Ueber eine Anwendung der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf nichthomogene lineare Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Die Hülfsmittel, die in früheren Abhandlungen des Verfassers zur Untersuchung der linearen Differentialgleichungen entwickelt sind (siehe die Uebersicht dieser Abhandlungen in Bd. 96 dieses Journals), werden in der vorliegenden Arbeit auf eine allgemeinere Klasse nichthomogener linearer Differentialgleichungen angewandt. Zum Zwecke der Integration dieser Differentialgleichungen werden die individuellen Integrale hergestellt, deren Ausdrücke den Verlauf der Functionen in der Umgebung der singulären Punkte vollständig enthalten und denselben besonders vermöge der Natur der Exponenten charakterisiren, und es wird die Fortsetzung dieser Integrale ausgedrückt. Die Darstellung der Integrale der Differentialgleichung geschieht alsdann auf Grund der für die Umgebung der singulären Punkte charakteristischen Integralsysteme unter Anwendung einer endlichen Anzahl von Substitutionen.

Die Ermittelung der Ausdrücke der Integrale für die Umgebung der singulären Punkte und der Ausdrücke für die Constanten in den Substitutionen, welche die Fortsetzung der Integrale liefern, sowie die beliebig angenäherte Werthberechnung dieser Ausdrücke beruht auf dem Durchgange durch die bestimmten Integrale, welche zur Darstellung der durch unbestimmte Integration bei den singulären Punkten gebildeten Functionen in früheren Arbeiten des Verfassers gegeben sind.

Diejenigen linearen homogenen und nichthomogenen Differentialgleichungen, welche in dem Cyklus der von dem Verfasser erschienenen Abhandlungen über allgemeine lineare Differentialgleichungen integrirt sind, und die homogenen linearen Differentialgleichungen mit regulären Integralen oder mit höchstens zwei wesentlich singulären Punkten, von denen einer ein regulärer ist, stellen bei den linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten der Differentialquotienten und einer endlichen Anzahl singulärer Punkte unter einander zusammenhängende Bereiche vor, die ein natürliches Gesammtgebiet bilden. Specielle Convergenzbetrachtungen sind für die Integration dieser Differentialgleichungen nicht erforderlich.

1.

Definition der hier behandelten nichthomogenen linearen Differentialgleichungen.

I. Die nichthomogenen linearen Differentialgleichungen, die hier untersucht werden, sind folgende. Es sei

$$F_m(y,\ x) = q, \tag{1.}$$

wo

$$F_m(y,\ x) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y.$$

Die Coefficienten p sollen rationale Functionen sein, und $F_m(y, x)$ sei ein Differentialausdruck, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist (s. die Abh. des Verf. Bd. 96 dieses Journals). Speciell werde für das Folgende der Fall hervorgehoben, wo man die Natur des Differentialausdruckes $F_m(y, x)$ von vorn herein kennt, wie wenn $F_m(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck oder ein solcher mit constanten Coefficienten ist.

Der zweite Theil q in (1.) sei eine Summe einer endlichen Anzahl von Summanden und jeder Summand ein Product CPQ von folgender Beschaffenheit.

C ist eine Constante irgend welcher Art.

Die Grösse P soll eine allenthalben einwerthige analytische Function sein, die in einer endlichen Anzahl von Punkten in endlicher oder unendlich hoher Ordnung unendlich wird, und zwar sei P ein Product einer rationalen Function $R(x)$ und einer endlichen Anzahl (diese Anzahl $\geqq 0$) von Functionen $F(x)$ von folgender Eigenschaft. *$F(x)$ sei eine allenthalben einwerthige analytische Function, welche einer bekannten homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügt, deren singuläre Punkte, abgesehen von einem Punkte, solche sind, bei denen nur reguläre Integrale vorkommen, und die Entwickelung von $F(x)$ bei einem der letzteren Punkte* *oder bei einem nichtsingulären Punkte $x=a$ nach Potenzen von $x-a$* (bei $a=\infty$ tritt $\frac{1}{x}$ an Stelle von $x-a$) *sei gegeben.* Man kann hierbei voraussetzen, dass $F(x)$ bei jedem Punkte, abgesehen von jenem einen irregulären, *endlich bleibt,* da sonst nach Multiplication mit einer rationalen Function diese Eigenschaft herbeigeführt wird.

Alsdann kann man der Function P, und zwar jedem Factor $R(x)$ und $F(x)$ derselben, bei jedem Punkte x_0 eine Darstellung durch einen *ganzen rationalen* Ausdruck von Elementen geben, von denen das einzelne Element die Form $\sum\limits_0^\infty k_\alpha z^\alpha$ hat, $z=x-x_0$ oder $c_0+c_1(x-x_0)^{-1}$, wo c_0 auch gleich Null sein kann $\left(\text{bei } x_0=\infty \text{ steht } \frac{1}{x} \text{ statt } x-x_0\right)$, z also eine *ganze* rationale Function von $x-x_0$ oder $(x-x_0)^{-1}$ ist, oder z constant gleich z_1, und wo die Grössen k_α, c_0, c_1, z_1 *bekannte rationale Ausdrücke gegebener Constanten* sind.

Der reguläre Punkt, bei dem die Entwickelung von $F(x)$ gegeben ist, sei $x=a$, der einzige irreguläre Punkt der Differentialgleichung für $F(x)$ sei $x=b$. Es wird die Substitution angewandt $\frac{x-a}{x-b}=cw$, daher $x-a=\frac{(a-b)cw}{1-cw}$, bezüglich, wenn $a=\infty$, $\frac{1}{x-b}=cw$, daher $\frac{1}{x}=\frac{cw}{1+bcw}$ und, wenn $b=\infty$, $x-a=cw$, c eine Constante. Dem Punkte $x=a$ entspricht dann $w=0$, dem Punkte $x=b$ $w=\infty$. Die Punkte im Endlichen in der von w abhängigen Differentialgleichung für $F(x)$ sind reguläre. Die Entwickelung der von w abhängenden Function $F(x)=G(w)$ nach Potenzen von w mit ganzen positiven Exponenten ist alsdann bekannt, die Coefficienten der Entwickelung sind rationale Ausdrücke gegebener Constanten; aus der Differentialgleichung ergiebt sich eine Recursionsformel, welche die Coefficienten linear und homogen enthält mit constanter Anzahl der Glieder, und diese Entwickelung gilt gemäss der Voraussetzung in Bezug auf $F(x)$ für beliebige w. Um nun die Darstellung der Function $F(x)$ bei einem Punkte x_0, der von a und b verschieden ist, dem $w=w_0$ entspricht, zu erhalten, kann man die Differentialquotienten von $F(x)$ aus denen von $G(w)$ nach w und denen von w nach x genommen bilden für $x=x_0$ und aus der Differentialgleichung für $F(x)$, da x_0 ein regulärer Punkt ist, die Entwickelungen derjenigen linearunabhängigen Integrale nach Potenzen von $x-x_0$ entnehmen, welche bei $x=x_0$ einwerthig bleiben. Man kann hier solche Entwickelungen nehmen, in denen die Anfangspotenzen von einander verschieden sind (vgl. die Abh. des Verf. Bd. 87 S. 286) und nun vermittelst derjenigen, die in x_0 endlich bleiben, $F(x)$ ausdrücken $\left(\text{bei } x_0 = \infty \text{ ist } x = \frac{1}{t}\right.$ zu setzen$\left.\right)$. Bei $x = a$ besteht die ursprüngliche Entwickelung. Bei $x = b$ tritt in die Entwickelung von $G(w) = \sum_0^\infty c_\alpha w^\alpha$ für cw ein $1+\frac{b-a}{x-b}$, bezüglich $\frac{1}{x-b}$ oder $x-a$.

Eine solche Function $F(x)$ wird z. B. durch eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten gegeben, die nur zwei, jedoch beliebig im Endlichen oder Unendlichen gelegene, singuläre Punkte besitzt, wenn der eine dieser Punkte ein regulärer ist und bei demselben eine einwerthige und stetige Entwickelung besteht; auch dürfen ausserdem noch ausserwesentlich singuläre Punkte vorkommen (oder durch eine Differentialgleichung, in welcher nur ein singulärer und zwar irregulärer Punkt vorhanden ist). Es ergiebt sich dies durch Einführung der vorhin bezeichneten Variabeln w. Ein besonderer Fall von einem Producte von Functionen $F(x)$ der letztgenannten Art wird durch e^U gegeben, wo U eine rationale Function ist, die in Partialbrüche zerlegt zum constanten Gliede Null hat.

Der Factor Q in dem oben genannten Producte CPQ in q, dem zweiten Theile der Differentialgleichung (1.), soll eine bestimmte Function sein, die einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügt, deren Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist. Es soll jedoch in Bezug auf die Grösse Q hier vorzugsweise folgende speciellere Voraussetzung gemacht werden. Q sei ein Product $Q'Q''$, Q' ein Ausdruck $(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\dots(x-a_l)^{r_l}$, wo die r beliebig sind, Q'' sei eine algebraische Function. Für die letztere kann man die homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher dieselbe genügt und deren Ordnung gleich der Anzahl der linearunabhängigen Zweige derselben ist, herleiten (siehe die Abh. des Verf. Bd. 104 dieses Journals). Ist $F_m(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck oder ein solcher mit constanten Coefficienten, so ist alsdann die Art der Differentialgleichung (1.) von vorn herein zu erkennen. ***Dieser Fall unter den hier betrachteten nichthomogenen linearen Differentialgleichungen hat also eine allgemeinere praktische Bedeutung.***

II. Wenn $f(y, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck ist, und Y das vollständige Integral von $f = 0$, y_1 ein Integral von $f(y, x) = q_1$, y_2 ein Integral von $f(y, x) = q_2$, so ist $Y + y_1 + y_2$ das vollständige Integral von $f(y, x) = q_1 + q_2$. Demnach reducirt sich die Integration der Differentialgleichung (1.) auf den Fall, dass nur ein Summand der oben bezeichneten Art auf der rechten Seite steht, und hier tritt die Constante C als Factor aus dem Integrale heraus, es bleibt also die Differentialgleichung zu untersuchen

$$(2.) \qquad F_m(y, x) = PQ.$$

Es besteht nun für die nichthomogenen linearen Differentialgleichungen derselbe Grundsatz wie für die homogenen und wird in gleicher Weise bewiesen, dass, wenn in (1.) die Coefficienten p und die Grösse q in einem Kreise einwerthige und stetige analytische Functionen sind, es für das ganze Gebiet innerhalb dieses Kreises eine und nur eine einwerthige und stetige analytische Function giebt, welche der Differentialgleichung genügt und mit ihren $m-1$ ersten Ableitungen im Mittelpunkt des Kreises vorgeschriebene Werthe annimmt.

