

$$(5.)\qquad \omega\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\omega'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}+\;u\;\frac{\partial\varphi}{\partial u}\;=f(u),$$

$$(6.)\qquad \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}+\mathrm{r}(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u}=g(u)$$

*elliptische Functionen mit denselben Perioden.*

Betrachtet man in den Gleichungen (5.) und (6.) die Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}$ als Unbekannte, so ist ihre Determinante

$$(7.)\qquad \eta\omega'-\eta'\omega=+\frac{i\pi}{2},$$

falls man, wie im Folgenden stets geschieht, voraussetzt, dass die Ordinate von $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$ positiv ist. Durch Auflösung jener Gleichungen ergiebt sich also

$$\frac{i\pi}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}=\omega'g(u)-\eta'f(u)+(\eta'u-\omega'\mathrm{r}(u))\varphi'(u),$$

$$-\frac{i\pi}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}=\omega g(u)-\eta f(u)+(\eta u-\omega\mathrm{r}(u))\varphi'(u).$$

Was die Ermittlung der Functionen $f(u)$ und $g(u)$ anbelangt, so können sie ausser etwa für $u=0$ nur für die nämlichen Werthe unendlich werden wie $\varphi(u)$ selbst, und es ist leicht, wenn $u_0$ einer dieser Werthe ist, in den Entwicklungen von $f(u)$ und $g(u)$ nach Potenzen von $u-u_0$ die Coefficienten der negativen Potenzen aus der analogen Entwicklung von $\varphi(u)$ zu berechnen. Durch diese Coefficienten ist aber eine elliptische Function nach einem bekannten Satze (d. J. Bd. 88, S. 154) bis auf eine additive Constante genau bestimmt.

Auf demselben Wege, auf dem oben der Satz I. bewiesen worden ist, gelangt man auch zu dem folgenden allgemeineren Satze:

II. *Genügt die Function $\varphi(u,\omega,\omega')$ den Gleichungen*

$$(8.)\qquad \varphi(u+2\omega)=m\varphi(u),\quad \varphi(u+2\omega')=m'\varphi(u),$$

*wo $m$ und $m'$ zwei von $u$, $\omega$, $\omega'$ unabhängige Grössen sind, so befriedigen die Functionen*

$$\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\omega'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}+u\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}+\mathrm{r}(u)\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

*dieselben Gleichungen.*

## § 2.

### Die Invarianten $g_2$, $g_3$.

Den eben entwickelten Satz wollen wir nunmehr auf den Fall anwenden, wo die mit $\varphi(u)$ bezeichnete Function gleich $\wp(u)$ ist. Diese

Function wird nur für $u=0$ (und die congruenten Werthe) unendlich von der zweiten Ordnung, und ihre Entwicklung nach Potenzen von $u$ beginnt mit

$$(9.)\qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\frac{g_2^2}{1200}u^6+\cdots.$$

Die Function $f(u)$ wird daher in diesem Falle nur für $u=0$ unendlich von der zweiten Ordnung, und die Anfangsglieder ihrer Entwicklung sind $-\frac{2}{u^2}+au^2+\cdots$. Sie ist also gleich $-2\wp(u)$. Da $\mathrm{r}(u)$ ebenfalls nur für $u=0$ unendlich wird, und seine Entwicklung nach Potenzen von $u$ mit

$$(10.)\qquad \mathrm{r}(u) = \frac{1}{u}-\frac{g_2}{60}u^3-\frac{g_3}{140}u^5-\frac{g_2^2}{8400}u^7-\cdots$$

beginnt, so wird die Function $g(u)$ nur für $u=0$ unendlich von der vierten Ordnung, und die Anfangsglieder ihrer Entwicklung sind

$$-\frac{2}{u^4}+\tfrac{2}{15}g_2+bu^2+\cdots.$$

Sie ist daher gleich

$$-\tfrac{1}{3}\wp''(u)+\tfrac{1}{6}g_2 = -2\wp(u)^2+\tfrac{1}{3}g_2.$$

Demnach ist

$$(11.)\qquad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega'}+\quad u\,\dfrac{\partial\wp}{\partial u} = -2\wp, \\ \eta\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\wp}{\partial\omega'}+\mathrm{r}(u)\dfrac{\partial\wp}{\partial u} = -2\wp^2+\tfrac{1}{3}g_2. \end{cases}$$

Die erste dieser beiden Formeln ist auch leicht daraus zu erhalten, dass

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2}+\Sigma'\left(\frac{1}{(u+2\nu\omega+2\nu'\omega')^2}-\frac{1}{(2\nu\omega+2\nu'\omega')^2}\right)$$

eine homogene Function $(-2)^{\text{ten}}$ Grades von $u$, $\omega$, $\omega'$ ist.

Entwickelt man beide Seiten der Gleichungen (11.) nach Potenzen von $u$, so ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten der Anfangsglieder die Relationen

$$(12.)\qquad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} = -4g_2, \quad \omega\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} = -6g_3, \\ \eta\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} = -6g_3, \quad \eta\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} = -\dfrac{g_2^2}{3}. \end{cases}$$

Ist also $\varphi(\omega,\omega')$ eine beliebige Function von $\omega$ und $\omega'$, so ist

$$(13.)\qquad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = -\left(4g_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+6g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}\right), \\ \eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = -\tfrac{1}{3}\left(18g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}\right). \end{cases}$$

Demnach folgt aus Satz I:

III. *Ist* $\varphi(u, g_2, g_3)$ *eine elliptische Function mit den Invarianten* $g_2$, $g_3$, *so sind*

$$(14.)\quad \begin{cases} 4g_2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+6g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}-u\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \\ 18g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+\;g_2^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}-3\mathrm{r}(u)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \end{cases}$$

