Ueber die Kugeln, welche ein räumliches Vierseit berühren.

(Hierzu eine Figurentafel.)

(Von Herrn *Heinrich Vogt* in Breslau.)

---

§ 1.

Es seien a_1 und a_2 zwei beliebige Tangenten einer Kugel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$, ihre Berührungspunkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$; die Tangentenebenen in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ α_1 und α_2 schneiden sich in der zu $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ conjugirten Geraden $\alpha_1\alpha_2$; die Schnittpunkte von a_1 und a_2 mit $\alpha_2\alpha_1$ seien $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{e}_2$. Alsdann sind von einem Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Geraden a_1 zwei Tangenten an die Kugel möglich, welche a_2 schneiden; nämlich die von $\mathfrak{x}_1$ ausgehenden Tangenten des Kreises, in welchem die Ebene $\mathfrak{x}_1 a_2$ die Kugel schneidet. Es seien $b_1 \equiv \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$, $c_1 \equiv \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}'_2$ diese Tangenten, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ ihre Berührungspunkte. Um die Vorstellungen zu fixiren, wähle ich $\mathfrak{x}_1$ auf der Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$; mit $\mathfrak{x}_2$ bezeichne ich denjenigen Punkt, welcher auf der Strecke $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegt, mit $\mathfrak{x}'_2$ den Schnittpunkt, welcher ausserhalb der Strecke $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegt.

Da $\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1$, so sind $\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$ gegen jede durch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ gehende Ebene, $\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1$ gegen jede durch $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$ gehende Ebene gleich geneigt; mithin, da $\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1$ nur Theile derselben Geraden b_1 sind, so sind die Geraden $a_1 a_2 b_1$ gegen die Ebene $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1$, welche ich ebenso wie den in ihr liegenden Kugelkreis mit β bezeichnen will, gleich geneigt. Ebenso sind $a_1 a_2 c_1$ gegen die Ebene $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1 \equiv \gamma$ gleich geneigt. β und γ sind offenbar verschiedene Ebenen; denn es giebt nur zwei Punkte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ des Kreises β, welche von $\mathfrak{x}_1$ die Entfernung gleich $\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1$ haben; da nun auch $\mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1$, so kann $\mathfrak{C}_1$ nicht in der Ebene β liegen.

Hierdurch sind die Ebenen β und γ vollständig bestimmt; wir können den Satz aussprechen:

Diejenigen Tangenten einer Kugel, welche sich an zwei feste Tangenten $a_1 a_2$ derselben anlehnen, haben ihre Berührungspunkte auf zwei festen Kreisen $\beta\gamma$, gegen welche $a_1 a_2$ und alle beweglichen Tangenten gleich geneigt sind.

β und γ sind zunächst zu finden, indem man durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zu a_2 und a_1 Parallele zieht, und die Winkel, welche diese Parallelen mit a_1 und a_2 bilden, halbirt. Bewegt man die $a_1 a_2$ schneidende Tangente b_1 an dem Kreise β herum, so kommt sie innerhalb der Ebenen $\alpha_1 \alpha_2$ in die Lagen $b_{\mathfrak{e}} \equiv \mathfrak{A}_1\mathfrak{e}_2$, $b_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{f}_1$. Diese Geraden gehören, da von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ nur je eine sich an $a_1 a_2$ anlehnende Tangente möglich ist, auch der Schaar c an; sie haben demnach gegen β und γ dieselbe Neigung wie a_1 und a_2. Deshalb sind $\beta\gamma$ auch die Ebenen, welche die Winkel $a_1 b_{\mathfrak{e}}$, $a_2 b_{\mathfrak{f}}$ halbiren. Mithin schneiden sich die Kreise (nicht die Ebenen) $\beta\gamma$ rechtwinklig in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Geraden $\alpha_1\alpha_2$ mit den Ebenen $\beta\gamma$ mit $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, so ist die Strecke $\mathfrak{f}_1\mathfrak{e}_2$ in $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ harmonisch getheilt und zwar im Verhältniss $\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{A}_1\mathfrak{e}_2} = \frac{\mathfrak{A}_2\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2} = \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2}$, d. h. im Verhältniss der Strecken, welche von $a_1 a_2$ durch $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ und die dazu conjugirte Gerade $\alpha_1\alpha_2$ abgeschnitten werden.

Die Ebenen $\beta\gamma$ sind, weil die Kugelkreise $\beta\gamma$ einander rechtwinklig schneiden, conjugirt; demnach sind auch $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ conjugirte Punkte; $\mathfrak{b}$ ist der Pol von γ, $\mathfrak{c}$ von β.

Sämmtliche Tangenten b kann ich nach dem Obigen erhalten, indem ich eine von ihnen an den Punkten des Kreises β innerhalb der Tangentialebenen mit beständig gleicher Neigung gegen die Ebene β herumführe; oder mit anderen Worten, indem ich sie um die Gerade $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}$ (wo $\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}$ Mittelpunkt des Kreises β ist) rotiren lasse. Die Gerade b lehnt sich hierbei beständig nicht nur an $a_1 a_2$ an, sondern an jede Gerade, welche durch Rotation von a_1 oder a_2 um $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}$ als Axe entsteht. ***Mithin bilden die Tangenten b die eine Regelschaar eines Rotationshyperboloids B, dessen anderer Regelschaar $a_1 a_2$ angehören. Ebenso sind die Tangenten c die eine Regelschaar eines Rotationshyperboloids Γ mit der Axe*** $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_{\mathfrak{c}}$ (wenn $\mathfrak{m}_{\mathfrak{c}}$ Mittelpunkt des Kreises γ ist). Beide Hyperboloïde haben nicht nur die Erzeugenden $a_1 a_2$ sondern auch $b_{\mathfrak{f}} b_{\mathfrak{e}}$ gemeinsam, sind also demselben Vierseit umschrieben.