Als singuläre Punkte der Differentialgleichung (2.) im Endlichen werden nun ausser den Punkten, in denen die rationalen Coefficienten p unendlich werden, die Unstetigkeitspunkte der einwerthigen Factoren von P und ferner folgende Punkte in Bezug auf den Factor Q angenommen. Wenn Q die Form $Q'Q''$ hat, $Q' = (x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\dots(x-a_l)^{r_l}$ ist, Q'' eine algebraische Function, so werden noch als singuläre Punkte der Differentialgleichung hinzugenommen die Punkte a_1 bis a_l und von Seiten der algebraischen Function, wenn der Coefficient der höchsten Potenz in der irreductiblen Gleichung für Q'' gleich A_0 ist, und $A_0 Q'' = s$ in der Gleichung gesetzt ist, die Punkte, in denen A_0, und diejenigen, in denen die Discriminante der Gleichung für s verschwindet. Wenn Q als eine bestimmte Function, die einer in I. bezeichneten homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten genügt, definirt ist, so werden die Punkte, in denen die Coefficienten dieser Differentialgleichung unendlich werden, als singuläre Punkte hinzugenommen.

Bei $x = \infty$ ist $x = t^{-1}$ einzusetzen. Wenn $F_m(y, x) = (-t^2)^m F'_m(y, t)$ gesetzt wird, so folgt aus (2.)

$$(3.) \qquad F'_m(y, t) = (-t^2)^{-m} P(t^{-1}) Q(t^{-1}),$$

und die Functionen $(-t^2)^{-m}P(t^{-1})$ und $Q(t^{-1})$ haben als Functionen von t dieselbe Beschaffenheit, wie $P(x)$ und $Q(x)$ als Functionen von x. Die Behandlung der Differentialgleichung (3.) bei $t=0$ ist also dieselbe wie die von (2.) bei einem Punkte x im Endlichen. In die erhaltenen Ausdrücke der Integrale ist dann $t=x^{-1}$ einzusetzen.

Die Entwickelung der Integrale der Differentialgleichung (2.) in einem Kreise, der keinen singulären Punkt enthält, erfolgt unmittelbar aus (2.) (vgl. Nr. 4 II). Eine Recursionsformel für die Coefficienten dieser Entwickelung, die eine constante Anzahl der Glieder linear und homogen enthält, wird in Nr. 3 gegeben.

Wird durch die singulären Punkte im Endlichen und den Punkt $x=\infty$ eine in sich zurücklaufende Linie gezogen, so verläuft in jedem der beiden von dieser Linie begrenzten Gebieten ein Integral von (2.) einwerthig. Um einen singulären oder nichtsingulären Punkt a im Endlichen als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, der durch den nächsten singulären Punkt geht. Das Gebiet innerhalb dieses Kreises wird der ***Bezirk*** des Punktes a genannt. Der Bezirk von $x=\infty$ ist das Gebiet, welches von dem Kreise um den Nullpunkt als Mittelpunkt, der durch den entferntesten im Endlichen liegenden singulären Punkt geht, begrenzt wird und $x=\infty$ enthält. Es werden nun bei jedem singulären Punkte Entwickelungen der Integrale von (2.) gegeben, die wenigstens in dem Bezirke dieses Punktes gelten (Nr. 2, Nr. 3). Aus den Ausdrücken, die auf diese Entwickelungen führen, ergeben sich die Substitutionsconstanten bei Umgang um einen singulären Punkt (Nr. 6). Durch Anwendung einer rationalen Substitution ersten Grades werden aus denselben Ausdrücken solche Entwickelungen der Integrale hergeleitet, ***die in einem beliebigen Kreise gelten, der von singulären Punkten nur jenen einen im Innern enthält*** (Nr. 3). Auf der Anwendung dieser Entwickelungen beruht die Ermittelung der Substitutionsconstanten bei Uebergang von einem singulären Punkte zu einem anderen und die Darstellung der Integrale bei der Fortsetzung (Nr. 5, Nr. 7).

2.

Die Form der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte.

I. Die linearunabhängigen Integrale der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ bei einem Punkte $x=a$ seien unter der Form

$$\mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\dots\int\mu_{\alpha-1}^{-1}\mu_\alpha\,dx \qquad (1.) \qquad (\alpha=1,\dots m)$$

aufgestellt, wo die Grössen μ gemäss der Voraussetzung, die in Betreff des Differentialausdruckes $F_m(y, x)$ in Nr. 1 gemacht ist, normale Elementarintegrale sind (s. Abh. Bd. 96 S. 189). Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$(2.)\qquad F_m(y, x) = q$$

bei diesem Punkte geht dann aus der Summe hervor, in welcher der Ausdruck

$$(3.)\qquad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\ldots\int dx\,\mu_{m-1}^{-1}\mu_m\int\mu_m^{-1}q\,dx$$

zu den Integralen (1.), diese mit willkürlichen Constanten multiplicirt, addirt ist. (Vgl. Abh. Bd. 96 Nr. 2).

q ist hier die Grösse PQ (Nr. 1) und hat bei $x=a$, der ein singulärer Punkt (Nr. 1 II) der Differentialgleichung (2.) sein soll, eine Entwickelung folgender Art. P ist bei $x=a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und hat in dem Bezirk von $x=a$ eine Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten. Q ist ein Product $Q'Q''$, wo $Q'=(x-a_1)^{r_1}\ldots(x-a_l)^{r_l}$ bei $x=a$ die Entwickelung $(x-a)^{\varkappa}\chi(x-a)$ hat, χ bei $x=a$ einwerthig und stetig ist, und wo Q'' eine algebraische Function ist. Die Zweige dieser Function setzen sich linear mit bekannten constanten Coefficienten aus den Integralen der linearen Differentialgleichung der algebraischen Function zusammen, nämlich der homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, der diese Function genügt, und deren Ordnung gleich der Anzahl der linearunabhängigen Zweige ist (siehe die Abh. des Verf. Bd. 104 dieses Journals). Ein solches Integral der Differentialgleichung für Q'' hat die Form $(x-a)^{l}\psi(x-a)$, wo $\psi(x-a)$ bei $x=a$ einwerthig und stetig und die Entwickelung von $\psi(x-a)$ nach Potenzen von $x-a$ bekannt ist. Das einzelne derartige Integral, mit Q' multiplicirt, wird an Stelle von Q gesetzt. In dem allgemeinen in Nr. 1 I. angegebenen Falle tritt für Q ein Ausdruck

$$(4.)\qquad \nu_1\int dx\,\nu_1^{-1}\nu_2\int\ldots\int\nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx \qquad (\mathfrak{b}=1,\ldots\mathfrak{c})$$

ein, wo die ν normale Elementarintegrale sind und die Ausdrücke (4.) für $\mathfrak{b}=1,\ldots\mathfrak{c}$ die Differentialgleichung von Q erfüllen. Der vorige Fall ist hierin für $\mathfrak{b}=1$ enthalten.

Der Ausdruck (4.) für $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1$ wird mit der Entwickelung von P multiplicirt, alsdann wird die erhaltene Grösse an Stelle von q in (3.) eingesetzt. Bei den Integrationen in (4.) und in (3.) wird jedesmal das constante Glied annullirt. Der Ausdruck von $\nu_{\mathfrak{b}_1}$ soll den Exponenten r enthalten.

Für das auf diese Weise hergestellte Integral (3.) ergiebt sich als allgemeine Form der Function dieselbe, wie bei den Integralen (1.) der homogenen linearen Differentialgleichung $F_m = 0$, nämlich

$$(5.)\quad (x-a)^r\{\varphi_1(x-a)+\varphi_2(x-a)\log(x-a)+\cdots+\varphi_\tau(x-a)(\log(x-a))^{\tau-1}\},$$

wo die Grössen φ Functionen von x sind, von denen zunächst ermittelt ist, dass sie in einem gewissen Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige und stetige analytische Functionen sind. Nun ergiebt sich in Bezug auf diese Functionen φ durch dasselbe Verfahren wie bei homogenen linearen Differentialgleichungen (vgl. Abh. Bd. 96 S. 239) Folgendes. Der Umgang um $x = a$ wird in dem Integrale (3.) vollzogen, in welchem also an Stelle von q steht PQ, und für Q der Ausdruck (4.) für $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$. Das Resultat des Umganges setzt sich linear und homogen mit constanten Coefficienten aus denjenigen Integralen (1.) und (3.), bei welchen in (4.) $\mathfrak{b} = 1, \dots \mathfrak{b}_1$ ist, zusammen, deren Ausdrücke der Form (5.) denselben Exponenten r (abgesehen von einer ganzen Zahl) wie in $\nu_{\mathfrak{b}_1}$ enthalten. Aus dieser Gleichung gehen alsdann die Relationen hervor, dass die in dem Ausdrucke des Integrales (5.) vorkommenden Factoren der Logarithmenpotenzen, von $\log(x-a)$ an, linear und homogen mit constanten Coefficienten aus den in den vorhergehenden Integralen enthaltenen Factoren der Logarithmenpotenzen von $(\log(x-a))^0$ an sich zusammensetzen. Durch diese Relationen in Verbindung mit dem Umstande, dass in einem einfach zusammenhängenden Gebiete, in welchem kein singulärer Punkt der Differentialgleichung Nr. 1 (2.) liegt, die betrachteten Integrale bei der Fortsetzung einwerthig und stetig bleiben, ergiebt sich dann successive für die Functionen φ die folgende allgemeine Eigenschaft:

Alle Functionen $\varphi(x-a)$ in den Ausdrücken der Form (5.) *der Integrale* (1.) *und* (3.) *bleiben in einem beliebigen Kreise, der von singulären Punkten der Differentialgleichung Nr. 1* (2.) *nur den Punkt a im Innern enthält, abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen.*

In dem Bezirke von $x = a$ (Nr. 1 II) besteht dann die Entwickelung der Functionen φ durch die Summe von zwei Potenzreihen, die nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, bezüglich negativen ganzzahligen Exponenten fortschreiten.

