Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1891
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0107
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0107

LOG Id: LOG_0007
LOG Titel: Sur les polynomes de Legendre. (Extrait d'une lettre adressée à M. F. Caspary par M. Ch. Hermite à Paris).
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

Contact

Sur les polynômes de *Legendre*.

(Extrait d'une lettre adressée à M. *F. Caspary* par M. *Ch. Hermite* à Paris.)

L'intégrale définie:

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{A+B-(A-B)\cos\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}}$$

conduit aisément aux expressions de *Laplace* et de *Jacobi:*

$$P^n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\cos\omega\sqrt{x^2-1})^n d\omega, \quad P^n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\omega}{(x+\cos\omega\sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

en prenant d'abord:

$$A = 1-\alpha(x-\sqrt{x^2-1}), \quad B = 1-\alpha(x+\sqrt{x^2-1})$$

et développant suivant les puissances croissantes de α, puis:

$$A = x-\alpha-\sqrt{x^2-1}, \quad B = x-\alpha+\sqrt{x^2-1}$$

et en développant suivant les puissances descendantes.

J'ai remarqué qu'on peut encore en tirer les formules importantes de M. *Mehler*, que j'écrirai ainsi:

$$P^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arccos x} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-x)}} d\varphi, \quad P^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_{\arccos x}^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sqrt{2(x-\cos\varphi)}} d\varphi.$$

Soit à cet effet $A = 1-2\alpha x+\alpha^2$, $B = 1-2\alpha y+\alpha^2$; en posant, pour abréger: $2\xi = x+y-(x-y)\cos\omega$, nous aurons d'abord:

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{1-2\alpha\xi+\alpha^2} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\alpha y+\alpha^2)}}.$$

Prenons pour variable indépendante la quantité ξ, ce qui se fait au moyen de la relation $(y-x)\sin\omega = 2\sqrt{(y-\xi)(\xi-x)}$; nous en déduirons cette nouvelle égalité, où je suppose $y > x$, à savoir:

$$\int_x^y \frac{d\xi}{(1-2\alpha\xi+\alpha^2)\sqrt{(y-\xi)(\xi-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\alpha y+\alpha^2)}}.$$

Cela étant, soit $y = 1$, on aura après avoir multiplié par $1-\alpha$:

$$\int_x^1 \frac{(1-\alpha)d\xi}{(1-2\alpha\xi+\alpha^2)\sqrt{(1-\xi)(\xi-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}},$$

puis en posant $\xi = \cos\varphi$:

$$\int_0^{\arccos x} \frac{(1-\alpha)\cos\frac{1}{2}\varphi . d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)\sqrt{2(\cos\varphi-x)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}.$$

L'intégrale du premier membre se développe suivant les puissances de α, au moyen de la relation:

$$\frac{(1-\alpha)\cos\frac{1}{2}\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2} = \Sigma\alpha^n\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

on parvient ainsi à la formule:

$$P^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\arccos x}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\varphi.d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-x)}}.$$

Faisons, en second lieu, $x=-1$, nous aurons d'abord:

$$\int_{-1}^{y}\frac{(1+\alpha)d\xi}{(1-2\alpha\xi+\alpha^2)\sqrt{(y-\xi)(\xi+1)}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha y+\alpha^2}};$$

en employant la substitution précédente, $\xi=\cos\varphi$, il viendra ensuite:

$$\int_{\arccos y}^{\pi}\frac{(1+\alpha)\sin\frac{1}{2}\varphi.d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)\sqrt{2(y-\cos\varphi)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1-2\alpha y+\alpha^2}},$$

et le développement:

$$\frac{(1+\alpha)\sin\frac{1}{2}\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2} = \Sigma\alpha^n\sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi$$

donnera la seconde des formules de M. *Mehler:*

$$P^n(y) = \frac{2}{\pi}\int_{\arccos y}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi.d\varphi}{\sqrt{2(y-\cos\varphi)}}.$$

Sans m'arrêter au résultat exprimé par cette relation:

$$\Sigma P^k(x)P^{n-k}(y) = \int_{\arccos y}^{\arccos x}\frac{\sin(n+1)\varphi.d\varphi}{\sqrt{(y-\cos\varphi)(\cos\varphi-x)}} \qquad (k=0,1,2,\ldots),$$

qui est la conséquence des égalités:

$$\int_{\arccos y}^{\arccos x}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)\sqrt{(y-\cos\varphi)(\cos\varphi-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\alpha y+\alpha^2)}},$$

$$\frac{\sin\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2} = \Sigma\alpha^n\sin(n+1)\varphi \qquad (n=0,1,2,\ldots),$$

parce que je n'en vois pas maintenant l'utilité, je passe à un autre point, en me proposant de rattacher à la théorie des fractions continues algébriques l'équation de *Jacobi:*

$$\frac{D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n}{1.2\ldots(n-\nu)} = \frac{(x^2-1)^\nu D_x^\nu P^n(x)}{1.2\ldots(n+\nu)}.$$

Considérons le développement de $(x^2-1)^n\log\frac{x+1}{x-1}$ suivant les puissances descendantes de la variable, que je représente ainsi:

$$(x^2-1)^n\log\frac{x+1}{x-1} = \Pi(x)+\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha'}{x^2}+\cdots,$$