*elliptische Functionen mit denselben Invarianten.*

Nimmt man in den Formeln (13.) für $\varphi$ die Discriminante und die absolute Invariante

$$(15.)\qquad g_6 = g_2^3-27g_3^2,\quad g=\frac{g_2^3}{g_6},$$

so erhält man

$$(16.)\quad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega'}=-12g_6, & \omega\dfrac{\partial g}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g}{\partial\omega'}=0, \\ \eta\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_6}{\partial\omega'}=\quad 0, & \eta\dfrac{\partial g}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g}{\partial\omega'}=-18\dfrac{g_2^2g_3}{g_6}. \end{cases}$$

Setzt man ferner

$$\varpi=\mu\omega+\mu'\omega',\quad \tilde\eta=\mu\eta+\mu'\eta',$$

wo $\mu$ und $\mu'$ zwei willkürliche Constanten bedeuten, und nimmt in den Formeln (13.) für $\varphi$ die Grösse $\varpi$, so erhält man

$$(17.)\qquad 4g_2\frac{\partial\varpi}{\partial g_2}+6g_3\frac{\partial\varpi}{\partial g_3}=-\varpi,\quad 18g_3\frac{\partial\varpi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varpi}{\partial g_3}=-3\tilde\eta.$$

Aus den Formeln (12.) folgt

$$\begin{vmatrix} \eta\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} & \eta\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} \\ \omega\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_2}{\partial\omega'} & \omega\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial g_3}{\partial\omega'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6g_3 & \dfrac{g_2^2}{3} \\ 4g_2 & 6g_3 \end{vmatrix}.$$

Wendet man auf die linke Seite das Multiplicationstheorem der Determinanten an, so ergiebt sich daraus bei Benutzung der üblichen Schreibweise für die Functionaldeterminanten

$$(18.)\qquad \frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(\omega,\omega')}=-\frac{8}{3\pi i}g_6,\quad \frac{\partial(\omega,\omega')}{\partial(g_2,g_3)}=-\frac{3\pi i}{8}\frac{1}{g_6}.$$

Durch Auflösung der Gleichungen (12.), (16.) und (17.) erhält man die Formeln*)

*) Die Formel (20.) und die Formel (31.) im folgenden Paragraphen sind auf einem andern Wege gefunden von Herrn *Bruns, Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.* Dorpat 1875.

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial \omega} = 12g_2\eta' - 18g_3\omega', & \dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial \omega} = 18g_3\eta' - g_2^2\omega', \\ -\dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_2}{\partial \omega'} = 12g_2\eta - 18g_3\omega, & -\dfrac{3\pi i}{2}\dfrac{\partial g_3}{\partial \omega'} = 18g_3\eta - g_2^2\omega, \end{cases}$$

$$(20.)\quad 4g_6\frac{\partial \varpi}{\partial g_2} = 18g_3\tilde{\eta} - g_2^2\varpi, \quad 4g_6\frac{\partial \varpi}{\partial g_3} = -12g_2\tilde{\eta} + 18g_3\varpi,$$

$$(21.)\quad \begin{cases} \dfrac{i\pi}{24}\dfrac{\partial \log(g_6)}{\partial \omega} = \eta', & \dfrac{i\pi}{24}\dfrac{\partial \log(g_6)}{\partial \omega'} = -\eta, \\ \dfrac{i\pi}{36}\dfrac{\partial g}{\partial \omega} = -\dfrac{g_2^2 g_3}{g_6}\omega', & \dfrac{i\pi}{36}\dfrac{\partial g}{\partial \omega'} = \dfrac{g_2^2 g_3}{g_6}\omega. \end{cases}$$

Daraus folgt in Verbindung mit der Gleichung (7.)

$$(22.)\quad \frac{i\pi}{24}d\log(g_6) = \eta' d\omega - \eta\, d\omega' = \omega' d\eta - \omega\, d\eta'.$$

Beiläufig ergiebt sich aus diesen Formeln

$$(23.)\quad \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \frac{\partial \eta'}{\partial \omega'} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega'}{\partial \eta'} = 0.$$

Um auch den Satz II. durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die partielle Differentialgleichung ableiten, der die Function

$$(24.)\quad \mathfrak{q}(u) = \frac{\sigma(\mu\omega + \mu'\omega' - u)}{\sigma(\mu\omega + \mu'\omega')\sigma(u)} e^{(\mu\eta + \mu'\eta')u}$$

genügt, falls $\mu$ und $\mu'$ zwei von $\omega$ und $\omega'$ unabhängige Grössen sind, und $\mu\omega + \mu'\omega'$ nicht eine ganze Periode ist. Diese Function befriedigt die Gleichungen

$$(25.)\quad \mathfrak{q}(u+2\omega) = e^{-i\pi\mu'}\mathfrak{q}(u), \quad \mathfrak{q}(u+2\omega') = e^{i\pi\mu}\mathfrak{q}(u),$$

wird nur für $u = 0$ (und die congruenten Werthe) unendlich gross, und ihre Entwicklung nach Potenzen von $u$ beginnt mit

$$\mathfrak{q}(u) = \frac{1}{u} - r - \tfrac{1}{2}(s - r^2)u + \cdots,$$

wo

$$(26.)\quad r = \mathfrak{r}(\mu\omega + \mu'\omega') - (\mu\eta + \mu'\eta'), \quad s = \wp(\mu\omega + \mu'\omega')$$

gesetzt ist. Nach Satz II. genügt daher die Function

$$\eta\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial \omega} + \eta'\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial \omega'} + \mathfrak{r}(u)\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial u}$$

denselben Gleichungen, sie wird ferner ebenfalls nur für $u = 0$ unendlich, und die Anfangsglieder ihrer Entwickelung nach Potenzen von $u$ sind

$$-\frac{1}{u^3} - \tfrac{1}{2}(s - r^2)\frac{1}{u} + \cdots.$$

Einem bekannten Theorem von *Hermite* zufolge (Compt. Rend. Bd. 85, p. 693) ist daher

$$\eta\frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial\omega'}+\mathrm{r}(u)\frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial u}=-\tfrac{1}{2}(\mathrm{q}''(u)+(s-r^2)\,\mathrm{q}(u))$$

oder nach Formel (13.)

$$(27.)\qquad 18g_3\frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial \mathrm{q}(u)}{\partial g_3}=\tfrac{3}{2}(\mathrm{q}''(u)+2\mathrm{r}(u)\,\mathrm{q}'(u)+(s-r^2)\,\mathrm{q}(u)).$$

## § 3.

Die Perioden $2\eta$, $2\eta'$.