II. Man kann auch auf die Differentialgleichung (2.) die Methode der Variation der Constanten anwenden und aus den erhaltenen Ausdrücken die Form der Integrale in dem Bezirke von $x = a$ bestimmen, so wie auch in ähnlicher Weise, wie in Nr. 3 I angegeben ist, in demselben Bezirke die Darstellung dieser Integrale durchführen; die Ableitungen eines Integrales (1.) werden dabei an dem Ausdrucke (1.) gebildet. In diesem Falle wird bei Anwendung der in Nr. 3 II behandelten Transformation durch eine rationale Substitution ersten Grades zunächst aus der transformirten Differentialgleichung (vgl. Abh. Bd. 96 S. 257) selbst vermittelst der Methode der Variation der Constanten gezeigt, dass die Entwickelung der Integrale in dem dieser Differentialgleichung angehörenden Bezirke des singulären Punktes gilt; die Transformation der Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung geschieht dann, wie dort angegeben. Ebenso erfolgt die Werthberechnung der Integrale nach den Angaben von Nr. 4. Die Constanten bei der Fortsetzung sind nach Nr. 7 zu bestimmen.

Die in I angewandte Methode der wiederholten Integrationen ist jedoch von wesentlicher Bedeutung, wenn es sich um die Untersuchung der Art der Constanten in den Substitutionen bei Umgang um einen singulären Punkt handelt (Nr. 6), so wie bei der Ermittelung, ob Logarithmen in die Ausdrücke der Integrale eingehen (Nr. 8).

Vermittelst der Methode der Variation der Constanten kann man auch Differentialgleichungen Nr. 1 (2.) behandeln, in denen an Stelle von $F_m(y, x) = 0$ oder der Differentialgleichung für Q solche Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten stehen, in denen nur zwei wesentlich singuläre Punkte, von denen einer ein regulärer ist, vorkommen. Die Integrale letzterer Differentialgleichungen gehen aus den Integralen derjenigen hervor, in welcher durch eine rationale Substitution ersten Grades der irreguläre Punkt ins Unendliche verlegt ist, welche daher durch die Entwickelungen regulärer Integrale, die allenthalben im Endlichen gelten, integrirt werden. In Betreff der Darstellung der Integrale jener Differentialgleichungen vgl. Nr. 1 I und Abh. Bd. 96 Nr. 15 II C, III.

Es werde noch als Zusatz zu Abh. Bd. 96 Nr. 15 bemerkt, dass, wenn $F_m(y, x)$ ein System normaler Differentialausdrücke ist, die Differentialgleichung $\Phi(z, x) = 0$, welcher der erste Differentialquotient $z = \frac{dy}{dx}$ der Integrale von $F_m = 0$ und nur diese Integrale genügen, Φ selbst als ein System normaler Differentialausdrücke enthält, dessen Bestandtheile der

Reihe nach dieselben determinirenden Factoren wie in F_m haben. Man erhält diese Differentialgleichung, wenn man $F_m(y, x)$ durch den Coefficienten von y, falls derselbe von Null verschieden ist, dividirt, alsdann differentiirt und in diesem Falle, sowie, wenn der Coefficient von y in F_m verschwindet, $\frac{dy}{dx} = z$ setzt. Bei einem einzigen normalen Ausdrucke ergiebt sich das Gesagte aus der Natur der Integrale. In Bezug auf ein System werde die Behauptung an dem Schema von drei Bestandtheilen nachgewiesen:

$$(6.)\qquad S_1(y, x) = y_1,\quad S_2(y_1, x) = y_2,\quad S_3(y_2, x).$$

Aus diesem folgt

$$(7.)\qquad A_1 S_1(y, x) = y'_1,\quad A_2 S_2(A_1^{-1} y'_1, x) = y'_2,\quad A_3 S_3(A_2^{-1} y'_2, x),$$

wo A_r^{-1} der Coefficient von y'_{r-1} in dem Ausdrucke $S_r(A_{r-1}^{-1} y'_{r-1}, x)$, und wenn dieser Coefficient gleich Null, der Coefficient der niedrigsten Ableitung. Sind die Coefficienten der nullten Ableitung in allen Bestandtheilen von (7.) gleich 1, so wird (7.) differentiirt und $\frac{dy}{dx} = z$ gesetzt; hierdurch ergiebt sich

$$(8.)\qquad \begin{cases} z = \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx} A_1 S_1(y, x) = \frac{dy'_1}{dx}, \\ \frac{d}{dx} A_2 S_2(A_1^{-1} y'_1, x) = \frac{dy'_2}{dx},\quad \frac{d}{dx} A_3 S_3(A_2^{-1} y'_2, x). \end{cases}$$

Ist aber von dem letzten Bestandtheile in (7.) an gerechnet der Coefficient einer nullten Ableitung gleich Null, so sind nur die dem bezüglichen Bestandtheile vorhergehenden Bestandtheile in (7.) zu differentiiren und $\frac{dy}{dx} = z$ zu setzen, die übrigen Bestandtheile bleiben unverändert. In beiden Fällen wird das System gleich

$$(9.)\qquad B_1 T_1(z, x) = z_1,\quad B_2 T_2(z_1, x) = z_2,\quad B_3 T_3(z_2, x),$$

wo die T normale Ausdrücke der Reihe nach mit den determinirenden Factoren der S, die B rational sind, wie aus der Beschaffenheit der Integrale hervorgeht, wenn die einzelnen Bestandtheile gleich Null gesetzt werden. Wird nun

$$(10.)\qquad \begin{cases} B_1^{-1} T_2(B_1 z'_1, x) = U_1(z'_1, x), \\ B_1^{-1} B_2^{-1} T_3(B_1 B_2 z'_2, x) = U_2(z'_2, x) \end{cases}$$

gesetzt, so sind U_1, U_2 normale Ausdrücke mit den determinirenden Factoren von bezüglich T_2, T_3. Das System (9.) wird gleich

$$(11.)\qquad T_1(z, x) = z_1', \quad U_1(z_1', x) = z_2', \quad B_1 B_2 B_3 U_2(z_2', x),$$

die verlangte Differentialgleichung daher

$$(12.)\qquad T_1(z, x) = z_1', \quad U_1(z_1', x) = z_2', \quad U_2(z_2', x) = 0.$$

3.

Die Darstellung der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte.

I. *A.* Es ist die Entwickelung des in Nr. 2 bei (3.) und (4.) definirten Integrals unter der Form Nr. 2 (5.) in dem Bezirke des Punktes $x = a$ darzustellen. Zu dem Zwecke werden die Integrationen in Nr. 2 (3.) successive vermittelst der bestimmten Integrale ausgedrückt, die in Abh. Bd. 96 Nr. 16 dieses Journals angegeben sind. Man erhält dadurch die Grössen $\varphi(x-a)$ in Nr. 2 (5.) ausgedrückt durch eine Summe einer endlichen Anzahl von bestimmten Integralen, und dieser Ausdruck gilt in einem Kreisringe um $x = a$ als Mittelpunkt in dem Bezirke dieses Punktes. In Bezug auf diesen Ausdruck werde noch Folgendes bemerkt. An Stelle der Grösse Q in $PQ = q$ in Nr. 2 (3.) steht ein einzelnes Integral der Differentialgleichung für Q Nr. 2 (4.). Ein solches Integral Q kann mit einem bereits ermittelten constanten Factor multiplicirt sein, vgl. Nr. 5. Dieser constante Factor tritt aus dem Integrale Nr. 2 (3.) heraus, und es handelt sich also um die Entwickelung des übrig bleibenden Ausdruckes. Q ist in dem allgemeinen in Nr. 1 I bezeichneten Falle selbst durch Anwendung der oben genannten bestimmten Integrale (Abh. Bd. 96 Nr. 16 dieses Journals) ausgedrückt, und es werden dann in Nr. 2 (3.) successive weiter diese bestimmten Integrale zum Ausdruck der Integralfunctionen angewandt.

Nun handelt es sich darum, die Coefficienten in der Entwickelung von $\varphi(x-a)$ nach Potenzen von $x-a$ mit positiven und negativen ganzzahligen Exponenten, die in dem Bezirke von $x-a$ gilt, darzustellen.

Diese Coefficienten werden durch bestimmte Integrale gegeben, unter dem Integralzeichen steht der vorhin genannte Integralausdruck von $\varphi(x-a)$ vermittelst bestimmter Integrale. Dieser Integralausdruck zerfällt in eine Summe von Integralausdrücken in endlicher Anzahl; daher ist die Integration, die auf einen Coefficienten von φ führt, über diese einzelnen Summanden zu erstrecken, und es sind die Resultate zu addiren. Um nun die Darstellung einer solchen Integration zu erhalten, wird folgendes Verfahren angewandt (siehe Abh. Bd. 96, Nr. 17 dieses Journals). Die sämmtlichen

Grössen unter den Integralzeichen werden unter die Gesammtheit der Integralzeichen gestellt. Wird nun die Darstellung der Function P in Nr. 1 I. berücksichtigt, so ergiebt sich, dass unter der Gesammtheit der Integralzeichen ein ganzer rationaler Ausdruck von Potenzreihen mit positiven ganzzahligen Exponenten steht, in denen die Basis der Potenz von verschiedenen Variabeln oder auch von Constanten abhängig ist und zwar die Form $a+bs$ hat, wo a und b Constanten sind, a oder b auch Null sein können, s ein Product von Variabeln in endlicher Anzahl v oder v^{-1} und w, jede im ersten Grade, ist, und wo die Constanten a und b und die Coefficienten in diesen Potenzreihen bekannte rationale Ausdrücke gegebener Constanten sind. Ausserdem kommt unter der Gesammtheit der Integralzeichen noch als Factor ein Product von Grössen vor, welches l. c. durch A bezeichnet ist, die aber bei den Integrationen wieder wegfallen. Nun wird die Grösse, welche unter der Gesammtheit der Integralzeichen steht, in eine einfach unendliche Reihe entwickelt, indem die einzelnen Reihen nach dem Schema für die Multiplication von unbedingt convergirenden Reihen, in denen alle Stellenzeiger positiv sind, mit einander multiplicirt werden. Die hierdurch erhaltene Reihe lässt sich in den einzelnen Gliedern integriren. Die Integrale sind solche über die Peripherie des Kreises um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius 1 und ergeben sich unmittelbar. Als Gesammtresultat für die Darstellung der Coefficienten in der Entwickelung von $\varphi(x-a)$ nach Potenzen von $x-a$ in dem Bezirke von $x=a$ erfolgt auf solche Weise dieses:

Jeder dieser Coefficienten wird durch eine einfach unendliche Reihe von bekanntem Bildungsgesetze dargestellt, deren Glieder rationale Ausdrücke gegebener Constanten sind.