Die Gerade $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}$ ist normal zur Ebene β, mithin auch normal zu der in dieser Ebene enthaltenen Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$, welche der Halbirungslinie des Nebenwinkels von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$ parallel ist. Die Gerade $\mathfrak{M}\mathfrak{x}_1$ gehört der Halbirungsebene des Winkels $\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$ an und ist deshalb ebenfalls normal zu $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$; mithin ist die Ebene $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{x}_1$ selbst die Halbirungsebene des Winkels $\mathfrak{A}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1$. Demnach sind die von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{n}$ der Geraden $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_{\mathfrak{b}}$ auf a_1 und b_1 gefällten Lothe einander gleich. Da dasselbe für die ganzen Schaaren a und b gilt, so ist $\mathfrak{n}$ Mittelpunkt einer Kugel, welche die Schaaren a und b berührt. Es giebt mithin eine ganze Schaar von Kugeln, welche a und b berühren; es ist leicht zu sehen, dass die Berührungsebenen immer parallel β oder, was dasselbe bedeutet, normal zur Axe $\mathfrak{M}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ bleiben. Alle diese Kugeln haben zur Enveloppe das Hyperboloid B. Ebenso sind die Regelschaaren des Hyperboloids Γ zugleich Tangenten zu der Kugelschaar, deren Enveloppe Γ ist. Beide Kugelschaaren haben die einzige Kugel $\mathfrak{M}$ gemein.

§ 2.

Die Geraden $a_1 a_2$ sind durch die Regelschaaren bc in doppelter Weise projectivisch auf einander bezogen. Sind $\mathfrak{r}_{1\infty}$ und $\mathfrak{p}_{2\infty}$ die unendlich fernen Punkte von a_1 und a_2; $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{p}_1$ die ihnen im System b, $\mathfrak{r}_2'$ und $\mathfrak{p}_1'$ die im System c entsprechenden Punkte; $\mathfrak{R}\mathfrak{P}$ die Berührungspunkte der Tangenten $b_\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{r}_2$, $b_\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_{2\infty}$; $\mathfrak{R}'\mathfrak{P}'$ die Berührungspunkte von $c_\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{r}_2'$, $c_\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_{2\infty}$, so ist zunächst zu beachten, dass $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ nicht, wie es bei der ebenen Figur der Fall sein würde, zu $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ Diametralpunkte des Kreises β sind (und ebensowenig $\mathfrak{R}'\mathfrak{P}'$ des Kreises γ). Denn die Tangentenebenen in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{R}$ schneiden sich in einer durch $\mathfrak{c}$, den Pol von β gehenden, zu a_1 und $b_\mathfrak{r}$ parallelen Geraden. Da diese Gerade aber der Ebene β nicht parallel ist, so sind $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}$ nicht Diametralpunkte des Kreises β. Dasselbe gilt für $\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}'$. Es ist aber Bogen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{R}' = \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}'$.

Die dem Punkte $\mathfrak{r}_{1\infty}$ entsprechenden Punkte sind die Schnittpunkte der Geraden a_2 mit dem die Kugel berührenden Kreiscylinder, dessen Erzeugende parallel a_1 sind. Diese Schnittpunkte werden offenbar durch $\mathfrak{A}_2$ getrennt; der eine liegt zwischen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{e}_2$, weil $\mathfrak{e}_2$ Schnitt von a_2 mit α_1 ist, welche Ebene als Tangentenebene des Cylinders (mit Ausnahme der in ihr enthaltenen Geraden a_1) ganz ausserhalb des Cylinders verläuft. Der andere Schnittpunkt liegt zwischen $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{p}_{2\infty}$. Da für die Schaar b die Strecke $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$ der Strecke $\mathfrak{e}_2\mathfrak{A}_2$ ganz entsprechend gesetzt ist, so geht der Strahl $b_\mathfrak{r}$ durch den ausserhalb von $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegenden Punkt $\mathfrak{r}_2$, der Strahl $c_\mathfrak{r}$ durch den innerhalb von $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ liegenden Punkt $\mathfrak{r}_2'$. Ebenso liegt $\mathfrak{p}_2$ zwischen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{r}_{1\infty}$, $\mathfrak{p}_2'$ zwischen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{f}_1$. Die Reihenfolge der Berührungspunkte ist hiernach auf β $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{R}\mathfrak{P}$, auf γ $\mathfrak{A}_1\mathfrak{P}'\mathfrak{A}_2\mathfrak{R}'$.

