

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1882

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0092

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0092

LOG Id: LOG_0017

LOG Titel: Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen.

(Von Herrn *M. A. Stern* in Göttingen.)

Dass die *Bernoulli*schen Zahlen allmählich über jeden angebbaren endlichen Werth hinaus wachsen, hat schon *Euler* in seiner Differentialrechnung gezeigt. Die einfache Eigenschaft dieser Zahlen aber, dass, von der vierten an gerechnet, jede folgende grösser ist, als die ihr vorhergehende, finde ich in keiner mir bekannten Arbeit über *Bernoulli*sche Zahlen bewiesen oder auch nur ausgesprochen, obgleich der Beweis sehr leicht zu führen ist, wenn man von der bekannten *Eulerschen* Definition ausgeht, nach welcher, wenn B_ν die ν te *Bernoulli*sche Zahl bedeutet und $S_{2\nu}$ die Summe der unendlichen Reihe $1 + \frac{1}{2^{2\nu}} + \frac{1}{3^{2\nu}}$ etc., die Gleichung

$$B_\nu = \frac{1 \cdot 2 \dots 2\nu}{2^{2\nu-1} \pi^{2\nu}} S_{2\nu}$$

stattfindet. Denn hieraus folgt

$$(A.) \quad \frac{B_{\nu+1}}{B_\nu} = \frac{(2\nu+1)(2\nu+2)}{(2\pi)^2} \frac{S_{2\nu+2}}{S_{2\nu}}.$$

Sobald also der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck grösser als die Einheit ist, muss auch $B_{\nu+1} > B_\nu$ sein. Nun ist $S_{2\nu+2} > 1$, ferner $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$, und da allgemein $S_{2\nu} < S_{2(\nu-1)}$, so ist mithin $S_{2\nu} \gtrless \frac{\pi^2}{6}$, also $\frac{S_{2\nu+2}}{S_{2\nu}} > \frac{6}{\pi^2} > 0,6$. Ist nun $\nu = 4$, so hat man

$$\frac{9 \cdot 10 \cdot 0,6}{(2\pi)^2} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 0,6}{39,4} > 1,$$

mithin nach (A.)

$$B_5 > B_4;$$

um so mehr, wenn $\nu = 5$,

$$\frac{11 \cdot 12 \cdot 0,6}{(2\pi)^2} > 1,$$

also $B_6 > B_5$. Indem man diese Betrachtung fortsetzt, ergiebt sich also, dass überhaupt $B_{\nu+1} > B_\nu$, sobald $\nu \geq 4$.

Hieraus folgt, dass wenn zwei *Bernoullische Zahlen* denselben Werth haben sollen, eine derselben B_1 oder B_2 oder B_3 sein muss. *Ein* Fall dieser Art ist bekannt, nämlich $B_2 = B_4 = \frac{1}{3\pi}$. Aus dem Vorhergehenden folgt aber, dass dies der *einzig* Fall ist. Dass nämlich unter den fünf ersten *Bernoullischen Zahlen* nicht noch einmal eine solche Gleichheit vorkommt, ergibt sich aus ihren bekannten Werthen. Nun ist $B_1 = \frac{1}{6}$ kleiner als $B_6 = \frac{691}{2730}$, also überhaupt $B_1 < B_\nu$, sobald $\nu > 5$. Ferner sind $B_2 = \frac{1}{3\pi}$ und $B_3 = \frac{1}{4\pi}$ kleiner als $B_5 = \frac{5}{6\pi}$ und daher auch allgemein $B_5 < B_\nu$, sobald $\nu > 4$.

Göttingen, den 5. Januar 1882.