B. Für diese Coefficienten erhält man nun in folgender Weise eine Recursionsformel, die eine constante Anzahl der Glieder linear und homogen enthält:

Man kann für die Entwickelung Nr. 2 (5.) eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten aufstellen, welcher dieselbe genügt. Aus zwei homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten für y und z lässt sich eine solche, der das Product yz genügt, herleiten (siehe *C.*). Nun genügen die einzelnen Factoren von P solchen Differentialgleichungen, und es giebt für die Function Q eine solche, daher auch für das Product PQ. (Ebenso würde es sein, wenn mehrere Functionen PQ zu einer Summe vereinigt werden (siehe Abh. Bd. 96 Nr. 8

dieses Journals.)) In die erhaltene Differentialgleichung für PQ wird $F_m(y,x)$ eingesetzt, so ergiebt sich eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, welcher die Function Nr. 2 (3.), in welcher Q irgend ein Integral der Differentialgleichung für Q sein kann, daher die Entwickelung Nr. 2 (5.) genügt.

Aus dieser Differentialgleichung kann man nun nach den allgemeinen Sätzen, die in Abh. Bd. 96 Nr. 15 dieses Journals entwickelt sind, eine solche homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 herleiten, welcher die Functionen $(x-a)^r\varphi(x-a)$ in Nr. 2 (5.) genügen, ohne dass man diese Functionen bereits kennt. Für die Zahl τ in einem solchen Ausdrucke wie Nr. 2 (5.), in welchem φ_τ auch Null sein darf, kann man hierbei eine Zahl nehmen gleich oder grösser als die Anzahl der Exponenten von $x-a$ in den Grössen μ und ν_1 bis $\nu_{\mathfrak{b}_1}$ Nr. 2 (3.) und (4.), die sich von dem Exponenten r in $\nu_{\mathfrak{b}_1}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Diese homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die Functionen $(x-a)^r\varphi(x-a)$ in Nr. 2 (5.) genügen, liefert die gesuchte Recursionsformel für die Coefficienten der Entwickelung (siehe Abh. Bd. 96 Nr. 15 dieses Journals).

C. Für die in *B.* gemachten Untersuchungen ist noch hinzuzufügen, dass man aus zwei homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten für y und z bekanntlich eine solche herleiten kann, der das Product yz genügt (siehe z. B. *Besso* in dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. XVI, Jahrgang 1884 S. 272). Dieses geschieht auf folgende Weise. Die Differentialgleichung für y sei $m$ter, die für z $n$ter Ordnung, $yz=u$. Die Differentialquotienten von u bis zur mnten Ordnung werden vermittelst der Differentialgleichungen für y und z linear durch die mn Producte $\frac{d^ry}{dx^r}\frac{d^sz}{dx^s}$ $(r=0,\dots m-1,\ s=0,\dots n-1)$ ausgedrückt. Steht in diesem System von $mn+1$ linearen Gleichungen Null auf einer Seite, so muss die Determinante des Gleichungssystems verschwinden. Dieses ist die gesuchte Differentialgleichung, falls diejenige Determinante, welche den Coefficienten von $\frac{d^{mn}u}{dx^{mn}}$ darstellt, nicht verschwindet. Verschwindet aber letztere Determinante, so kann man aus Unterdeterminanten derselben solche Factoren, die nicht alle verschwinden, bilden, dass, wenn man mit denselben die mn ersten Gleichungen multiplicirt und addirt, die Producte $\frac{d^r y}{dx^r}\frac{d^s z}{dx^s}$ ausfallen, alsdann ist dieses die gesuchte Differentialgleichung.

II. *A.* Das in Nr. 2 bei (3.) und (4.) definirte Integral war unter der Form Nr. 2 (5.) ausgedrückt.

Es soll nun die Entwickelung dieses Integrals in einem beliebigen Kreise C, der von singulären Punkten der Differentialgleichung Nr. 1 (2.) ***nur den Punkt a im Innern enthält, dargestellt werden.*** Auf der Peripherie dieses Kreises sei ein Punkt b angenommen, alsdann werde der Kreis durch eine rationale Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ conform auf den Kreis in der ξ-Ebene um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgebildet, so dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$, dem Punkte $x = b$ der Punkt $\xi = 1$ entspricht (Vgl. Abh. Bd. 96 Nr. 20 dieses Journals). Diese Substitution ist, wenn c der Mittelpunkt des Kreises C:

$$(1.)\qquad x = c+(b-c)\frac{\frac{1-d}{1-d'}\xi+d}{\frac{1-d}{1-d'}d'\xi+1},$$

$d = \frac{a-c}{b-c}$, d' der conjugirte Ausdruck von d. Nach den allgemeinen Ausdrücken einer rationalen Substitution ersten Grades

$$(2^a.)\qquad x = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},$$

$$(2^b.)\qquad (\gamma\xi+\delta)(-\gamma x+\alpha) = \alpha\delta-\beta\gamma,$$

$$(2^c.)\qquad \xi = \frac{\delta x-\beta}{-\gamma x+\alpha}$$

ergeben sich aus (1.), wenn a oder b durch x_0, der entsprechende Werth 0 bezüglich 1 von ξ durch ξ_0 bezeichnet wird, die Ausdrücke

$$(3^a.)\qquad x-x_0 = \frac{A(\xi-\xi_0)}{B(\xi-\xi_0)+1},$$

$$(3^b.)\qquad (B(\xi-\xi_0)+1)(-B(x-x_0)+A) = A,$$

$$(3^c.)\qquad \xi-\xi_0 = \frac{x-x_0}{-B(x-x_0)+A}.$$

Innerhalb des Kreises C sind nach Nr. 2 die Functionen φ in dem Ausdrucke Nr. 2 (5.) des darzustellenden Integrales, abgesehen von $x = a$, einwerthige und stetige analytische Functionen. Wird nun die Substitution (1.) angewandt, so geht daher der Ausdruck Nr. 2 (5.) über in einen Ausdruck

$$(4.)\qquad \xi^r\{\psi_1(\xi)+\psi_2(\xi)\log\xi+\cdots+\psi_\tau(\xi)(\log\xi)^{\tau-1}\},$$

wo die Grössen $\psi(\xi)$ in dem Kreise um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1, abgesehen von $\xi = 0$, einwerthige und stetige analytische Functionen sind. Die Functionen ψ haben daher für das Gebiet dieses Kreises eine Entwickelung durch die Summe von zwei Potenzreihen nach Potenzen von ξ mit positiven, bezüglich negativen ganzzahligen Exponenten. Die Coefficienten dieser Entwickelung sind darzustellen (siehe *B.*). *Wird alsdann in* (4.) *für* ξ *sein Ausdruck durch* x (3^c.) $\xi_0 = 0$, $x_0 = a$ *eingesetzt, so erhält man eine Entwickelung des Integrales Nr.* 2 (3.), *welche in dem Kreise C gilt.*

Man kann auch allein in die Functionen $\varphi(x-a)$ in Nr. 2 (5.) die Substitution (1.) einführen und die hierdurch erhaltenen Functionen von ξ nach Potenzen von ξ entwickeln für das Gebiet des Kreises um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1. Die Coefficienten der Entwickelung werden auf dieselbe Weise wie vorhin (siehe *B.*) dargestellt. Wird dann für ξ sein Ausdruck durch x (3^c.) eingesetzt, so erhält man *den Ausdruck Nr.* 2 (5.) *selbst in dem Kreise C entwickelt.*

B. Die Coefficienten in der Entwickelung der Grössen $\psi(\xi)$ (4.) nach Potenzen von ξ sind auszudrücken, diese Coefficienten werden durch bestimmte Integrale gegeben, welche darzustellen sind.

Es werde um $x = x_0$ ($x_0 = a$) als Mittelpunkt ein Kreis in dem Bezirke von a so genommen, dass in (3^b.) Mod. $\frac{B}{A}(x-x_0) < 1$ ist. Diesem Kreise K entspricht gemäss (3^b.) ein von einem Kreise K' begrenztes Gebiet von ξ, innerhalb dessen $\xi_0 = 0$ liegt, sodass in diesem Gebiete $B(\xi-\xi_0)+1$ nicht verschwindet. Hieraus ergiebt sich, dass die Functionen $\psi(\xi)$ (4.), indem man auf die Herleitung derselben aus dem Ausdruck Nr. 2 (5.) zurückgeht, in dem Gebiete K', abgesehen von $\xi = 0$, einwerthige und stetige analytische Functionen sind. Das Integral, welches einen Coefficienten in der Entwickelung von $\psi(\xi)$ ausdrückt, kann demnach über einen beliebigen Kreis um $\xi = 0$ in K' erstreckt werden, und es wird über einen solchen Kreis genommen, der einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt in K entspricht. Alsdann wird statt ξ wieder x als Integrationsvariable gemäss (3^c.) genommen und über letzteren Kreis nach x integrirt. Zur Ausführung der Integration wird für $\varphi(x-a)$ der Ausdruck durch bestimmte Integrale I. *A.* zu Grunde gelegt, und der Integrationskreis zur Bestimmung der Coefficienten in dem Entwickelungsgebiete sämmtlicher unter den Integralzeichen vorkommender Potenzreihen angenommen. Nun tritt im übrigen die in I. *A.* angegebene Methode ein.

Man erhält jeden der gesuchten Coefficienten unter der Form einer einfach unendlichen Reihe von derselben Beschaffenheit, wie die in I. *A. für die Coefficienten der Entwickelung von $\varphi(x-a)$ angegebene ist.* (Vgl. Abh. Bd. 96 Nr. 20 I. *B. a* und ausführlicher Abh. Bd. 95 Nr. 4 II. *a* dieses Journals.)

Eine Recursionsformel für diese Coefficienten, die eine constante Anzahl der Glieder linear und homogen enthält, erhält man auf folgende Weise. Es war in I. *B.* eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten ermittelt, welcher das Integral Nr. 2 (3.) genügt. In diese ist für x dieselbe Substitution (1.) einzuführen, wodurch man eine Differentialgleichung erhält, der der Ausdruck (4.) genügt. Alsdann ist, indem für τ dieselbe Zahl wie in I. *B.* genommen wird, auf diese Differentialgleichung weiter das in Abh. Bd. 96 Nr. 15 dieses Journals beschriebene Verfahren anzuwenden, wodurch man für jede der Functionen $\xi^\tau\psi(\xi)$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 erhält, die die gesuchte Recursionsformel liefert. Werden nur die Grössen $\varphi(x-a)$ transformirt, wie am Schlusse von II. *A.* bemerkt ist, so erhält man eine Recursionsformel für die Coefficienten, wenn man in die in I. *B.* ermittelte Differentialgleichung für die $\varphi(x-a)$ die Substitution (1.) einführt.

