Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1882
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0092
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0092

LOG Id: LOG_0017
LOG Titel: Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

Zur Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen.

(Von Herrn *M. A. Stern* in Göttingen.)

Dass die *Bernoulli*schen Zahlen allmählich über jeden angebbaren endlichen Werth hinaus wachsen, hat schon *Euler* in seiner Differentialrechnung gezeigt. Die einfache Eigenschaft dieser Zahlen aber, dass, von der vierten an gerechnet, jede folgende grösser ist, als die ihr vorhergehende, finde ich in keiner mir bekannten Arbeit über *Bernoulli*sche Zahlen bewiesen oder auch nur ausgesprochen, obgleich der Beweis sehr leicht zu führen ist, wenn man von der bekannten *Euler*schen Definition ausgeht, nach welcher, wenn B_ν die ν^{te} *Bernoulli*sche Zahl bedeutet und $S_{2\nu}$ die Summe der unendlichen Reihe $1+\frac{1}{2^{2\nu}}+\frac{1}{3^{2\nu}}$ etc., die Gleichung

$$B_\nu = \frac{1.2\ldots 2\nu}{2^{2\nu-1}\pi^{2\nu}} S_{2\nu}$$

stattfindet. Denn hieraus folgt

$$(A.) \qquad \frac{B_{\nu+1}}{B_\nu} = \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)}{(2\pi)^2}\,\frac{S_{2\nu+2}}{S_{2\nu}}.$$

Sobald also der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck grösser als die Einheit ist, muss auch $B_{\nu+1} > B_\nu$ sein. Nun ist $S_{2\nu+2} > 1$, ferner $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$, und da allgemein $S_{2\nu} < S_{2(\nu-1)}$, so ist mithin $S_{2\nu} \overline{\overline{<}} \frac{\pi^2}{6}$, also $\frac{S_{2\nu+2}}{S_{2\nu}} > \frac{6}{\pi^2} > 0{,}6$. Ist nun $\nu = 4$, so hat man

$$\frac{9.10.0{,}6}{(2\pi)^2} = \frac{9.10.0{,}6}{39{,}4} > 1,$$

mithin nach $(A.)$

$$B_5 > B_4;$$

um so mehr, wenn $\nu = 5$,

$$\frac{11.12.0{,}6}{(2\pi)^2} > 1,$$

also $B_6 > B_5$. Indem man diese Betrachtung fortsetzt, ergiebt sich also, dass überhaupt $B_{\nu+1} > B_\nu$, sobald $\nu \overline{\overline{>}} 4$.

Hieraus folgt, dass wenn zwei *Bernoulli*sche Zahlen denselben Werth haben sollen, eine derselben B_1 oder B_2 oder B_3 sein muss. *Ein* Fall dieser Art ist bekannt, nämlich $B_2 = B_4 = \frac{1}{30}$. Aus dem Vorhergehenden folgt aber, dass dies der *einzige* Fall ist. Dass nämlich unter den fünf ersten *Bernoulli*schen Zahlen nicht noch einmal eine solche Gleichheit vorkommt, ergiebt sich aus ihren bekannten Werthen. Nun ist $B_1 = \frac{1}{6}$ kleiner als $B_6 = \frac{691}{2730}$, also überhaupt $B_1 < B_\nu$, sobald $\nu > 5$. Ferner sind $B_2 = \frac{1}{30}$ und $B_3 = \frac{1}{42}$ kleiner als $B_5 = \frac{5}{66}$ und daher auch allgemein $< B_\nu$, sobald $\nu > 4$.

Göttingen, den 5. Januar 1882.