Die Strecken auf den Geraden $a_1 a_2$ sind vermittelst der Schaar b einander zugeordnet durch die Punktfolgen

$$\mathfrak{r}_{1\infty} \quad \mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{f}_1 \quad \mathfrak{r}_{1\infty},$$
$$\mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{p}_{2\infty} \quad \mathfrak{e}_2 \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{r}_2;$$

die entsprechenden Berührungspunkte sind

$$\mathfrak{R} \quad \mathfrak{P} \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{R}.$$

Lassen wir den Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 die vier durch jene Punkte gebildeten Strecken durchwandern, so erhalten wir folgende Möglichkeiten für die Lagen der Schnittpunkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ der Tangente b_1 mit a_1a_2 und ihres Berührungspunktes $\mathfrak{B}_1$:

$$\mathfrak{x}_1 \text{ auf } \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{p}_1\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{f}_1\mathfrak{r}_{1\infty},$$
$$\mathfrak{x}_2 \text{ auf } \mathfrak{r}_2\mathfrak{p}_{2\infty}, \quad \mathfrak{p}_{2\infty}\mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{e}_2\mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{r}_2;$$

Reihenfolge der Punkte (auf den endlichen Strecken):

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1.$$

Combiniren wir mit b_1 eine zweite Tangente b_2, welche a_1 und a_2 in $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$ schneiden, die Kugel in $\mathfrak{B}_2$ berühren möge, so ergiebt sich, wenn b_1 und b_2 sämmtliche möglichen Lagenbeziehungen annehmen, dass die Berührungspunkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ des räumlichen Vierseits $a_1b_1a_2b_2$ auf den Seiten desselben folgende Lagen haben können:

1) Alle vier Punkte liegen ausserhalb der Seitenstrecken, und zwar so, dass die Richtungen, in welchen je zwei Gegenseiten durchlaufen werden müssen, um von der Seitenstrecke an den Berührungspunkt zu gelangen, nicht demselben Umlaufssinne um das Vierseit angehören.

2) Zwei Punkte innerhalb auf zwei Gegenseiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern so, dass, um von den Seitenstrecken zu den Berührungspunkten zu gelangen, diese beiden Seiten in demselben Umlaufssinne durchlaufen werden müssen.

3) Zwei Punkte innerhalb zweier anstossenden Seiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern, benachbart deren nicht gemeinschaftlichen Eckpunkten.

4) Zwei Punkte innerhalb zweier anstossenden Seiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern, benachbart ihrem gemeinschaftlichen Eckpunkt.

5) Alle vier Punkte innerhalb der Seitenstrecken.

Es sind dies dieselben Fälle, welche beim Kreise und dem ebenen Tangentenvierseit möglich sind*); nur mit dem Unterschied, dass das räum-

---

*) *Steiner,* dieses Journal Bd. 32. Gesammelte Werke Bd. II S. 381.

liche Vierseit nur in einer Weise, das ebene in drei Weisen als Viereck aufgefasst werden kann, und dass deshalb bei letzterem drei Fälle an einer Figur auftreten, die bei dem räumlichen auf drei Figuren vertheilt sind.

Für die Schaar c sind die Strecken der Geraden $a_1 a_2$ einander zugeordnet durch die Punktfolgen

$$\mathfrak{r}_{1\infty} \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{p}'_1 \quad \mathfrak{f}_1 \quad \mathfrak{r}_{1\infty},$$

$$\mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{e}_2 \quad \mathfrak{p}_{2\infty} \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{r}_2,$$

mit den entsprechenden Berührungspunkten

$$\mathfrak{R}' \quad \mathfrak{A}_1 \quad \mathfrak{P}' \quad \mathfrak{A}_2 \quad \mathfrak{R}'.$$

Durchwandert der Punkt $\mathfrak{x}_1$ die vier hierdurch auf a_1 begrenzten Strecken, so erhalten wir für die Lagen der Punkte $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}'_2 \mathfrak{C}_1$ auf c_1 folgende Möglichkeiten:

$$\mathfrak{x}_1 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{p}'_1, \quad \mathfrak{p}'_1\mathfrak{f}_1, \quad \mathfrak{f}_1\mathfrak{r}_{1\infty},$$

$$\mathfrak{x}'_2 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{r}'_2\mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{e}_2\mathfrak{p}_{2\infty}, \quad \mathfrak{p}_{2\infty}\mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_2\mathfrak{r}'_2;$$

Reihenfolge der Punkte (auf den endlichen Strecken):

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{x}'_2, \quad \mathfrak{x}'_2\mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{x}'_2, \quad \mathfrak{x}_1\mathfrak{x}'_2\mathfrak{C}_1.$$

Combiniren wir mit c_1 eine zweite Tangente c_2 derselben Schaar und lassen beide alle möglichen Lagen annehmen, so ergeben sich für die Lage der Berührungspunkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2$ auf den Seitenstrecken des Vierseits $a_1 c_1 a_2 c_2$ dieselben fünf Möglichkeiten, welche wir für $a_1 b_1 a_2 b_2$ gefunden haben; ausserdem aber noch der Fall:

6) Alle vier Berührungspunkte liegen ausserhalb der Seitenstrecken, und zwar auf den Verlängerungen derselben über zwei nicht benachbarte Ecken hinaus*).

Combiniren wir zuletzt eine Gerade der Schaar b mit einer Geraden der Schaar c, so ergeben sich folgende Fälle:

7) Drei Berührungspunkte liegen auf den Seitenstrecken, einer auf der Verlängerung.

8) Ein Berührungspunkt liegt auf einer Seitenstrecke, drei auf den Verlängerungen**).

---

*) Dieser Fall kommt beim ebenen Tangentenvierseit nicht vor.