Aus den Formeln (11.) und (13.) folgt*)

$$(28.)\qquad 18g_3\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\wp(u)}{\partial g_3}=3\mathrm{r}(u)\wp'(u)+6\wp(u)^2-g_2.$$

Da $\wp(u)=-\mathrm{r}'(u)$, $\wp''(u)=6\wp(u)^2-\frac{1}{2}g_2$ ist, so ist die rechte Seite gleich

$$-3(\mathrm{r}\mathrm{r}''+\mathrm{r}'^2)+\tfrac{3}{2}\wp''+\tfrac{1}{4}g_2.$$

Durch Integration ergiebt sich daher aus der obigen Gleichung

$$(29.)\qquad 18g_3\frac{\partial \mathrm{r}(u)}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial \mathrm{r}(u)}{\partial g_3}=-3\mathrm{r}(u)\wp(u)-\tfrac{3}{2}\wp'(u)+\tfrac{1}{4}g_2u.$$

Durch nochmalige Integration findet man daraus

$$18g_3\frac{\partial\log\sigma(u)}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\log\sigma(u)}{\partial g_3}=\tfrac{3}{2}\mathrm{r}(u)^2-\tfrac{3}{2}\wp(u)+\tfrac{1}{8}g_2u^2$$

oder

$$(30.)\qquad 18g_3\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\sigma(u)}{\partial g_3}=\tfrac{3}{2}\sigma''(u)+\tfrac{1}{8}g_2u^2\sigma(u).$$

Setzt man

$$\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial\omega}=\mathrm{r}_1(u,\omega,\omega'),\qquad \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial\omega'}=\mathrm{r}_2(u,\omega,\omega'),$$

so ist den Formeln (13.), (29.) zufolge

$$\eta\mathrm{r}_1(u)+\eta'\mathrm{r}_2(u)+\mathrm{r}(u)\mathrm{r}'(u)=\tfrac{1}{2}\wp'(u)-\tfrac{1}{12}g_2u.$$

Für $u=\omega$ erhält man daraus, weil $\wp'(\omega)=0$, $\mathrm{r}(\omega)=\eta$ ist,

$$\eta(\mathrm{r}_1(\omega)+\mathrm{r}'(\omega))+\eta'\mathrm{r}_2(\omega)\;=\;-\tfrac{1}{12}g_2\omega$$

oder

$$\eta\frac{\partial\eta}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\eta}{\partial\omega'}=-\tfrac{1}{12}g_2\omega.$$

*) Die Art, wie Herr *Weierstrass* in seinen Vorlesungen diese Differentialgleichungen ableitet, findet man von Herrn *Simon,* dieses Journal Bd. 81, S. 311 auseinandergesetzt. Vgl. *Weierstrass,* dieses Journal Bd. 52, S. 352.

Aus dieser Gleichung und der analogen für $\eta'$ ergiebt sich die zweite der Formeln

$$(31.)\quad \begin{cases} \omega\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial\omega'}=-\tilde\eta, & 4g_2\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial g_2}+6g_3\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial g_3}=\tilde\eta,\\ \eta\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial\omega'}=-\tfrac{1}{12}g_2\varpi, & 18g_3\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial g_2}+\ g_2^2\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial g_3}=\tfrac{1}{4}g_2\varpi. \end{cases}$$

Mithin ist

$$\begin{vmatrix} \eta\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega'} & \eta\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega'}\\ \omega\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\eta}{\partial\omega'} & \omega\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega}+\omega'\dfrac{\partial\eta'}{\partial\omega'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tfrac{1}{12}g_2\omega & \tfrac{1}{12}g_2\omega'\\ \eta & \eta' \end{vmatrix}$$

oder nach (7.)

$$(32.)\quad \frac{\partial(\eta,\eta')}{\partial(\omega,\omega')}=-\tfrac{1}{12}g_2,\quad \frac{\partial(\omega,\omega')}{\partial(\eta,\eta')}=-\frac{12}{g_2},\quad \frac{\partial(\eta,\eta')}{\partial(g_2,g_3)}=\frac{i\pi}{32}\frac{g_2}{g_6}.$$

In Verbindung mit den Gleichungen (21.) folgt daraus (vgl. *Klein*, Math. Ann. Bd. XV S. 86.)

$$(33.)\quad \frac{\partial^2\log g_6}{\partial\omega^2}\,\frac{\partial^2\log g_6}{\partial\omega'^2}-\Big(\frac{\partial^2\log g_6}{\partial\omega\,\partial\omega'}\Big)^2=\frac{48}{\pi^2}g_2.$$

Ist $\varphi(\omega,\omega')$ eine Function von $\omega$ und $\omega'$, so ergiebt sich aus (21.)

$$\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}=\frac{i\pi}{24}\,\frac{\partial(\log g_6,\varphi)}{\partial(\omega,\omega')}=\frac{i\pi}{24}\,\frac{\partial(\log g_6,\varphi)}{\partial(\eta,\eta')}\,\frac{\partial(\eta,\eta')}{\partial(\omega,\omega')},$$

also nach (22.) und (32.)

$$(34.)\quad \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}=-\tfrac{1}{12}g_2\Big(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\omega'\frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}\Big)$$

und folglich nach (13.)

$$(35.)\quad \omega\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\omega'\frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}=\frac{4}{g_2}\Big(18g_3\frac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial g_3}\Big).$$

Nimmt man für $\varphi$ die Invarianten $g_2$ und $g_3$, so erhält man die zweite Reihe der Formeln

$$(36.)\quad \begin{cases} \eta\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta}+\eta'\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta'}=4g_2, & \eta\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta}+\eta'\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta'}=6g_3,\\ \omega\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta}+\omega'\dfrac{\partial g_2}{\partial\eta'}=72\dfrac{g_3}{g_2}, & \omega\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta}+\omega'\dfrac{\partial g_3}{\partial\eta'}=4g_2. \end{cases}$$