Wenn in dem Integralausdrucke Nr. 2 (3.), (4.) alle Elemente μ und ν reguläre Elementarintegrale sind und die Factoren $F(x)$ von P in a endlich sind, so wird die Entwickelung von Nr. 2 (5.) die eines regulären Integrales. Diese Entwickelung kann man aufstellen (vgl. Nr. 8), die Substitution (3^a.) direct in dieselbe einführen und die Coefficienten bestimmen; eine Recursionsformel erhält man, wie vorhin angegeben.

C. Die in *B.* gegebene Transformation der Ausdrücke der Integrale Nr. 2 (1.) und (3.), wodurch eine in dem Kreise C gültige Darstellung der Integrale erzielt wird, kommt in Anwendung, wenn die Constanten in den Substitutionen bei Uebergang von einem singulären Punkte zu einem anderen zu ermitteln sind (siehe Nr. 7). Es wird alsdann bei jedem der beiden Punkte ein Integralsystem aufgestellt, welches eine Darstellung hat, wie hier bei $x=a$ die von x abhängende Darstellung der Integrale in dem Kreise C ist. Man kann aber auch, wenn der erste Punkt der Punkt a und der zweite der Punkt b auf der Peripherie des Kreises C ist, ein und dieselbe Substitution (1.) in das Integralsystem bei a und bei b einführen, so dass man die von ξ abhängenden Integrale in dem gemeinschaftlichen Gebiete des Kreises um

$\xi=0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 und eines Kreises um $\xi=1$ betrachtet. Der Kreis C kann dabei auch so gewählt werden, dass ausser dem (singulären oder nicht singulären) Punkte b kein singulärer Punkt auf der Peripherie liegt, und diese Bestimmung wird, wenn bei a und b nur reguläre Integrale vorkommen, aus Gründen der Convergenz der zu reducirenden Ausdrücke der Constanten getroffen (vgl. Abh. Bd. 96 S. 260, Bd. 100 S. 172, 177 dieses Journals; siehe Nr. 7). Die bei dem Punkte b aufgestellten Integrale sind von der Form Nr. 2 (5.), worin b statt a steht. Führt man nun hier die Substitution (1.) oder (3.) für $x_0=b$, $\xi=1$ ein, so erhält man durch dieselben Betrachtungen wie bei (4.) einen Ausdruck

$$(5.)\quad (\xi-1)^r\{\chi_1(\xi-1)+\chi_2(\xi-1)\log(\xi-1)+\cdots+\chi_\tau(\xi-1)(\log(\xi-1))^{\tau-1}\},$$

wo die Grössen χ einwerthige und stetige analytische Functionen sind in einem Kreise um $\xi=1$ als Mittelpunkt, abgesehen von $\xi=1$, der durch den nächsten der Punkte ξ hindurchgeht, welche den in Nr. 1 II. fixirten singulären Punkten x, incl. $x=\infty$ entsprechen. Für das Gebiet dieses Kreises sind die Functionen χ also nach Potenzen von $\xi-1$ entwickelbar. Die Coefficienten in diesen Entwickelungen werden auf dieselbe Weise dargestellt, wie in *B.* angegeben ist.

4.

Berechnung der dargestellten Integrale mit vorgeschriebener Annäherung.

I. Es handelt sich darum, die Functionen $\varphi(x-a)$ in Nr. 2 (5.), die nach I. *A.* der vorigen Nummer durch eine Summe von bestimmten Integralen ausgedrückt sind, für das Gebiet eines Kreisringes um den singulären Punkt $x=a$ als Mittelpunkt in dem Bezirke dieses Punktes zu berechnen, und ebenso eine beliebige ganze rationale Function der Integrale Nr. 2 (1.) und (3.), deren Ausdrücke die Form Nr. 2 (5.) haben, und ihrer Ableitungen. Ferner ist für das bestimmte Integral, welches einen Coefficienten der Entwickelung von $\varphi(x-a)$ darstellt (Nr. 3 I. *A.*), der Werth mit vorgeschriebener Annäherung zu ermitteln, und es ist in der Reihe rationaler Ausdrücke gegebener Constanten, welche einen solchen Coefficienten darstellt, ein Stellenzeiger anzugeben, von welchem an der Rest dieser Reihe kleiner als eine vorgeschriebene Grösse ist.

Eine solche Berechnung geschieht nach den Grundsätzen, die in Abh. Bd. 96 Nr. 18 dieses Journals angegeben sind, und beruht darauf, dass jede Reihe S, durch welche eine der Grössen unter den Integralzeichen entwickelt ist, in zwei Theile zerlegt wird, $S = S' + S''$, wo S' eine ganze rationale Function von $x-a$ oder $(x-a)^{-1}$ ($x-a$ bezüglich $(x-a)^{-1}$ noch mit anderen Variabeln multiplicirt) ist, wobei statt $x-a$ auch eine Constante stehen kann, mit Coefficienten, die rational durch gegebene Constanten ausgedrückt sind, und wo Mod. $S < M$, Mod. $S'' < \varepsilon$, ε hinreichend klein gewählt ist, und Mod. $S' \leqq M+\varepsilon$. Da die Reihen S Potenzreihen sind, so kann die Zerlegung $S'+S''$ ermittelt werden, wenn M bekannt ist. Wenn man nun weiter auf das in Abh. Bd. 96 Nr. 18 dieses Journals Gesagte Bezug nimmt, so ergiebt sich, dass hier übrig bleibt, bei jedem Factor von P gemäss der in Nr. 1 I. vorausgesetzten Eigenschaft desselben zu zeigen, wie sich ein Werth gleich oder grösser als der Modul der in Nr. 1 I. als $G(w)$ bezeichneten Function in einem beliebigen Kreise finden lässt.

Wenn bei der Potenzreihe $G(w) = \sum_0^\infty c_\alpha w^\alpha$ auf dem Kreise um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius R der Modul $\leqq M$ ist, so ist Mod. $c_\alpha \leqq \frac{M}{R^\alpha}$, daher ist in dem Kreise mit dem Radius $R' < R$

$$\text{Mod.}\left(\sum_0^\infty c_\alpha w^\alpha\right) \leqq M\frac{R}{R-R'}.$$

Der Kreis mit dem Radius R gehe durch keinen singulären Punkt der Differentialgleichung, welcher die Reihe genügt. Diese singulären Punkte können für diese Untersuchung beliebige sein, nur der Nullpunkt soll regulär sein. Nun kann man in dem Gebiete eines Kreises innerhalb des Bezirkes eines (singulären oder nichtsingulären) regulären Punktes für eine in diesem Punkte endliche Potenzreihe, welche der Differentialgleichung genügt, und für ihre Ableitungen Werthe, welche die Moduln dieser Grössen übertreffen, nach Abh. Bd. 91 Nr. 3 I. und II. ermitteln. Man gehe nun von der bekannten Entwickelung bei dem Nullpunkte in dem Bezirke dieses Punktes aus, der der Voraussetzung nach regulärer Punkt der Differentialgleichung ist, und entwickele successive bei nichtsingulären Punkten x_0 dieser Differentialgleichung, deren Ordnung σ sei, ein Integralsystem y_1 bis y_σ, so dass

$$\left\{y_\lambda, \frac{dy_\lambda}{dx}, \ldots \frac{d^{\lambda-2}y_\lambda}{dx^{\lambda-2}}, \frac{d^\lambda y_\lambda}{dx^\lambda}, \ldots \frac{d^{\sigma-1}y_\lambda}{dx^{\sigma-1}}\right\}_{x=x_0} = 0, \left|\frac{d^{\lambda-1}y_\lambda}{dx^{\lambda-1}}\right|_{x=x_0} = 1 \qquad (\lambda = 1, \ldots \sigma),$$

durch welches man jedesmal die bei dem vorhergehenden Punkte entwickelten Integrale ausdrückt. Dann kann man durch eine endliche Anzahl von

Kreisen hindurchgehend für den vorgelegten Kreis eine Grösse M finden, welche den Modul der Reihe auf diesem Kreise übertrifft.

II. Nachdem die Integrale Nr. 2 (1.) und (5.) in einem Kreisringe um einen singulären Punkt $x = a$ als Mittelpunkt mit vorgeschriebener Annäherung berechnet sind, und ebenso ihre Ableitungen bis zur $(m-1)$ten Ordnung, ist zum Zwecke der Berechnung des Resultates der Fortsetzung der Integrale zu zeigen, wie diese Integrale durch ein Integralsystem bei einem nichtsingulären Punkte dieses Kreisringes ausgedrückt und die Constanten berechnet werden und umgekehrt, ferner wie ein bei einem nichtsingulären Punkte entwickeltes Integralsystem durch ein solches bei einem anderen nichtsingulären Punkte auszudrücken und die Constanten zu berechnen sind.

Um ein Integral Y_1 von $F_m(y, x) = q$ durch ein bei einem nichtsingulären Punkte entwickeltes Integralsystem auszudrücken, welches aus der Summe besteht Integral Y_2, zu welchem ein System von Integralen von $F_m = 0$, mit Constanten multiplicirt, addirt ist, wird $Y_1 - Y_2$ durch dieses Integralsystem von $F_m = 0$ dargestellt (vgl. Nr. 7 (1.)), entsprechend bei der umgekehrten Aufgabe. Die bezügliche Gleichung wird $(m-1)$-mal differentiirt und das Gleichungssystem nach den Constanten aufgelöst. Die Determinante des erhaltenen Gleichungssystems ist bekannt. Der constante Factor in dieser Determinante geht bei einem singulären Punkte aus dem Ausdruck der Determinante $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m$ hervor. Es sind demnach die Werthe der eingehenden Integrale und ihrer Ableitungen in diesem nichtsingulären Punkte mit vorgeschriebener Annäherung zu bestimmen.