**) Die Sonderung dieses Falls nach der Lage der Aussenpunkte ist für den vorliegenden Zweck ohne Interesse.

Unabhängig von der Lage der Berührungspunkte gelten in allen Fällen die Beziehungen:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{B}_1,\quad \mathfrak{y}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{y}_1\mathfrak{B}_2,\quad \mathfrak{y}_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{y}_2\mathfrak{B}_2,\quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{B}_1;$$
$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{x}_1\mathfrak{C}_1,\quad \mathfrak{y}_1\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{y}_1\mathfrak{C}_2,\quad \mathfrak{y}'_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{y}'_2\mathfrak{C}_2,\quad \mathfrak{x}'_2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{x}'_2\mathfrak{C}_1.$$

Fügen wir je vier dieser Gleichungen, welche die Theilstrecken der vier Seiten enthalten, mit geeigneten Vorzeichen zusammen, so ergiebt sich, wenn wir mit $a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2$ jetzt die Längen der Seiten des Vierseits bezeichnen,

in den Fällen 1, 2, 3 die Relation $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 \quad (c_1 - c_2)$,

in den Fällen 4, 5, 6 $\qquad a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \quad (c_1 + c_2)$.

Für die Fälle 7, 8 können sich Relationen für die Seitenstrecken offenbar nicht ergeben; denn im Fall 7 müsste man, um zwei Gegenseiten herzustellen, alle vier Theile addiren, um die beiden andern herzustellen, drei Theile addiren, einen subtrahiren; im Fall 8 müsste man für ein Gegenseitenpaar zwei Theilstrecken addiren, zwei subtrahiren, für das andere Paar aber drei addiren, eine subtrahiren*).

Wir erhalten somit das Resultat: *In einem räumlichen Vierseit, welches von einer Kugel berührt wird, ist nur dann die Summe zweier Seiten gleich der Summe der beiden andern, wenn die vier Berührungspunkte in einer Ebene liegen. Ist dies nicht der Fall, so giebt es keine Relation zwischen den Seitenlängen; die Berührungspunkte liegen dann so, dass je zwei der vier durch drei Berührungspunkte bestimmten Kreise, welche die Berührungspunkte auf zwei Gegenseiten gemeinsam haben, sich in diesen Punkten rechtwinklig schneiden.*

Die Fälle 1, 2, 3, in denen $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, unterscheiden sich nicht durch die Natur des Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$, sondern nur durch die Lage der Kugel $\mathfrak{M}$: Wie wir gesehen haben, wird $a_1 b_1 a_2 b_2$ von unendlich vielen Kugeln berührt, deren Berührungsebenen sämmtlich parallel β sind. Verschiebe ich nun β parallel mit sich selbst, so gehen die Lagen der Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ in den Fällen 1, 2, 3, die ich hinfort als I zusammenfasse, in einander über. Ein Gleiches gilt für die Fälle 4, 5, 6, in denen $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$; diese bezeichne ich als II.

Zieht man die Lage der Berührungspunkte im Fall I in Betracht, so zeigt sich, dass die Axe, welche die Centren sämmtlicher Berührungs-

*) Wollte man die Differenz zweier Gegenseiten bilden, so hätte man je zwei Vorzeichen zu ändern.

kugeln enthält, auf den Halbirungsebenen der Innenwinkel*) bei $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2$, auf den Halbirungsebenen der Aussenwinkel bei $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_1$ liegt**). Es sind also in diesem Fall, um die Mittelpunktsaxe zu finden, abwechselnd die Innen- und Aussenwinkel des Vierecks $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_1$ zu halbiren. Im Fall II ist die Mittelpunktsaxe die gemeinschaftliche Linie der Halbirungsebenen sämmtlicher Innenwinkel des Vierecks. Demnach besteht für das Vorhandensein der Fälle I oder II folgendes Kriterium***): *Stellt man für ein Vierseit, dessen Seiten von einer Kugel in einer Ebene berührt werden, eine Gleichung her, so dass auf jeder Seite des Gleichheitszeichens ein Paar Gegenseiten stehen, so hat man mit gleichen Vorzeichen diejenigen Seiten zu setzen, für welche der Kugelmittelpunkt auf der Halbirungsebene des Innenwinkels liegt, mit ungleichen diejenigen, für welche er auf der Halbirungsebene des Aussenwinkels liegt.*

Die Mittelpunktsaxe verläuft im Falle I, da sie auf den Halbirungsebenen der Aussenwinkel an zwei Gegenecken liegt, ganz ausserhalb des Vierseits, d. h. sie kann in gewissen Richtungen parallel mit sich selbst beliebig weit verschoben werden, ohne das Vierseit zu schneiden, im Falle II wird sie vom Vierseit umschlossen.

Im Falle 7 zeigt die Lage der Berührungspunkte, dass der Kugelmittelpunkt $\mathfrak{M}$ auf den Halbirungsebenen von drei Innenwinkeln und einem Aussenwinkel liegt; im Falle 8 je nach der Lage der Berührungspunkte entweder so wie bei 7 oder auf den Halbirungsebenen von drei Aussenwinkeln und einem Innenwinkel. Ich fasse 7 und 8 als III zusammen.

§ 3.

Die in § 2 besprochenen Fälle der Berührung eines Vierseits durch eine Kugel haben sich als die einzig möglichen ergeben. Es lässt sich dies auch auf folgende Weise verificiren: Nimmt man auf jeder Seite eines Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$ einen Punkt an, so sind ausser den in § 2 aufgezählten

*) Die concaven Innenwinkel des Vierecks $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_1$ sind eindeutig bestimmt, da das Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ nur ein Viereck enthält.

**) Die Bezeichnung kann immer so gewählt werden, dass $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, nicht $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ ist.