Berechnet man aus den Formeln (31.) die Werthe von $\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial g_2}$ und $\dfrac{\partial\tilde\eta}{\partial g_3}$, so findet man unter Berücksichtigung der Relationen (20.) die Gleichungen

$$(37.)\quad \frac{\partial\tilde\eta}{\partial g_3}+\frac{\partial\varpi}{\partial g_2}=0,\quad 12\frac{\partial\tilde\eta}{\partial g_2}+g_2\frac{\partial\varpi}{\partial g_3}=0.$$

Daraus erhält man durch Elimination von $\tilde{\eta}$ oder $\tilde{\varpi}$ die Differentialgleichungen zweiter Ordnung (vgl. *Borchardt*, dieses Journal Bd. 58, S. 134.)

$$(38.)\quad \begin{cases} 12\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial g_2^2}-g_2\dfrac{\partial^2\varpi}{\partial g_3^2}=0, \\ 12\dfrac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial g_2^2}-g_2\dfrac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial g_3^2}-\dfrac{12}{g_2}\dfrac{\partial\tilde{\eta}}{\partial g_2}=0. \end{cases}$$

Zu diesen Formeln gelangt man am bequemsten, indem man von der Darstellung von $\omega$ und $\eta$ durch geschlossene Integrale

$$(39.)\quad 2\omega=\int\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}},\quad 2\eta=-\int\frac{s\,ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$$

ausgeht.

Sei $D$ das durch die Gleichungen

$$(40.)\quad \begin{cases} D\varphi=18g_3\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial g_3}=\frac{1}{3}\dfrac{\partial(g_6,\varphi)}{\partial(g_2,g_3)} \\ \quad=-3\left(\eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega'}\right)=-\dfrac{i\pi}{8}\dfrac{\partial(\log g_6,\varphi)}{\partial(\omega,\omega')} \end{cases}$$

definirte Operationssymbol. Setzt man in den Gleichungen (28.), (29.), (30.) $u=\mu\omega+\mu'\omega'$, wo $\mu$, $\mu'$ von $\omega$, $\omega'$ unabhängig sind, und benutzt man ausser den Bezeichnungen (26.) noch die Abkürzungen

$$(41.)\quad q=\sigma(\mu\omega+\mu'\omega')e^{-\frac{1}{2}(\mu\omega+\mu'\omega')(\mu\eta+\mu'\eta')},\quad t=\wp'(\mu\omega+\mu'\omega'),$$

so erhält man die Formeln

$$(42.)\quad \begin{cases} D\log q=\frac{3}{2}r^2-\frac{3}{2}s, & Dr=-3rs-\frac{3}{2}t, \\ Ds=3rt+6s^2-g_2, & Dt=3r(6s^2-\frac{1}{2}g_2)+9st. \end{cases}$$

## § 4.

### Das Periodenverhältniss und die absolute Invariante.

Ist $\varphi(\omega,\omega')$ eine homogene Function nullten Grades von $\omega$ und $\omega'$, also eine Function der einen Variabeln $\tau=\dfrac{\omega'}{\omega}$, so ist

$$(\alpha.)\quad \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}=-\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{\eta\omega'-\eta'\omega}{\omega^2}=\frac{\pi^2}{2\omega^2}\frac{d\varphi}{di\pi\tau}.$$

Z. B. ist nach Formel (16.)

$$(43.)\quad \frac{dg}{di\pi\tau}=-\frac{36\omega^2}{\pi^2}\frac{g_2^2g_3}{g_6}.$$

Daher ist

$$(44.)\quad 18g_3\frac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial g_3}=54\frac{g_2^2g_3}{g_6}\frac{d\varphi}{dg}.$$

Die Function

$$(45.)\qquad f = g_6^{\frac{1}{12}}$$

ist eine eindeutige homogene Function $(-1)^{\text{ten}}$ Grades von $\omega$ und $\omega'$ und genügt nach (16.) der Gleichung

$$(46.)\qquad \eta\frac{\partial f}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial f}{\partial\omega'} = 0.$$

Ist daher $\varphi$ eine homogene Function $\nu^{\text{ten}}$ Grades von $\omega$ und $\omega'$, so ist

$$(\beta.)\qquad f^\nu\left(\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}\right) = \eta\frac{\partial(\varphi f^\nu)}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial(\varphi f^\nu)}{\partial\omega'} = \frac{\pi^2}{2\omega^2}\frac{d(\varphi f^\nu)}{di\pi\tau}.$$

Nimmt man in dieser Formel $\varphi = \frac{1}{\omega}$ und setzt man

$$(47.)\qquad \psi(\tau) = \frac{\pi}{\omega f},$$

so erhält man

$$(48.)\qquad \frac{\eta\omega}{\pi^2} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\log\psi(\tau)}{d(i\pi\tau)},\quad \frac{\eta}{\pi f} = -\tfrac{1}{2}\frac{d\psi(\tau)}{di\pi\tau}.$$

In den folgenden Formeln dieses Paragraphen wollen wir der Einfachheit halber $f = 1$ voraussetzen, so dass $\omega$, $\eta$, $g_2$, $g_3$ die Ausdrücke bedeuten, die bisher mit $\omega f$, $\eta f^{-1}$, $g_2 f^{-4}$, $g_3 f^{-6}$ bezeichnet worden sind. Dieselben sind also Functionen von $\tau$ oder $g$. Eine Function von $\omega$ und $\omega'$ oder von $g_2$ und $g_3$ kann nun zwar mittelst der Gleichung $f = 1$ in verschiedene Formen gebracht werden. Aber zufolge der Relation (46.) ist der Ausdruck

$$\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}\quad\text{oder}\quad 18g_3\frac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial g_3}$$

unabhängig von der Art, auf die $\varphi$ durch $\omega$, $\omega'$ oder $g_2$, $g_3$ ausgedrückt ist.