$\Pi(x)$ désignant la partie entière. Je remarque d'abord qu'on en tire facilement la propriété caractéristique de $D_x^n(x^2-1)^n$ ou $P^n(x)$, d'être le dénominateur de la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de $\log\frac{x+1}{x-1}$. Qu'on prenne en effet la dérivée d'ordre n des deux membres: tous les termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}$ disparaîtront, et il suffit d'observer que les expressions:

$$D_x^{n-k}(x^2-1)^n . D_x^k \log\frac{x+1}{x-1}$$

sont entières en x, pour parvenir à l'égalité suivante:

$$D_x^n(x^2-1)^n \log\frac{x+1}{x-1} = \Phi(x) + \frac{\beta}{x^{k+1}} + \frac{\beta'}{x^{k+2}} + \cdots,$$

où $\Phi(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, ce qui met en évidence la propriété annoncée. Formons maintenant la dérivée d'ordre $n-\nu$, ν étant un entier moindre que n. L'expression de $D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n$ sera le produit de la puissance $(x^2-1)^\nu$ par un polynôme P, de degré $n-\nu$, et nous pouvons écrire la relation:

$$P.(x^2-1) \log\frac{x+1}{x-1} = \Phi_1(x) + \frac{\gamma}{x^{n-\nu+1}} + \frac{\gamma'}{x^{n-\nu+2}} + \cdots.$$

Elle montre que P est le dénominateur de la réduite d'ordre $n-\nu$, dans le développement en fraction continue, de la fonction $(x^2-1)^\nu \log\frac{x+1}{x-1}$. Ceci posé, je reviens à l'équation:

$$D_x^n(x^2-1)^n \log\frac{x+1}{x-1} = \Phi(x) + \frac{\beta}{x^{n+1}} + \frac{\beta'}{x^{n+2}} + \cdots,$$

et je prends les dérivées d'ordre ν des deux membres. Il est aisé de voir qu'en remplaçant $D_x^n(x^2-1)^n$ par $P^n(x)$, on trouvera pour résultat une égalité de cette forme:

$$D_x^\nu P^n(x) \log\frac{x+1}{x-1} = \frac{\Pi(x)}{(x^2-1)^\nu} + \frac{\beta_1}{x^{n+\nu+1}} + \frac{\beta_1'}{x^{n+\nu+2}} + \cdots,$$

$\Pi(x)$ étant entier en x. Nous aurons donc:

$$D_x^\nu P^n(x)(x^2-1)^\nu \log\frac{x+1}{x-1} = \Pi(x) + (x^2-1)^\nu\left(\frac{\beta_1}{x^{n+\nu+1}} + \frac{\beta_1'}{x^{n+\nu+2}} + \cdots\right),$$

de sorte qu'on obtient, en développant la quantité:

$$(x^2-1)^\nu\left(\frac{\beta_1}{x^{n+\nu+1}} + \frac{\beta_1'}{x^{n+\nu+2}} + \cdots\right)$$

suivant les puissances descendantes de la variable:

$$D_n^\nu P^n(x)(x^2-1)^\nu \log\frac{x+1}{x-1} = \Pi(x) + \frac{\gamma}{x^{n-\nu+1}} + \frac{\gamma'}{x^{n-\nu+2}} + \cdots.$$

Cette équation fait voir que le polynôme $D_x^\nu P^n(x)$ est aussi le dénominateur de la réduite d'ordre $n-\nu$ de la quantité $(x^2-1)^\nu \log\frac{x+1}{x-1}$; il ne peut donc différer de $D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n$, que par un facteur constant facile à obtenir ce qui donne l'équation de *Jacobi.*

En voici une application qui m'a été suggérée par un théorème élégant dont je dois la communication à M. *Beltrami.* Il consiste dans la relation suivante:

$$\frac{2n-1}{n(n-1)}(x^2-1)D_x P^n(x) = P^{n+1}(x)-P^{n-1}(x)$$

que l'illustre géomètre a aussi obtenue pour l'intégrale de seconde espèce, de sorte que l'on a pareillement:

$$\frac{2n-1}{n(n-1)}(x^2-1)D_x Q^n(x) = Q^{n+1}(x)-Q^{n-1}(x).$$

En me bornant aux fonctions $P^n(x)$, je poserai en général:

$$(x^2-1)^\nu D_x^\nu P^n(x) = AP^{n+\nu}(x)+A_1 P^{n+\nu-2}(x)+\cdots+A_\varkappa P^{n+\nu-2\varkappa}(x)+\cdots,$$

et les coëfficients $A_\varkappa$ seront déterminés par la formule

$$\frac{2A_\varkappa}{2(n+\nu-2\varkappa)+1} = \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^\nu D_x^\nu P^n(x) P^{n+\nu-2\varkappa}(x)\,dx.$$

Sauf un facteur constant, la relation de *Jacobi* permet de remplacer l'intégrale par cette autre:

$$\int_{-1}^{+1} D_x^{n-\nu}(x^2-1)^n P^{n+\nu-2\varkappa}(x)\,dx,$$

à laquelle, d'après sa forme, s'applique la méthode d'intégration par parties. On la ramène ainsi à une quantité explicite qui est nulle aux limites, et à l'expression:

$$\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n D_x^{n-\nu} P^{n+\nu-2\varkappa}(x)\,dx,$$

qui est pareillement nulle, lorsqu'on a $n-\nu > n+\nu-2\varkappa$, c'est-à-dire $\varkappa > \nu$; nous avons donc cette relation:

$$(x^2-1)^\nu D_x^\nu P^n(x) = AP^{n+\nu}(x)+A_1 P^{n+\nu-2}(x)+\cdots+A_\nu P^{n-\nu}(x),$$

d'où se tire facilement pour $\nu=1$ le théorème de M. *Beltrami.* Dans le cas de $\nu=2$, elle donne le résultat suivant:

$$\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{n(n-1)(n+1)(n+2)}(x^2-1)D_x^2 P^n(x)$$
$$= (2n-1)P^{n+2}(x)-2(2n+1)P^n(x)+(2n+3)P^{n-2}(x).$$