***) Das Kriterium, welches *Baltzer,* Elem. Aufl. 3 Buch 4 § 4, 10 aus der relativen Lage der Berührungspunkte für die ebene Figur entnimmt, wird für die räumliche illusorisch.

Möglichkeiten der Lagen dieser Punkte zu den Ecken nachfolgende vier Fälle möglich:

9) alle vier Punkte ausserhalb in demselben Umlauf;

10) alle vier Punkte ausserhalb, auf einem Paar Gegenseiten in gleichem Umlauf, auf dem andern Paar in unter sich verschiedenem Umlauf;

11) zwei Punkte innerhalb auf zwei anstossenden Seiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern in gleichem Umlauf;

12) zwei Punkte innerhalb auf zwei Gegenseiten, zwei ausserhalb auf den beiden andern in verschiedenem Umlauf.

Sollten nun die hier angenommenen Punkte Berührungspunkte einer Kugel sein, so würden die in einer Ecke zusammenstossenden Abschnitte gleich sein. Daraus würde sich ergeben $a_1 + a_2 = b_1 - b_2$. Dies ist aber eine Absurdität; denn es müsste $a_1 + b_2 = b_1 - a_2$ sein, während doch

$$a_1 + b_2 > \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2 > b_1 - a_2$$

ist. Demnach sind die Fälle I, II, III die einzig möglichen.

Für ein beliebiges windschiefes Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ mit den Ecken

$$a_1 b_1 \equiv \mathfrak{x}_1, \quad b_1 a_2 \equiv \mathfrak{x}_2, \quad a_2 b_2 \equiv \mathfrak{y}_2, \quad b_2 a_1 \equiv \mathfrak{y}_1$$

sind die Orte für die Mitten aller Kugeln, welche

$$a_1 b_1, \quad b_1 a_2, \quad a_2 b_2, \quad b_2 a_1$$

berühren, die Halbirungsebenen

$$J_{\mathfrak{x}_1} A_{\mathfrak{x}_1}, \quad J_{\mathfrak{x}_2} A_{\mathfrak{x}_2}, \quad J_{\mathfrak{y}_2} A_{\mathfrak{y}_2}, \quad J_{\mathfrak{y}_1} A_{\mathfrak{y}_1}$$

der Innen- und Aussenwinkel bei

$$\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_2, \quad \mathfrak{y}_2, \quad \mathfrak{y}_1.$$

Je drei von diesen Ebenen, welche zu verschiedenen Eckpunkten gehören, ergeben als Schnittpunkt den Mittelpunkt einer $a_1 b_1 a_2 b_2$ berührenden Kugel, deren Berührungspunkte zu je dreien innerhalb oder ausserhalb der Seitenstrecken liegen; weil andernfalls entweder $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ oder $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$ sein müsste.

Durch Combination der Ebenen bei $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2$ ergeben sich 8 Kugeln, durch deren Mittelpunkt je eine der Ebenen $J_{\mathfrak{y}_1} A_{\mathfrak{y}_1}$ geht*). Von vier durch einen Kugelmittelpunkt gehenden Ebenen müssen je drei die Innen- oder Aussenwinkel halbiren. Wir erhalten demnach:

*) Ueberhaupt lassen sich vier beliebigen Geraden des Raumes acht Kugeln anbeschreiben; denn der geometrische Ort der gleichen Abstände von zwei Geraden ist ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Drei dieser Paraboloide schneiden sich in den gesuchten acht Punkten.

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{M}_1 & \text{auf} & A_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_2 & - & J_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_3 & - & J_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_4 & - & J_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_5 & - & J_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_6 & - & A_{\mathfrak{x}_1} & J_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_7 & - & A_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & J_{\mathfrak{y}_2} & A_{\mathfrak{y}_1} \\
\mathfrak{M}_8 & - & A_{\mathfrak{x}_1} & A_{\mathfrak{x}_2} & A_{\mathfrak{y}_2} & J_{\mathfrak{y}_1}.
\end{array}$$

Je vier der acht Ebenen gehen durch einen Punkt, je vier der acht Punkte liegen in einer Ebene; es lassen sich demnach die acht Punkte (ebenso die Ebenen) in vier Weisen zu je zwei Tetraedern gruppiren, von denen jedes dem andern sowohl umschrieben als auch einbeschrieben ist. Diese Anordnungen sind:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_4 & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_8 \\
\mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_8, & \mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_4, \\[1ex]
\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_8 & \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_6\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_4 \\
\mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_7\mathfrak{M}_4, & \mathfrak{M}_5\mathfrak{M}_2\mathfrak{M}_3\mathfrak{M}_8.
\end{array}$$

Die Flächen eines jeden von ihnen sind normal auf denen des zugeordneten.