Setzt man in der Formel (44.) $\varphi = \varpi$ oder $\tilde{\eta}$, so erhält man nach (17.) und (31.)

$$(49.)\qquad 18g_2^2 g_3\frac{d\varpi}{dg} = -\tilde{\eta},\quad 216 g_2 g_3\frac{d\tilde{\eta}}{dg} = \varpi.$$

Durch Elimination von $\tilde{\eta}$ oder $\varpi$ ergiebt sich daraus (vgl. *Bruns*, l. c. S. 5; *Dedekind* dieses Journal Bd. 83, S. 280)

$$(50.)\qquad \begin{cases} 6g(g-1)\dfrac{d^2\varpi}{dg^2}+(7g-4)\dfrac{d\varpi}{dg}+\tfrac{1}{24}\varpi = 0, \\[2ex] 6g(g-1)\dfrac{d^2\tilde{\eta}}{dg^2}+(5g-2)\dfrac{d\tilde{\eta}}{dg}+\tfrac{1}{24}\tilde{\eta} = 0. \end{cases}$$

Nimmt man in der Formel $(\beta.)$ $\varphi = g_2$ oder $g_3$, so findet man nach (12.)

$$(51.)\qquad \psi(\tau)^2\frac{dg_2}{di\pi\tau} = -12g_3,\quad \psi(\tau)^2\frac{dg_3}{di\pi\tau} = -\tfrac{2}{3}g_2^2.$$

Nimmt man ferner $\varphi = \eta$, so erhält man nach (31.)

$$\frac{\pi^2}{2\omega^2}\frac{d\eta}{d i\pi\tau} = \eta\frac{\partial\eta}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\eta}{\partial\omega'} = -\frac{g_2}{12}\omega.$$

Daher ist

$$\frac{g_2}{12} = -\frac{\pi^2}{2\omega^3}\frac{d\eta}{d(i\pi\tau)},$$

oder, wenn man für $\omega$ und $\eta\omega$ ihre Werthe aus (47.) und (48.) einsetzt,

$$(52.)\qquad \tfrac{1}{3}g_2 = \psi(\tau)^3\frac{d^2\psi(\tau)}{(d i\pi\tau)^2}.$$

Nimmt man endlich der Reihe nach $\varphi = g_2,\ g_3,\ g_2^2,\ g_2 g_3$, u. s. w., so ergiebt sich nach analogen Umformungen

$$(53.)\quad \begin{cases} 4g_3 = -\tfrac{1}{2}\psi(\tau)^4\dfrac{d^3(\psi(\tau)^2)}{(d i\pi\tau)^3}, \\[2mm] 3g_2^2 = \tfrac{1}{3}\psi(\tau)^5\dfrac{d^4(\psi(\tau)^3)}{(d i\pi\tau)^4}, \\[2mm] \tfrac{1}{3}\cdot 2^8 g_2 g_3 = -\tfrac{1}{4}\psi(\tau)^6\dfrac{d^5(\psi(\tau)^4)}{(d i\pi\tau)^5}, \\[2mm] \tfrac{647}{9}g_2^3+32.37 g_3^2 = \tfrac{1}{5}\psi(\tau)^7\dfrac{d^6(\psi(\tau)^5)}{(d i\pi\tau)^6}, \\[2mm] 2^6.3^4 g_2^2 g_3 = -\tfrac{1}{6}\psi(\tau)^8\dfrac{d^7(\psi(\tau)^6)}{(d i\pi\tau)^7}. \end{cases}$$

Allgemein ergiebt sich

$$\psi_n = \frac{(-1)^n}{n-1}\psi(\tau)^{n+1}\frac{d^n(\psi(\tau)^{n-1})}{(d i\pi\tau)^n} = (-1)^n\psi(\tau)^{n+1}\frac{d^{n-1}(\psi(\tau)^{n-2}\psi'(\tau))}{i\pi(d i\pi\tau)^{n-1}}$$

als eine ganze Function von $\frac{g_2}{3}$ und $4g_3$, deren Coefficienten positive ganze Zahlen sind, mit Hülfe der Recursionsformel

$$(54.)\qquad 2\psi_n = -2\psi^2\frac{d\psi_{n-1}}{d i\pi\tau}+\binom{n}{2}\psi_2\psi_{n-2}+\binom{n}{3}\psi_3\psi_{n-3}+\cdots+\binom{n}{2}\psi_{n-2}\psi_2,$$

welche aus der *Lagrange*schen Umkehrungsformel leicht abzuleiten ist*).
In dieser Gleichung ist

$$-\psi^2\frac{d\psi_{n-1}}{d i\pi\tau} = +\tfrac{2}{3}\left(18 g_3\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial g_3}\right).$$

---

*) Allgemeiner ergeben sich aus dieser Formel, wenn $u$ und $v$ zwei Functionen von $x$ sind, die Identitäten

$$\sum_{\lambda}{}_0^n\binom{n}{\lambda}\frac{1}{\lambda+1}D_x^\lambda(u^{\lambda+1})D_x^{n-\lambda}(u^{-\lambda-1}v) = D_x^n(v),$$

$$\sum_{\lambda}{}_0^n(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}\frac{1}{\lambda+1}u^{-\lambda-1}D_x^{n-\lambda}(v D_x^\lambda u^{\lambda+1}) = D_x^n(v).$$

Aus den Relationen (52.) und (53.) erhält man für $\psi(\tau)$ die Differentialgleichung dritter Ordnung (vgl. *Jacobi*, dieses Journal Bd. 36, S. 103)

$$(55.)\quad \left[3\psi(\tau)^3\frac{d^2\psi(\tau)}{(di\pi\tau)^2}\right]^3-27\left[\tfrac{1}{8}\psi(\tau)^4\frac{d^3(\psi(\tau)^2)}{(di\pi\tau)^3}\right]^2 = 1.$$