Bei dem nichtsingulären Punkte $x = x_0$ der Differentialgleichung $F_m(y, x) = PQ$ zerfällt PQ in eine Summe $L_1 + \dots + L_s$, und jeder Summand L besteht aus einem Product λ von constanten Factoren, die aus der Darstellung von P (siehe Nr. 1) und von Q herrühren, deren Werthe mit beliebiger Annäherung bereits ermittelt sind (I.), und einer Potenzreihe mit positiven Exponenten, deren Coefficienten rationale Ausdrücke gegebener Constanten sind. Diese Potenzreihe sei $\sum\limits_0^\infty k_\alpha (x - x_0)^\alpha$. Es werden nun alle im Endlichen liegenden singulären Punkte der Differentialgleichungen für die einzelnen Factoren von P (siehe Nr. 1), der Differentialgleichung für Q und von $F_m = 0$ fixirt, und der Kreis um x_0 als Mittelpunkt durch den nächsten dieser Punkte sei durch α bezeichnet. Dann convergirt die Potenzreihe

$\sum_0^\infty k_\alpha(x-x_0)^\alpha$ wenigstens in α. Die Differentialgleichung $F_m(y,x) = \sum_0^\infty k_\alpha(x-x_0)^\alpha$ wird nun durch eine Reihe $\sum_0^\infty c_\alpha(x-x_0)^\alpha$ befriedigt, die in α convergirt, in welcher die c_α rationale Ausdrücke gegebener Constanten sind, daher die Differentialgleichung $F_m = \lambda\sum_0^\infty k_\alpha(x-x_0)^\alpha$ durch $\lambda\sum_0^\infty c_\alpha(x-x_0)^\alpha$. Die den s Summanden $L_\alpha(\alpha = 1, \ldots s)$ entsprechenden s Reihen $\lambda\sum_0^\infty k_\alpha(x-x)^\alpha$ seien zu einer Reihe $\sum_0^\infty k'_\alpha(x-x_0)^\alpha$ zusammengefasst, ebenso die s Reihen $\lambda\sum_0^\infty c_\alpha(x-x_0)^\alpha$ zu einer Reihe $\sum_0^\infty c'_\alpha(x-x_0)^\alpha$; diese beiden Reihen convergiren im Bezirke von x_0 bei $F_m = PQ$.

Die beliebig angenäherte Berechnung des bei einem nichtsingulären Punkte x_0 entwickelten Integrales $Y = \sum_0^\infty c'_\alpha(x-x_0)^\alpha$ und seiner Ableitungen in diesem Punkte x_0 ist jetzt bekannt. Es bleibt daher noch übrig, die Berechnung eines solchen Integrales Y und seiner Ableitungen in einem beliebigen Punkte x'_0 entweder des Kreises α oder des Bezirkes von x_0 bei $F_m = PQ$ zu geben. Es genügt das Letztere, bei α kann man direct dieselbe Methode anwenden. Zu dem Zwecke ist nur noch in Bezug auf die Entwickelung des Integrales Y in dem Bezirke von x_0 $\sum_0^\infty c'_\alpha(x-x_0)^\alpha$ zu zeigen, wie man einen Werth gleich oder grösser, als der Modul dieser Reihe ist, in einem Kreise um x_0 als Mittelpunkt findet, dessen Radius kleiner als der des Bezirkes von x_0 ist. R_0 sei ein solcher Radius, und in Bezug auf die Coefficienten p in F_m und die oben genannte Reihe $\sum_0^\infty k'_\alpha(x-x_0)^\alpha$ sei $M \geqq \text{Mod.}\, p$, $M' \geqq \text{Mod.}\left(\sum_0^\infty k'_\alpha(x-x_0)^\alpha\right)$ für Werthe x auf dem Kreise mit dem Radius R_0. M ist unmittelbar bekannt, M' ergiebt sich dadurch, dass für die Factoren von P in Nr. 4 I. eine M' entsprechende Grösse bestimmt ist, und eine solche Grösse für die Entwickelung von Q aus den in Abh. Bd. 96 Nr. 18 und 20 dieses Journals gemachten Angaben bekannt wird. Der grösste der beiden Werthe M und M' sei durch M_1 bezeichnet, und es sei M_0 ein positiver Werth $\geqq M_1 R_0^s (s = 0, \ldots m-1)$. Es ergiebt sich nun in Bezug auf die Reihe $\sum_0^\infty c'_\alpha(x-x_0)^\alpha$, indem man die in Abh. Bd. 91 Nr. 3 II. dieses Journals angegebene Methode mit einer alsbald zu erkennenden Abänderung anwendet, dass in dem Kreise um x_0 als Mittelpunkt mit einem Radius $R < R_0$

$$\text{Mod.}\left(\sum_0^\infty c'_\alpha (x-x_0)^\alpha\right) < (g_0+1)\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{-\left(1+\frac{M_0 R_0}{\gamma}\right)}$$

ist, wo $0<\gamma<1$ ist und g_0 aus Formel (31.) l. c. hervorgeht, wenn dort statt $g_0\mathfrak{B}_\alpha$ gesetzt wird $g_0\mathfrak{B}_\alpha+C_\alpha$.

5.

Die Fortsetzung der Integrale.

I. Es sei, wie in Nr. 1 II. gesagt, durch die sämmtlichen dort bezeichneten singulären Punkte ($x=\infty$ incl.) eine in sich zurücklaufende Linie L gezogen. Die längs dieser Linie aufeinander folgenden singulären Punkte seien durch $a_\varkappa (\varkappa = 1, \dots \lambda)$ bezeichnet. In jedem der beiden von dieser Linie begrenzten Gebiete der x-Ebene verläuft ein Integral der Differentialgleichung $F_m(y, x) = PQ$ einwerthig. P war eine einwerthige Function, Q sei zunächst das Product $Q'Q''$, wo $Q' = (x-a_1)^{r_1} \dots (x-a_l)^{r_l}$, Q'' eine algebraische Function.

Eines der beiden Gebiete der x-Ebene E_1 sei fixirt. Die n Zweige der n-werthigen algebraischen Function Q'', von denen jeder also in E_1 einwerthig ist, seien durch s_1 bis s_n bezeichnet, und es sei in E_1 ein Zweig q' der Function Q' angenommen, von diesem unterscheiden sich die übrigen um constante Factoren.

Bei einem Umgange um einen singulären Punkt $a_\varkappa$ (in positiver, entsprechend in negativer Richtung) geht ein Zweig s_α über in $s_\beta^{(\varkappa)}$, q' in $\gamma^{(\varkappa)}q'$. Bei dem Uebergange von dem singulären Punkte $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa\pm 1}$ in E_1 bleiben s_α und q' einwerthig (die Ermittelung des Ausdruckes von s_α bei $a_{\varkappa\pm 1}$ geschieht nach den Angaben in Abh. Bd. 104 Nr. 9 dieses Journals.)

Ein Integral der Differentialgleichung $F_m(y, x) = Pq's_\alpha$, welches in dem Bezirke von $a_\varkappa$ dargestellt ist, sei in E_1 fixirt in Bezug auf den Werth des $\log(x-a_\varkappa)$ und der vorkommenden Grössen $(x-a_\varkappa)^r$ und sei durch $J_\alpha^{(\varkappa)}$ bezeichnet. Sodann sei ein in dem Bezirke von $a_\varkappa$ entwickeltes Integralsystem von $F_m(y, x) = 0$, $y_1^{(\varkappa)}$ bis $y_m^{(\varkappa)}$, in E_1 fixirt.

Bei dem Umgange um $x = a_\varkappa$ geht $J_\alpha^{(\varkappa)}$ über in $\gamma^{(\varkappa)} J_\beta^{(\varkappa)} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=m} c_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)} y_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$.
Bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa+1}$ in E_1 geht $J_\alpha^{(\varkappa)}$ über in $J_\alpha^{(\varkappa+1)} + \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=m} d_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa+1)} y_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa+1)}$, entsprechend bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa-1}$. Diese Substitutionen seien durch (H) bezeichnet.

Bei demselben Umgange um $x = a_\varkappa$ geht $y_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ über in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=m} g_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa)} y_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa)}$, bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa+1}$ in E_1 geht $y_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ über in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=m} h_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)} y_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$, entsprechend bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa-1}$. Diese Substitutionen seien durch (K) bezeichnet.

Um die Fortsetzung eines Integrales von einem singulären Punkte aus auf irgend einem Wege zu einem anderen singulären Punkte hin zu bewerkstelligen, wird dieser Weg auf einen solchen reducirt, der längs der Linie L verläuft und singuläre Punkte umgeht, und das Resultat durch Zusammensetzen von Substitutionen (H) und (K) erhalten.

II. Um die Constanten in den Substitutionen (H) in I. zu ermitteln, müssen die Integrale $J_\alpha^{(\varkappa)} (\varkappa = 1, \ldots \lambda)$ aufgestellt werden. Die lineare Differentialgleichung für die algebraische Function Q'' sei ϱ-ter Ordnung. ϱ Integrale derselben bei $a_\varkappa$ in E_1 fixirt seien $q_1^{(\varkappa)''}$ bis $q_\varrho^{(\varkappa)''}$, aus diesen setzt sich der Zweig s_α linear mit constanten Coefficienten zusammen. An Stelle der Grösse Q in der Differentialgleichung $F_m(y, x) = PQ$ tritt dann zunächst $q' q_1^{(\varkappa)''}$ bis $q' q_\varrho^{(\varkappa)''}$. Es möge nun allgemein Q eine bestimmte Function sein von der Art, dass sie einer in Nr. 1 I. bezeichneten homogenen linearen Differentialgleichung genügt. Diese Differentialgleichung sei ϱ-ter Ordnung, und es sei bei jedem der Punkte $a_\varkappa (\varkappa = 1, \ldots \lambda)$ ein in dem Bezirke von $a_\varkappa$ entwickeltes Integralsystem derselben $q_1^{(\varkappa)}$ bis $q_\varrho^{(\varkappa)}$ in E_1 fixirt.

Bei einem Umgange um $a_\varkappa$ geht $q_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ über in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} k_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa)} q_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa)}$, bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa+1}$ in E_1 geht $q_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ über in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} l_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)} q_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$, entsprechend bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa-1}$.

Ein Integral der Differentialgleichung $F_m(y, x) = P q_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$, welches in dem Bezirke von $a_\varkappa$ entwickelt ist, sei in E_1 fixirt und durch $S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ bezeichnet.