Ist andererseits in einem Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ die Relation

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 \quad (\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2)$$

erfüllt, so ist jeder Punkt der Schnittlinie $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2}$ Mittelpunkt einer Kugel, welche $a_1 b_1 a_2$ berührt. Die Berührungsebenen sind parallel den Halbirungslinien der Aussenwinkel bei $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, also unter einander parallel, normal zu $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2}$. Sämmtliche Kugeln umhüllen ein Rotationshyperboloid, dessen der Schaar b angehörige Erzeugende sämmtlich $a_1 a_2$ schneiden und die Kugeln berühren. Lege ich von $\mathfrak{y}_1$ an eine der Kugeln z. B. $\mathfrak{M}$ die einzige a_2 schneidende Tangente, deren Berührungspunkt mit denen auf $a_1 b_1 a_2$ in einer Ebene liegt, und welche a_2 in $\mathfrak{z}_2$ treffen möge, so ist nach § 2

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}_2\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2;$$

andererseits ist

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2;$$

es müsste also

$$\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$$

sein. Da dies nicht möglich ist, wenn $\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_2$ verschiedene Punkte sind, fällt $\mathfrak{z}_2\mathfrak{y}_2$ zusammen; b_2 ist eine der Regelschaar b angehörige Gerade, und es schneiden sich $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$ in einer Geraden, deren Punkte sämmtlich Mittelpunkte von $a_1 b_1 a_2 b_2$ in einer Ebene berührenden Kugeln sind. Diesen Mittelpunkten ordnen sich offenbar die im allgemeinen Fall mit $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4$ bezeichneten ein; sie sind nämlich die Schnittpunkte der Axe mit den Ebenen $A_{\mathfrak{x}_1} A_{\mathfrak{x}_2} A_{\mathfrak{y}_2} A_{\mathfrak{y}_1}$, also die Mitten der Kugeln, welche das Vierseit $a_1 b_1 a_2 b_2$ in seinen Ecken $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_1$ berühren. Dagegen bleiben die Kugelmittelpunkte $\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_8$ unabhängig von der Kugelschaar bestehen, da jeder von ihnen zwar in einer der Ebenen $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$, aber nicht in ihrer gemeinschaftlichen Schnittgeraden liegt. Von den beiden im allgemeinen Fall einander gleichzeitig um- und einbeschriebenen Tetraedern

$$\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_4$$
$$\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_8$$

reduciren sich die Ecken des ersteren auf die Schnittpunkte einer Geraden mit den Flächen des zweiten, seine Flächen auf den Ebenenbüschel $J_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$.

Besteht endlich zwischen den Seiten eines Vierseits die Relation $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, so lässt sich in ganz ähnlicher Weise darthun, dass $a_1 b_1 a_2 b_2$ von unendlich vielen Kugeln berührt werden, deren Centren auf der gemeinschaftlichen Geraden der Ebenen $J_{\mathfrak{x}_1} A_{\mathfrak{x}_2} J_{\mathfrak{y}_2} A_{\mathfrak{y}_1}$ liegen. Dieser Geraden gehören auch die im allgemeinen Fall mit $\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_4 \mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_7$ bezeichneten Punkte an; die betreffenden Kugeln berühren in den Ecken $\mathfrak{y}_1 \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{x}_1$. Die Kugelmittelpunkte $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_8$ bleiben unabhängig hiervon bestehen und bilden ein Tetraeder, auf dessen Seiten $\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_4$ liegen. Für die Relation $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ liegen $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_3 \mathfrak{M}_6 \mathfrak{M}_8$ in der Schnittgeraden der Ebenen $A_{\mathfrak{x}_1} J_{\mathfrak{x}_2} A_{\mathfrak{y}_2} J_{\mathfrak{y}_1}$ und auf den Seitenflächen des Tetraeders $\mathfrak{M}_5 \mathfrak{M}_7 \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}_4$.

Es giebt also im allgemeinen acht Kugeln, welche die Seiten eines beliebigen räumlichen Vierseits berühren. Ist in einem räumlichen Vierseit die Summe irgend zweier Seiten gleich der Summe der andern, so wird das Vierseit von unendlich vielen Kugeln berührt, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen; ausserdem giebt es noch vier Berührungskugeln, welche dieser Schaar nicht angehören.

§ 4.

Construirt man von einem Punkte $\mathfrak{x}_1$ der die Kugel $\mathfrak{M}$ im Punkte $\mathfrak{A}_1$ berührenden Tangente a_1 die beiden Tangenten b_1 und c_1, welche die

Kugel in $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ berühren, die Tangente a_2 in $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_2$ schneiden; von $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_2$ die Tangenten c_2 und b_2, welche a_2 in $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ schneiden, die Kugel in $\mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ berühren, so fallen $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ im Allgemeinen nicht zusammen; thäten sie es in einem besonderen Falle, so hätte man ein Tetraeder mit den Gegenkanten a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2, welche sämmtlich von der Kugel $\mathfrak{M}$ berührt werden. Ich bezeichne ein solches Tetraeder zur Abkürzung als T_K.

Durchläuft $\mathfrak{x}_1$ die Gerade a_1, so sind die Punktreihen $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{z}_1$ und ebenso $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_1$ projectivisch, mithin auch $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ unter einander projectivisch; sie können also, ohne congruent zu sein, zwei gemeinschaftliche Punktepaare haben. Diese gemeinschaftlichen Punktepaare sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{f}_1$; ihnen entsprechen auf a_2 $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{A}_2$. In diesen Fällen aber ist das Tetraeder ein uneigentliches; es hat entweder $\mathfrak{A}_1\mathfrak{e}_2$ oder $\mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_2$ zu Doppelecken, die Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{e}_2$ oder $\mathfrak{f}_1\mathfrak{A}_2$ zu vierfachen Kanten, a_1 und a_2 zu einem Paar Gegenkanten. Ausser diesen uneigentlichen Tetraedern giebt es also keine, deren Kanten von $\mathfrak{M}$ berührt werden und für welche die beliebig angenommenen Tangenten a_1a_2 ein Paar Gegenkanten sind. Es muss demnach für a_1a_2 eine Bedingung bestehen; ist eine solche vorhanden, so sind die Punktreihen $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ congruent, jeder Punkt $\mathfrak{x}_1$ auf a_1 kann dann zur Ecke eines T_K gewählt werden, welches dadurch vollständig bestimmt ist*). Da $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ zwei projectivische Punktreihen sind und $\mathfrak{x}_1$ als Element der Punktreihe $\mathfrak{x}$ den Punkt $\mathfrak{y}_1$ ebenso bestimmt wie als Element der Punktreihe $\mathfrak{y}$, so bilden $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ eine Involution mit den Doppelpunkten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$; ebenso $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2$ mit den Doppelpunkten $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$.