## § 5.

### Transformation der Perioden.

An Stelle der unabhängigen Variabeln $\omega$, $\omega'$ führen wir zwei neue Variabeln $\Omega$, $\Omega'$ ein mittelst der linearen Substitutionen

$$(56.)\quad \begin{cases}\omega = a\Omega+b\Omega',\\ \omega' = c\Omega+d\Omega',\end{cases}$$

deren Determinante

$$(57.)\quad ad-bc = 1$$

sein möge, und deren Coefficienten im übrigen willkürliche Grössen sind. Wir bezeichnen mit

$$H,\quad H',\quad T,\quad G_2,\quad G_3,\quad G_6,\quad F,\quad G$$

die Ausdrücke, die aus $\Omega$, $\Omega'$ in der nämlichen Weise gebildet sind wie

$$\eta,\quad \eta',\quad \tau,\quad g_2,\quad g_3,\quad g_6,\quad f,\quad g$$

aus $\omega$, $\omega'$. Die Gleichung *)

$$H\Omega'-H'\Omega = \frac{i\pi}{2}$$

geht durch die Substitution (56.) in

$$(aH+bH')\omega'-(cH+dH')\omega = \frac{i\pi}{2}$$

über. Vergleicht man diese mit der Relation (7.), so erkennt man, dass die durch die erste der beiden Gleichungen

$$(58.)\quad \begin{cases}aH+bH' = \eta+G_1\omega,\\ cH+dH' = \eta'+G_1\omega'\end{cases}$$

definirte Grösse $G_1$ auch der zweiten Genüge leistet. Ist daher $\varphi$ eine Function von $\omega$ und $\omega'$, also auch von $\Omega$ und $\Omega'$, so ist

$$(59.)\quad H\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega}+H'\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega'} = \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}+G_1\left(\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\omega'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}\right),$$

*) Selbstverständlich wird der Fall ausgeschlossen, wo es keine Paare entsprechender Werthe $\tau$ und $T$ mit positiven Ordinaten giebt, wie dies z. B. eintritt, wenn $a$, $b$, $c$, $d$ rein imaginär sind.

also speciell, wenn $\varphi$ eine homogene Function $\nu^{\text{ten}}$ Grades ist,

$$H\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega}+H'\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega'} = \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'}+\nu G_1\varphi$$

oder nach (13.)

$$(60.)\qquad 18G_3\frac{\partial\varphi}{\partial G_2}+G_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial G_3} = 18g_3\frac{\partial\varphi}{\partial g_2}+g_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial g_3}-3\nu G_1\varphi.$$

Setzt man in Gleichung (59.) für $\varphi$ auf der linken Seite $aH+bH'$, auf der rechten $\eta+G_1\omega$, so erhält man nach (31.) und (40.)

$$(61.)\qquad G_2-g_2 = 12G_1^2+4DG_1.$$

Setzt man in derselben Gleichung $\varphi = G_2,\ G_3,\ G_6$, so findet man

$$(62.)\qquad 18G_3 = 12G_1G_2+DG_2,$$

$$(63.)\qquad DG_3 = G_2^2-18G_1G_3,$$

$$(64.)\qquad DG_6 = -36G_1G_6,\quad G_1 = -\tfrac{1}{36}D\log(G_6).$$

Durch Elimination ergiebt sich daraus

$$(65.)\qquad 9(G_3-g_3) = 6G_1g_2+72G_1^3+36G_1DG_1+2D^2G_1,$$

$$(66.)\qquad D^3G_1+36G_1D^2G_1-54(DG_1)^2-33g_2DG_1+135g_3G_1-54g_2G_1^2 = 0,$$

Aus der Gleichung (64.) folgt die Relation

$$(67.)\qquad G_1 = -\tfrac{1}{3}\frac{DF}{F},$$

die sich in die beiden Gleichungen

$$(68.)\qquad \begin{cases} -\dfrac{i\pi}{2}\dfrac{\partial\log F}{\partial\omega'} = \eta+G_1\omega = aH+bH', \\[2ex] \dfrac{i\pi}{2}\dfrac{\partial\log F}{\partial\omega} = \eta'+G_1\omega' = cH+dH' \end{cases}$$

zerlegen lässt. Setzt man den Ausdruck (67.) in (61.) und (62.) ein, so erhält man die eleganten Formeln

$$(69.)\qquad G_2-g_2 = \tfrac{4}{3}F\,D^2(F^{-1}),$$

$$(70.)\qquad G_3-g_3 = \tfrac{1}{27}F^2D^3(F^{-2})-\tfrac{2}{9}g_2\frac{DF}{F}$$

und daraus für $F$ die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(71.)\qquad [3g_2+4FD^2(F^{-1})]^3-[27g_3-6g_2D\log F+F^2D^3(F^{-2})]^2 = 27F^{12}.$$

Mit Hülfe der Formeln (18.) und (56.) ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{\partial(G_2,G_3)}{\partial(g_2,g_3)} = \frac{\partial(G_2,G_3)}{\partial(\Omega,\Omega')}\,\frac{\partial(\Omega,\Omega')}{\partial(\omega,\omega')}\,\frac{\partial(\omega,\omega')}{\partial(g_2,g_3)}$$

die Relation

$$(72.)\qquad \frac{\partial(G_2,G_3)}{\partial(g_2,g_3)} = \frac{G_6}{g_6}.$$

Ist $y$ eine Function der Variabeln $x$, sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Constanten, und ist $\alpha\delta-\beta\gamma$ von Null verschieden, so ist

$$(73.)\qquad (\alpha\delta-\beta\gamma)^n \frac{d^n y}{\left(d\dfrac{\gamma+\delta x}{\alpha+\beta x}\right)^n} = (\alpha+\beta x)^{n+1}\frac{d^n(\alpha+\beta x)^{n-1}y}{dx^n}.$$