Bei demselben Umgange um $a_\varkappa$ geht $S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ über in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} k_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa)} S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa)} + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=m} m_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa)} y_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa)}$, und durch Uebergang von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa+1}$ in E_1 geht $S^{(\varkappa)}$ über in

$$\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} l_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)} S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)} + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=m} n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)} y_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)},$$

entsprechend bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa-1}$. Diese Substitutionen seien durch (L) bezeichnet.

Es sei nun Q gleich $A_1 q_1^{(\sigma)} + \cdots + A_\varrho q_\varrho^{(\sigma)}$ und ein Integral von $F_m(y, x) = PQ$ sei $A_1 S_1^{(\sigma)} + \cdots + A\ S_\varrho^{(\sigma)} + B_1 y_1^{(\sigma)} + \cdots + B_m y_m^{(\sigma)}$, wo die A und B irgend welche

Constanten sein können, so hat man, um die Fortsetzung dieses Integrales zu bewerkstelligen, die Fortsetzung der einzelnen Integrale $S_1^{(\sigma)}, \dots S_\varrho^{(\sigma)}$, $y_1^{(\sigma)}, \dots y_m^{(\sigma)}$ vorzunehmen, und diese Fortsetzung ergiebt sich unter Anwendung der Substitutionen (K) und (L).

Wenn nun dieser Ausdruck Q mit dem Ausdruck für $q's_\alpha(\alpha = 1, \dots n)$ zusammenfällt, wo s_α ein Zweig der algebraischen Function Q'', so ergeben sich durch Anwendung der Substitutionen (L) die Substitutionen (H).

Wie die Substitutionen (L) zu ermitteln sind, wird in Nr. 6 und 7 gezeigt.

Geht man bei der Fortsetzung von einem bei einem nichtsingulären Punkte entwickelten Integralsysteme aus oder kommt darauf zurück, so ist dasselbe durch ein Integralsystem, welches für die Umgebung eines singulären Punktes nach Nr. 3 dargestellt ist, auszudrücken, bezüglich umgekehrt (siehe Nr. 7).

6.

Bestimmung der Substitutionsconstanten bei Fortsetzung der Integrale durch Umgang um einen singulären Punkt.

Die Constanten, die zu bestimmen sind, waren in II. der vorigen Nummer angegeben. Wenn die dort durch $q_\mathfrak{a}^{(\varkappa)}$ bezeichnete Grösse die Function $q'q_\mathfrak{a}^{(\varkappa)''}$ war, so hat dieselbe eine Entwickelung der Form $(x-a_\varkappa)^r \sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a_\varkappa)^\mathfrak{a}$ und geht bei dem Umgange um $x = a_\varkappa$ (in positiver Richtung) in $e^{2\pi i r} q_\mathfrak{a}^{(\varkappa)}$ über. Man hat nun, wenn $q_\mathfrak{a}^{(\varkappa)}$ in den Ausdruck Nr. 2 (3.) für q eingesetzt wird, wodurch das Integral $S_\mathfrak{a}^{(\varkappa)}$ hervorgeht, indem bei den Integrationen jedesmal das constante Glied annullirt wird, um den Umgang um $x = a_\varkappa$ zu vollziehen, auf diesen Ausdruck das Verfahren anzuwenden, welches in Abh. Bd. 96 Nr. 19 dieses Journals angegeben ist. Kommen in den normalen Elementarintegralen μ in Nr. 2 (1.) Exponenten vor, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, etwa in μ_{σ_1} bis μ_{σ_μ}, und werden die aus Nr. 2 (1.) hervorgehenden Integrale durch $Y_\mathfrak{a}(\mathfrak{a} = 1, \dots m)$ bezeichnet, so geht $S_\mathfrak{a}^{(\varkappa)}$ über in $e^{2\pi i r} S_\mathfrak{a}^{(\varkappa)} + c_1 Y_{\sigma_1} + \dots + c_\mu Y_{\sigma_\mu}$. Die Constanten c_1 bis c_μ werden, wie in Abh. Bd. 96 Nr. 19 dieses Journals angegeben ist, bestimmt und können nach Nr. 4 I. beliebig angenähert berechnet werden. Wenn ein anderes Integralsystem von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a_\varkappa$ in E_1 entwickelt ist, $y_\mathfrak{a}^{(\varkappa)}(\mathfrak{a} = 1, \dots m)$, so sind noch die Integrale $Y_\mathfrak{a}$ durch letztere Integrale auszudrücken. Dieses geschieht, wie Abh. Bd. 96 Nr. 22 I. *A. b.*, *B. b.* dieses Journals gezeigt ist.

Wenn die Grössen $q_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}(\mathfrak{a}=1,\dots \varrho)$ Integrale der allgemeinen in Nr. 1 bezeichneten Differentialgleichung unter der Form Nr. 2 (4.) sind, und $q_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ bei dem Umgange um $x=a$ in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} k_{\mathfrak{ab}}^{(\varkappa)} q_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa)}$ übergeht, so werden zunächst die Constanten $k_{\mathfrak{ab}}^{(\varkappa)}$ gemäss den Angaben in Abh. Bd. 96 Nr. 19 und 22 I. *A. b.* und *B. b.* dieses Journals dargestellt. Nun wird in dem Integralausdruck Nr. 2 (3.), wo $q_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ an Stelle von q steht, durch welchen $S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ gegeben wird, der Umgang nach dem Verfahren Bd. 96 Nr. 19 dieses Journals vollzogen. Das in dem Resultate stehende Integral der Differentialgleichung $F_m = q$, nachdem die Integrale, welche $F_m = 0$ genügen, weggelassen sind, ist dem Werthe nach gleich $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} k_{\mathfrak{ab}}^{(\varkappa)} S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa)}$, da bei den successiven Integrationen die Constante annullirt wird. Dadurch erhält man das Resultat des Umganges des Integrales $S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ ausgedrückt durch $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} k_{\mathfrak{ab}}^{(\varkappa)} S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa)} + c_1 Y_{\sigma_1} + \dots + c_\mu Y_{\sigma_\mu}$, und die Constanten c ermittelt. Dann sind noch die Integrale $Y_{\mathfrak{a}}$ durch das bei $x = a_\varkappa$ in E_1 angenommene Integralsystem von $F_m = 0$ auszudrücken.

7.

Bestimmung der Substitutionsconstanten bei Fortsetzung der Integrale durch Uebergang von einem singulären Punkt zu einem anderen.

Nach den Angaben von Nr. 5 II. geht die Grösse $q_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ bei dem Uebergange von $a_\varkappa$ zu $a_{\varkappa+1}$ in E_1 über in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} l_{\mathfrak{ab}}^{(\varkappa+1)} q_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$ und das Integral $S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ in $\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} l_{\mathfrak{ab}}^{(\varkappa+1)} S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)} + \sum_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=m} n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)} y_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$. Die Constanten $l_{\mathfrak{ab}}^{(\varkappa+1)}$ seien bereits bestimmt (siehe Abh. Bd. 96 Nr. 20 dieses Journals und das hier Folgende). Es bleiben dann die Constanten $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ zu bestimmen. In dem Falle Nr. 5 I. kennt man direct die Integrale $J_{\alpha}^{(\varkappa)}$ und $J_{\alpha}^{(\varkappa+1)}$, die sich auf die Differentialgleichung $F_m = q$, in welcher ein und derselbe Zweig s_α der algebraischen Function vorkommt, beziehen, und hat dann noch die Constanten $d_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa+1)}$ in derselben Weise wie die $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ zu bestimmen.

Es sei nun nach Nr. 3 II. vermittelst einer rationalen Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ das Integral $S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ in einem Kreise der x-Ebene, der von singulären Punkten nur $a_\varkappa$ im Innern enthält, dargestellt, und ebenso seien die Integrale $S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$, $y_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ vermittelst einer zweiten rationalen Substitution ersten Grades $x = R_1(\xi_1)$ in einem zweiten Kreise der x-Ebene ausgedrückt, innerhalb dessen nur der eine singuläre Punkt $a_{\varkappa+1}$ liegt. Von den beiden Kreisen werde angenommen, dass sie ein gemeinschaftliches Gebiet haben. Das Stück der Linie L (Nr. 5) zwischen den Punkten $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ oder eine Linie $\mathfrak{L}$, welche dieses Stück vertreten kann, so dass innerhalb des Gebietes zwischen L und $\mathfrak{L}$ kein singulärer Punkt liegt, gehe durch das gemeinschaftliche Gebiet der beiden Kreise. In diesem Gebiete gilt dann die Gleichung

$$(1.)\qquad S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}-\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} l_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)} S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{\mathfrak{c}=m} n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)} y_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}.$$

Durch $(m-1)$-malige Differentiation derselben nach x ergiebt sich ein System von m linearen Gleichungen, aus welchen die Constanten $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ durch Auflösung bei einem nichtsingulären Punkte bestimmt werden. Wenn die Integrale $y_1^{(\varkappa+1)}$ bis $y_m^{(\varkappa+1)}$ von $F_m(y, x) = 0$ aus den Ausdrücken Nr. 2 (1.) hervorgehen, in denen alsdann bei den successiven Integrationen noch Integrationsconstanten zugefügt werden können, so ist die Determinante des Gleichungssystemes immer $\mu_1\mu_2\ldots\mu_m$. Hieraus ergiebt sich der constante Factor in der Darstellung dieser Determinante $ce^{-\int p_1 dx}$ als rationaler Ausdruck gegebener Constanten. Falls es nicht zwei Kreise der vorhin genannten Beschaffenheit giebt, so sind nichtsinguläre Punkte zwischen $a_\varkappa$ und $a_{\varkappa+1}$ so zu wählen, dass bei je zwei aufeinanderfolgenden Punkten dasselbe Verfahren angewandt werden kann.