Dasselbe Resultat ergiebt sich auf elementarerem Wege: Die Berührungspunkte der Kanten eines T_K liegen nach Seite 329 zu je vieren auf drei sich rechtwinklig schneidenden Kreisen:

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 \equiv \beta, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \equiv \gamma, \quad \mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 \equiv \alpha \text{ **)}.$$

Bezeichne ich den spitzen Neigungswinkel der Tangente a_1 gegen Kreis β mit φ, so ist $\angle\, a_1\gamma = 90^0-\varphi$, und weil b_2 sich an a_1a_2 anlehnt, $\angle\, b_2\beta = \varphi$; $\angle\, b_2\alpha = 90^0-\varphi$, weil $\angle\, \beta\alpha = 90^0$; $\angle\, c_1\alpha = 90^0-\varphi$, $\angle\, c_1\gamma = \varphi$, weil c_1 sich an b_1b_2 anlehnt und $\angle\, \alpha\gamma = 90^0$ ist. Nun ist aber, weil c_1 sich auch

*) Legt man im allgemeinen Falle von $\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1$ weiter die Tangenten b_3c_3 bis zum Schnitt mit a_2, von diesen Schnittpunkten aus die Tangenten c_4b_4 u. s. w., so zeigt sich ebenso wie beim Tetraeder, dass die Reihe sich immer schliesst, wenn sie es einmal thut.

**) Die Bezeichnung ist hier, um die frühere nicht zu ändern, nicht ganz symmetrisch gewählt.

an $a_1 a_2$ anlehnt, $\angle\, c_1\gamma = a_1\gamma = 90^0 - \varphi$; mithin ist $\varphi = 90^0 - \varphi$, also $\varphi = 45^0$. Dasselbe gilt für alle Kanten des T_K.

Zwei Tangenten $a_1 a_2$ einer Kugel können nur dann Gegenkanten eines der Kugel umschriebenen T_K sein, wenn sie gegen die Kreise $\beta\gamma$ unter 45^0 geneigt sind; oder wenn die Winkel $\mathfrak{f}_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{f}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{e}_2 = 90^0$ sind.

Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es unendlich viele T_K mit den Gegenkanten $a_1 a_2$. Denn schneide ich die Kreise $\beta\gamma$ rechtwinklig durch einen Kreis α, der durch die zu $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ conjugirte Gerade $\alpha_1\alpha_2$ gehen muss, in $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$, und construire in diesen Punkten die Tangenten $b_1 b_2 c_1 c_2$, welche $a_1 a_2$ schneiden, so sind diese gegen $\beta\gamma$ sowohl wie gegen α unter 45^0 geneigt; es müssen also die Tangenten $c_1 c_2$ auch die Tangenten $b_1 b_2$ schneiden, weil sie gegen deren Halbirungskreis α mit ihnen gleiche Neigung haben. Da nun $a_1 b_1 c_1$ nicht in einer Ebene liegen, so schneiden sie sich in einem Punkte; ebenso $a_1 b_2 c_2$, $a_2 b_1 c_2$, $a_2 b_2 c_1$.

Die Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$, dem Schnittpunkt der Ebenen $\alpha\beta\gamma$, und es ist $\mathfrak{P}\mathfrak{A}_1 . \mathfrak{P}\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{B}_1 . \mathfrak{P}\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{P}\mathfrak{C}_1 . \mathfrak{P}\mathfrak{C}_2$. Die Ebenen $\alpha\beta\gamma$ sind, da die auf ihnen liegenden Kugelkreise einander rechtwinklig schneiden, conjugirt, bilden also ein Polardreiflach mit den Kanten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$. Ist π die Polarebene von $\mathfrak{P}$, so enthält sie die Schnittgeraden $l_1 l_2 l_3$ der Tangentialebenen in $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$. Diese Geraden sind zu $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2$ conjugirt und bestimmen mit ihnen ein Polartetraeder. Demnach werden die sich in l_2 schneidenden Tangentialebenen an $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ durch die conjugirten Ebenen $\gamma\pi$ harmonisch getrennt. Diese vier Ebenen aber schneiden die Gerade a_1 in $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$, a_2 in $\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$; mithin werden die Punkte $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{e}_2$ durch die Ecken aller möglichen T_K harmonisch getrennt. Hierdurch ist die Zusammengehörigkeit der Punkte $\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1$ bestimmt. Es gehören zu einander $\mathfrak{r}_{1\infty}$ und die Mitte $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{f}_1$; ebenso die mit $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1'$ bezeichneten Punkte, welche dem Punkt $\mathfrak{p}_{2\infty}$ zugeordnet sind. Ziehen wir die Lage der Tangenten $b_1 b_2$ in Betracht, so ergiebt sich nach der schon früher angewendeten Ueberlegung: 1) liegen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ auf den Strecken $\mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1'$, so gilt die Relation $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$; 2) liegen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{y}_1$ auf den Strecken $\mathfrak{p}_1\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{p}_1'\mathfrak{A}_1$, oder $\mathfrak{o}\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{r}_{1\infty}\mathfrak{f}_1$, so ist $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$. Hiernach ergeben sich zwei Möglichkeiten der Lage der Kugel zum Tetraeder: 1) die Kugel berührt sämmtliche Kanten des Tetraeders innerhalb der Seitenstrecken; es ist $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2$; 2) die Kugel berührt drei in einer Ebene liegende Kanten z. B. $a_2 b_2 c_2$ auf den