Mit Hülfe dieser Identität kann man in den Formeln, die sich aus (52.), (53.) durch Ersetzung von $\omega, \omega'$ durch $\Omega, \Omega'$ ergeben, die Ableitungen nach $T$ auf solche nach $\tau$ zurückführen. Setzt man

$$(74.)\qquad \Psi(\tau) = \frac{\pi}{\omega F} = (d-b\tau)\psi\left(\frac{-c+a\tau}{d-b\tau}\right),$$

so erhält man auf diese Weise die Gleichungen

$$(75.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{3}\dfrac{G_2}{F^4} = \Psi(\tau)^3\dfrac{d^2\Psi(\tau)}{(di\pi\tau)^2}, \\ 4\dfrac{G_3}{F^6} = -\frac{1}{2}\Psi(\tau)^4\dfrac{d^3(\Psi(\tau)^2)}{(di\pi\tau)^3}, \\ 3\dfrac{G_2^2}{F^8} = \frac{1}{3}\Psi(\tau)^5\dfrac{d^4(\Psi(\tau)^3)}{(di\pi\tau)^4}, \\ \dfrac{2^8}{3}\dfrac{G_2G_3}{F^{10}} = -\frac{1}{4}\Psi(\tau)^6\dfrac{d^5(\Psi(\tau)^4)}{(di\pi\tau)^5}, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Diese Relationen so wie auch die der Gleichung (48.) entsprechende Beziehung

$$(76.)\qquad \frac{aH+bH'}{\pi F} = -\frac{1}{2}\frac{d\Psi(\tau)}{di\pi\tau}$$

lassen sich direct herleiten mit Hülfe der Bemerkung, dass, wenn $\varphi$ eine homogene Function nullten Grades von $\omega$ und $\omega'$ ist, nach (59.)

$$(77.)\qquad \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\varphi}{\partial\omega'} = H\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega}+H'\frac{\partial\varphi}{\partial\Omega'}$$

ist. Aus den beiden ersten Gleichungen (75.) folgt beiläufig, dass die Function $\Psi(\tau)$, welche drei willkürliche Constanten enthält, das allgemeine Integral der Differentialgleichung (55.) ist.

Aus den Formeln (44.) und (77.) ergiebt sich, wenn $\varphi$ eine Function von $\tau$ oder $g$ ist, die Relation

$$(78.)\qquad D\varphi = 54\frac{g_2^2 g_3}{g_6}\frac{d\varphi}{dg} = 54\frac{G_2^2G_3}{G_6}\frac{d\varphi}{dG}.$$

Setzt man in derselben $\varphi = G$, so erhält man

$$(79.)\qquad DG = \frac{54G_2^2G_3}{G_6},\quad \frac{dG}{dg} = \frac{g_6\,G_2^2\,G_3}{g_2^2\,g_3\,G_6},$$

und mithin

$$(80.)\qquad G_2 = \frac{(DG)^2}{2^2 3^3 G(G-1)},\quad \frac{G_2}{g_2} = \frac{g(g-1)}{G(G-1)}\left(\frac{dG}{dg}\right)^2,$$

$$(81.)\qquad G_3 = \frac{(DG)^3}{2^3 3^6 G^2(G-1)},\quad \frac{G_3}{g_3} = \frac{g^2(g-1)}{G^2(G-1)}\left(\frac{dG}{dg}\right)^3,$$

$$(82.)\qquad F^2 = \frac{DG}{6\sqrt{3}\,G^{\frac{2}{3}}(G-1)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{F^2}{f^2} = \frac{g^{\frac{2}{3}}(g-1)^{\frac{1}{2}}}{G^{\frac{2}{3}}(G-1)^{\frac{1}{2}}}\frac{dG}{dg}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$r = 6\sqrt{3}\,g^{\frac{2}{3}}(g-1)^{\frac{1}{2}},\quad R = 6\sqrt{3}\,G^{\frac{2}{3}}(G-1)^{\frac{1}{2}},$$

so ist nach (78.)

$$D\varphi = f^2 r\frac{d\varphi}{dg} = F^2 R\frac{d\varphi}{dG},$$

also wenn man eine beliebige Function von $g$ zur unabhängigen Variabeln wählt,

$$\frac{F^2}{f^2} = \frac{dG}{R} : \frac{dg}{r}.$$

Da $D\varphi = 0$ ist, falls $\varphi$ eine Function von $f$ ist, so ist nach (67.)

$$\begin{aligned} G_1 &= -\tfrac{1}{6}D\log\left(\frac{F^2}{f^2}\right) = \tfrac{1}{6}\left(D\left(\log\frac{dg}{r}\right) - D\left(\log\frac{dG}{R}\right)\right)\\ &= \tfrac{1}{6}\left(f^2 r\frac{d}{dg}\left(\log\frac{dg}{r}\right) - F^2 R\frac{d}{dG}\left(\log\frac{dG}{R}\right)\right),\end{aligned}$$

oder wenn man

$$p = r\frac{d^2 g}{dg^2} - \frac{dr}{dg},\quad P = R\frac{d^2 G}{dG^2} - \frac{dR}{dG}$$

setzt,

$$6G_1 = -D\log\frac{F^2}{f^2} = f^2 p - F^2 P.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} 6DG_1 &= f^2 Dp - F^2 DP - PF^2 D\log\left(\frac{F^2}{f^2}\right)\\ &= f^2 Dp - F^2 DP + PF^2(f^2 p - F^2 P).\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke für $G_1$ und $DG_1$ in die Formel (61.) ein, so findet man nach leichten Reductionen

$$3g_2 + 2f^2 Dp + f^4 p^2 = 3G_2 + 2F^2 DP + F^4 P^2,$$

oder weil

$$g_2 = \frac{f^4 r^2}{3.36 g(g-1)}$$

ist,

$$f^4 r^2\left(\frac{1}{36g(g-1)} + \frac{p^2}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{dp}{dg}\right) = F^4 R^2\left(\frac{1}{36G(G-1)} + \frac{P^2}{R^2} + \frac{2}{R}\frac{dP}{dG}\right).$$