Wenn $a_{\varkappa+1}$ auf der Peripherie eines Kreises liegt, in dessen Innern von singulären Punkten nur $a_\varkappa$ sich findet, und die oben bezeichnete Linie $\mathfrak{L}$ in diesem Kreise liegt, so kann ein und dieselbe rationale Substitution ersten Grades angewandt werden, nämlich diejenige $x = R(\xi)$, durch welche dieser Kreis conform auf den Kreis in der ξ-Ebene mit $\xi = 0$ als Mittelpunkt und dem Radius 1 abgebildet wird, so dass dem Punkte $a_\varkappa$ der Punkt $\xi = 0$, dem Punkte $a_{\varkappa+1}$ der Punkt $\xi = 1$ entspricht. In Nr. 3 II. ist die Darstellung des Integrales $S_{\mathfrak{a}}^{(\varkappa)}$ in dem Gebiet dieses Kreises gegeben und ebenso die Darstellung der Integrale $S_{\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$ und $y_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ in einem Kreise um $\xi = 1$ als Mittelpunkt, dessen Gebiet dort bezeichnet ist. In dem gemeinschaftlichen Gebiete beider Kreise besteht die Gleichung (1.). Durch $(m-1)$-malige Differentiation derselben nach ξ ergiebt sich dann ein Gleichungssystem, dessen Determinante aus dem Product der obigen Determinante und $\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ besteht. Aus diesem Gleichungssysteme sind nun die Constanten $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ zu bestimmen. Es möge dieser Kreis, in dessen Innern kein anderer singulärer Punkt als $a_\varkappa$ liegt, und auf dessen Peripherie $a_{\varkappa+1}$ sich findet und der die Linie $\mathfrak{L}$ enthält, zugleich so beschaffen sein, dass ausser $a_{\varkappa+1}$ kein anderer singulärer Punkt auf der Peripherie liegt. Wenn nun bei jedem der beiden singulären Punkte die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ und der Differentialgleichung für Q regulär sind und die Grösse P in $F_m(y, x) = PQ$ sich dort wie ein reguläres Integral verhält, so werden die Integrale S auch regulär. Alsdann treten, nachdem die Substitution $x = R(\xi)$ angewandt ist, solche Reductionen in den Ausdrücken der Constanten $l_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$ und $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ ein, wie in dem entsprechenden Falle bei homogenen linearen Differentialgleichungen (Abh. Bd. 96 Nr. 20 I. *C.* dieses Journals), was in derselben Weise, wie in Abh. Bd. 87 dieses Journals für homogene Differentialgleichungen gezeigt ist (vgl. Abh. Bd. 100 dieses Journals), bewiesen wird. (Es möge noch bemerkt werden, dass Bd. 87 S. 245 die Reihe $\mathfrak{P}'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\xi)$ in den Coefficienten nicht die Grösse πi neben den anderen dort genannten Grössen enthält, sobald in den Integralen kein Logarithmus vorkommt). Bei Herleitung des reducirten Ausdruckes für $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ werden die $l_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$ zunächst als unbekannte Constanten behandelt, alsdann können für diese Grössen $l_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$ nach dem l. c. Nr. 4 angegebenen Verfahren solche Potenzreihen von ξ eingesetzt werden, dass der weggelassene Theil mit einer hinreichend hohen Potenz von $\xi-1$ anfängt. Dazu ist dort in Nr. 4 statt (6.) direct (3.) zu benutzen, wo die Division mit der Grösse D ausgeführt wird, und bei (9.) die Grösse ξ^r nach Potenzen von $\xi-1$ zu entwickeln und mit einer passenden Potenz abzubrechen, im übrigen bleibt das dort angegebene Verfahren. Und schliesslich werden in dem Gesammtausdrucke die Potenzreihen von ξ durch Multiplication und Addition in eine zusammengezogen, welche für $\xi = 1$ convergirt und die Constanten $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ darstellt.

Die beliebig angenäherte Berechnung der Constanten $l_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}^{(\varkappa+1)}$, $n_{\mathfrak{c}}^{(\varkappa+1)}$ geschieht nach den Angaben von Nr. 4 II.

8.

Das Vorkommen des Logarithmus in den Entwickelungen der Integrale in der Umgebung der singulären Punkte.

Diese Discussion über das Vorkommen des Logarithmus knüpft an den Ausdruck des Integrals von $F_m(y, x) = q$ Nr. 2 (3.)

$$(1.)\qquad \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \int \ldots \int dx\, \mu_{m-1}^{-1} \mu_m \int \mu_m^{-1} q\, dx$$

an und wird in derselben Weise vorgenommen, wie bei den Integralen von $F_m(y, x) = 0$ nach Abh. Bd. 96 Nr. 22 dieses Journals. Die Entwickelung der Grösse q enthalte selbst keinen Logarithmus, q ist von der Form $(x-a)^r\psi(x-a)$, wo ψ bei $x=a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig ist; die Integrationsconstanten werden bei den successiven Integrationen annullirt.

Kommt in den μ ein Exponent, der sich von r nur um eine ganze Zahl unterscheidet, nicht vor, so enthält die Entwickelung von (1.) keinen Logarithmus.

Wenn jedoch in den μ ein solcher Exponent vorkommt, so ist folgendes Verfahren anzuwenden. Die Grösse $q = PQ$ in (1.) erhält folgenden Ausdruck. Für Q tritt der Ausdruck durch ein System normaler Elementarintegrale

$$(2.)\qquad \nu_1 \int dx \nu_1^{-1} \nu_2 \dots \int \nu_{s-1}^{-1} \nu_s dx$$

ein, in dem Falle $Q = Q'Q''$ in Nr. 2 ist $s=1$ und ν_1 ein reguläres Elementarintegral. P hat bei einem Punkte, in welchem die Factoren von P endlich bleiben, die Darstellung durch eine Summe von Producten eines constanten Factors und einer Potenzreihe mit positiven Exponenten, deren Coefficienten rationale Ausdrücke gegebener Constanten sind (vgl. Nr. 4 II.). Alsdann sind diese einzelnen Potenzreihen P_α mit Q multiplicirt an Stelle von q zu setzen, der constante Factor tritt aus dem Integrale heraus. Bei einem Punkt, in welchem keiner der Factoren von P in unendlich hoher Ordnung unendlich wird, tritt eine Darstellung von P von der Form ein, in welcher zu den Potenzreihen im vorigen Falle noch ein Factor $(x-a)^\varrho$ hinzutritt, wo ϱ ganzzahlig positiv oder negativ ist; dieses Product werde auch durch P_α bezeichnet.

Nun werde der Ausdruck aufgestellt

$$(3.)\qquad e^{-u}\mu_{c+1}\int dx \mu_{c+1}^{-1}\mu_{c+2}\int \dots \int dx \mu_m^{-1} P \nu_1 \int dx \nu_1^{-1}\nu_2 \int \dots \int \nu_{s-1}^{-1}\nu_s dx,$$

wo an Stelle von P eine der Potenzreihen P_α steht, oder P habe selbst den Ausdruck eines normalen Elementarintegrales, und die Coefficienten seien rationale Ausdrücke gegebener Constanten.

$$e^u,\quad u = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$$

sei der Exponentialfactor in dem normalen Elementarintegral μ_{c+1}. Es mögen die Producte $\nu_{s-1}^{-1}\nu_s$ bis $\nu_1^{-1}\nu_2$ keinen Exponentialfactor enthalten, $P\nu_1$ denselben wie μ_m, μ_{m-1} bis μ_{c+1}, so dass, wenn nicht $\mu_{c+1} = \mu_1$ ist, μ_c ($c \leqq m$) einen anderen enthält und die Exponenten in μ_c, μ_{c-1} bis μ_1 sollen sich von r in ν_s nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Der Ausdruck (1.) enthält dann gemäss der Benennung in Abh. Bd. 96 Nr. 22 dieses Journals den Exponenten r in q einstellig.

Der Ausdruck (3.) hat nun die Entwickelung eines regulären Integrales; man kann dieselbe aufstellen (bei den Integrationen wird jedesmal das constante Glied annullirt) und aus derselben ersehen, welches die höchste Potenz des Logarithmus ist. Hierzu werde Folgendes bemerkt. Bei Ausführung jeder Integration geht ein Ausdruck, der zu dem Exponenten α gehört, in einen solchen über, der zu $\alpha+1$ gehört, und es bleibt die Anzahl der bekannten Glieder in jedem Factor einer Logarithmenpotenz (die Anzahl, welche für diese Factoren übereinstimmend ist), welche Glieder in dem Factor der höchsten Potenz des Logarithmus nicht alle verschwinden sollen, constant, wofern, wenn α eine negative ganze Zahl ist, jene Anzahl wenigstens gleich $-\alpha$ ist. Man kann nun direct die Exponenten, zu welchen die successive auftretenden Entwickelungen gehören, bestimmen, und hieraus ersehen, welches der höchste positive ganzzahlige Exponent von $(x-a)^{-1}$ in diesen successiven Entwickelungen ist. Dieser Exponent giebt die Anzahl der zu entwickelnden Glieder in der unter jedem Integralzeichen in (3.) vorkommenden Reihe $\nu_{s-1}^{-1}\nu_s$ bis $\mu_{c+1}^{-1}\mu_{c+2}$ an.

Die höchste Potenz des Logarithmus in (3.) bleibt nun die höchste Potenz des Logarithmus in (1.). Dasselbe gilt in Bezug auf diejenigen Entwickelungen

$$(4.) \qquad e^{-u}\mu_{c+1}\int dx\,\mu_{c+1}^{-1}\mu_{c+2}\int\ldots\int dx\,\mu_{a-1}^{-1}\mu_a \qquad (a = c+1, \ldots m),$$

die den Exponenten r in dem letzten Bestandtheile μ_a enthalten.

Man kann also auf diese Weise, wenn die gemachten Voraussetzungen erfüllt sind, erkennen, ob die Integrale mit dem Exponenten r in der Entwickelung von Logarithmen frei sind.

Wenn aber der Ausdruck (1.) den Exponenten r aus q nicht einstellig enthält, so kann man zusehen, ob der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ sich durch ein solches System normaler Differentialausdrücke darstellen lässt, aus welchem ein Ausdruck (1.) hervorgeht, der den Exponenten r aus q einstellig enthält, wodurch man zur Untersuchung, ob die Entwickelungen der Integrale mit dem Exponenten r von Logarithmen frei sind, auf das Vorige zurückkommt. Die Untersuchung, ob der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ einer solchen Darstellung fähig ist, geschieht nach den Angaben in Abh. Bd. 96 Nr. 22 I. *B.* dieses Journals.

Zu verbessern in früheren Abhandlungen des Verfassers:

Bd. 87 S. 328 Zeile 10 von oben ist $x^a(1-x)^c$ statt $x^{-a}(1-x)^{-c}$ zu setzen.
Bd. 96 S. 269 Zeile 9 von unten ist „enthalten" statt „vorkommen" zu setzen.
Bd. 96 S. 279 Zeile 9 und 10 von unten ist r_α statt v_α zu setzen.
Bd. 104 S. 28 Zeile 5 von unten ist N statt n zu setzen.
Bd. 104 S. 29 Zeile 12 von oben ist „aus" statt „und" zu setzen.