Seitenstrecken, die drei anderen auf den Verlängerungen über die Schnittpunkte mit $a_2 b_2 c_2$ hinaus; alsdann ist $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2$.

Von zwei Kugeln können die Kanten eines Tetraeders nur in dem noch specielleren Falle berührt werden, wenn die Bedingungen 1) und 2) gleichzeitig gelten, das Tetraeder also ein gleichschenkliges mit regulärer Basis ist.

Ist zunächst nur eine die Kugel $\mathfrak{M}$ im Punkte $\mathfrak{A}_1$ berührende Tangente a_1 gegeben, so giebt es durch jeden Punkt $\mathfrak{A}_2$ der Kugel nur eine Tangente a_2, welche mit a_1 als Gegenkante ein T_K bestimmt. Ich finde dieselbe, indem ich in $\mathfrak{A}_2$ die Tangentialebenen α_2 construire, welche a_1 in $\mathfrak{f}_1$ schneiden möge; alsdann ist die in α_2 liegende zu $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{f}_1 \equiv b_\mathfrak{f}$ normale Tangente die verlangte. Jede der verlangten Tangenten a_2 schneidet die in $\mathfrak{A}_1$ auf a_1 normale Tangente $b_\mathfrak{e}$ in einem Punkte $\mathfrak{e}_2$ der zu $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ conjugirten Geraden. Von einem beliebigen Punkte des Raumes aus giebt es zwei Tangenten an $\mathfrak{M}$, welche $b_\mathfrak{e}$ schneiden: *Es giebt durch jeden Punkt des Raumes zwei Tangenten der Kugel $\mathfrak{M}$, welche mit a_1 als Gegenkante je eine Unendlichkeit von Tetraedern T_K erzeugen; ebenso giebt es in jeder Ebene zwei derartige Linien;* denn jede Ebene schneidet $b_\mathfrak{e}$ in einem Punkte, von dem aus, wofern die Ebene die Kugel schneidet, innerhalb der Ebene zwei reelle Tangenten möglich sind.

Sind zwei beliebige Gerade des Raumes $a_1 a_2$ als Gegenkanten eines T_K gegeben, so ist der Berührungspunkt $\mathfrak{A}_1$ auf a_1 noch frei zu wählen; alsdann ist $b_\mathfrak{e} \equiv \mathfrak{A}_1 \mathfrak{e}_2$ diejenige Gerade der Ebene $\mathfrak{A}_1 a_2$, welche durch $\mathfrak{A}_1$ geht und zu a_1 normal ist. Man hat dann, um Punkt $\mathfrak{A}_2$ zu finden, nur $\mathfrak{e}_2 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{e}_2 \mathfrak{A}_1$ zu machen, was auf zwei Arten geschehen kann; alsdann ist der Kugelmittelpunkt $\mathfrak{M}$ als Schnittpunkt der in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ auf $a_1 a_2$ normalen Ebenen mit der Symmetrieebene von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ bestimmt.

Soll ein ebenes Dreiseit $a_2 b_2 c_2$ zu einem T_K ergänzt werden, so gehören diejenigen Kugeln, denen dasselbe umschrieben werden kann, vier Kugelbüscheln an, deren Schnittkreise die vier Berührungskreise von $a_2 b_2 c_2$ sind. Legt man an eine dieser Kugeln von den Punkten $b_2 c_2$, $c_2 a_2$, $a_2 b_2$ aus diejenigen Tangenten, welche die zu $a_2 b_2 c_2$ in ihren Berührungspunkten normalen Tangenten schneiden, so sind dies die Kanten von zwei derselben Kugel umschriebenen Tetraedern. Mit gegebenem Radius sind acht das Dreiseit $a_2 b_2 c_2$ berührende Kugeln möglich, wofern der gegebene Radius grösser ist als die Radien jedes der $a_2 b_2 c_2$ berührenden Kreise. Es giebt also im allgemeinen $16T_K$ mit gegebener Basis, welche einer Kugel von gegebenem Radius umschrieben sind. Je zwei dieser T_K sind in Bezug auf die Ebene $a_2b_2c_2$ symmetrisch.

Ein Dreikant $a_1b_1c_1$ lässt sich in sechzehn Arten zu Tetraedern ergänzen, welche derselben Kugel umschrieben sind; je zwei von diesen sind auch hier symmetrisch. Denn es giebt acht Kugeln mit gegebenem Radius, welche ein Dreikant berühren; man erhält die fehlenden Kanten $a_2b_2c_2$, indem man die Ebenen b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 durch die zu $a_1b_1c_1$ in ihren Berührungspunkten normalen Tangenten schneidet und von diesen Schnittpunkten aus die innerhalb der Ebenen möglichen beiden Tangenten an die Kugel legt.

Breslau, den 4. December 1881.