Setzt man also

$$[g] = \frac{1}{36g(g-1)}+\frac{p^2}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{dp}{dg}$$
$$= \frac{1}{36g(g-1)}+\left(\frac{d\log dg}{dg}\right)^2+2\frac{d^2\log dg}{dg^2}-\left(\frac{d\log r}{dg}\right)^2-2\frac{d^2\log r}{dg^2}$$
$$= 2\frac{d^3g}{dg^3}-3\left(\frac{d^2g}{dg^2}\right)^2+\frac{8}{9g^2}-\frac{23}{36g(g-1)}+\frac{3}{4(g-1)^2},$$

so findet man mittelst der Relation

$$f^4r^2 : F^4R^2 = dg^2 : dG^2$$

die Differentialgleichung dritter Ordnung (*Dedekind*, dieses Journal, Bd. 83, S. 280.)

$$(83.)\qquad [g]\,dg^2 = [G]\,dG^2.$$

Sind die Verhältnisse der Constanten $a$, $b$, $c$, $d$ rational, so ist $G_1$ (oder $F$ oder $G$) Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von $g_2$, $g_3$ (oder $g_2$, $g_3$, $f$ oder $g$) sind. Mittelst dieser Gleichung kann man $DG_1$ und $D^2G_1$, und folglich mit Hülfe der Formeln (61.), (62.) die Grössen $G_2$ und $G_3$ rational durch $G_1$, $g_2$, $g_3$ ausdrücken.

Nach Formel (30.) befriedigt die Function

$$\bar{\sigma}(u) = \sigma(u, \Omega, \Omega')$$

die Differentialgleichung

$$18G_3\frac{\partial\bar{\sigma}(u)}{\partial G_2}+G_2^2\frac{\partial\bar{\sigma}(u)}{\partial G_3} = \tfrac{3}{2}\bar{\sigma}''(u)+\tfrac{1}{8}G_2u^2\bar{\sigma}(u).$$

Nach (59.) folgt daraus die Relation

$$D\bar{\sigma}(u) = \tfrac{3}{2}\bar{\sigma}''(u)-3G_1u\bar{\sigma}'(u)+\tfrac{1}{8}G_2u^2\bar{\sigma}(u)+3G_1\bar{\sigma}(u),$$

welche durch die Substitution

$$\bar{\sigma}(u) = e^{\frac{1}{2}G_1u^2}\varphi(u)$$

in

$$D\varphi(u) = \tfrac{3}{2}\varphi''(u)+\tfrac{9}{2}G_1\varphi(u)+\tfrac{1}{8}g_2u^2\varphi(u)$$

übergeht. Wir machen jetzt die specielle Annahme, dass

$$a=\frac{\alpha}{\sqrt{n}},\quad b=\frac{\beta}{\sqrt{n}},\quad c=\frac{\gamma}{\sqrt{n}},\quad d=\frac{\delta}{\sqrt{n}},$$

also

$$(84.)\qquad \alpha\delta-\beta\gamma = n$$

ist, wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ganze Zahlen sind und $n$ eine positive ganze Zahl. Für diesen Fall wollen wir die oben eingeführte Bezeichnung dahin abändern, dass wir an Stelle von

$$\Omega,\quad \Omega',\quad u,\quad \varphi(u),\quad G_1,\quad G_2,\quad G_3$$

durchgängig

$$\sqrt{n}\Omega, \quad \sqrt{n}\Omega', \quad \sqrt{n}u, \quad \sqrt{n}\varphi(u), \quad \frac{1}{n}G_1, \quad \frac{1}{n^2}G_2, \quad \frac{1}{n^3}G_3$$

schreiben. Dann ist

$$nD\varphi(u) = \tfrac{3}{2}\varphi''(u) + \tfrac{9}{2}G_1\varphi(u) + \tfrac{1}{8}n^2 g_2 u^2 \varphi(u),$$

oder wenn man

$$\varphi(u) = \sigma(u)^n \chi(u)$$

setzt,

$$nD\chi(u) = \tfrac{3}{2}\chi''(u) + 3n\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\chi'(u) + \tfrac{3}{2}n(n-1)\frac{\sigma'(u)^2 - \sigma(u)\sigma''(u)}{\sigma(u)^2}\chi(u) + \tfrac{9}{2}G_1\chi(u).$$

Führt man jetzt an Stelle von $u$ die Grösse $s = \wp(u, \omega, \omega')$ als unabhängige Variable ein, und geht dadurch $\chi(u, \omega, \omega')$ in $B(s, g_2, g_3)$ über, so erhält man (*Kiepert,* dieses Journal Bd. 88, S. 209):

$$(85.) \quad \begin{cases} 4nDB = 6(4s^3 - g_2 s - g_3)\dfrac{\partial^2 B}{\partial s^2} \\ -(12(2n-3)s^2 - (4n-3)g_2)\dfrac{\partial B}{\partial s} + 6(n(n-1)s + 3G_1)B. \end{cases}$$

Ist $n = 2m+1$ eine ungerade Zahl, so ist bekanntlich $B$ eine ganze Function $m^{\text{ten}}$ Grades von $s$

$$B = s^m + B_1 s^{m-1} + B_2 s^{m-2} + \cdots + B_m.$$

Zwischen den Coefficienten dieser Function ergiebt sich aus der entwickelten Differentialgleichung die Recursionsformel

$$(86.) \quad \begin{cases} 6(2\mu+2)(2\mu+3)B_{\mu+1} = 4nDB_\mu - 18G_1 B_\mu \\ -\tfrac{1}{2}(n-2\mu+1)(n+6\mu)g_2 B_{\mu-1} + \tfrac{3}{2}(n-2\mu+1)(n-2\mu+3)g_3 B_{\mu-2}. \end{cases}$$

Insbesondere findet man mittelst der Formeln

$$G_2 - n\,g_2 = 12G_1^2 + 4nD\,G_1, \quad 18G_3 = 12G_1 G_2 + nD\,G_2,$$

welche an die Stelle von (61.), (62.) treten, die Werthe

$$2B_1 = -G_1, \quad 240B_2 = 30G_1^2 - G_2 - (5n-6)g_2,$$

$$3360B_3 = -70G_1^3 + 7G_1G_2 + 7(5n-18)G_1g_2 - 4G_3 - 4(14n-15)g_3.$$

Zürich, April 1881.

---